

IPhO 2009

Theorieaufgaben und Lösungen · Mérida, Mexiko · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2009/

Aufgabe 1: Entwicklung des Erde-Mond-Systems

Wissenschaftler können den Abstand zwischen Erde und Mond mit großer Genauigkeit bestimmen. Dazu lassen sie einen Laserstrahl an speziellen Spiegeln reflektieren, die Astronauten 1969 auf der Mondoberfläche aufgestellt haben, und messen die Laufzeit des Lichts für den Hin- und Rückweg (siehe Abbildung 1).



Abbildung 1. Ein von einer Sternwarte ausgesandter Laserstrahl wird verwendet, um den Abstand zwischen Erde und Mond genau zu messen.

Mit diesen Beobachtungen haben sie direkt gemessen, dass sich der Mond langsam von der Erde entfernt. Das heißt, der Abstand zwischen Erde und Mond nimmt mit der Zeit zu. Dies geschieht, weil die Erde aufgrund von Gezeitendrehmomenten Drehimpuls auf den Mond überträgt, siehe Abbildung 2. In dieser Aufgabe werden Sie die grundlegenden Parameter dieses Phänomens herleiten.

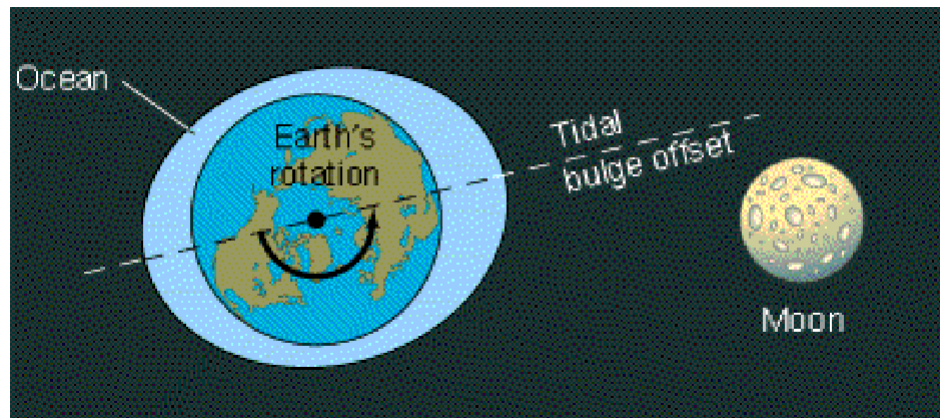


Abbildung 2. Die Gravitation des Mondes erzeugt Gezeitenverformungen oder „Flutberge“ auf der Erde. Wegen der Erdrotation liegt die durch die Flutberge verlaufende Gerade nicht auf der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond. Diese Abweichung erzeugt ein Drehmoment, das Drehimpuls von der Eigenrotation der Erde auf die Bahnbewegung des Mondes überträgt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

1. Drehimpulserhaltung.

Sei L_1 der gegenwärtige Gesamtdrehimpuls des Erde-Mond-Systems. Treffen Sie nun die folgenden Annahmen: i) L_1 ist ausschließlich die Summe der Drehimpulse der Rotation der Erde um ihre Achse und der Bahnbewegung des Mondes um die Erde. ii) Die Mondbahn ist kreisförmig, und der Mond kann als Massenpunkt betrachtet werden. iii) Die Rotationsachse der Erde und die Umlaufachse des Mondes sind parallel. iv) Zur Vereinfachung der Rechnungen nehmen wir an, dass die Bewegung um den Erdmittelpunkt und nicht um den Schwerpunkt erfolgt. In der gesamten Aufgabe sind alle Trägheitsmomente, Drehmomente und Drehimpulse bezüglich der Erdachse definiert. v) Vernachlässigen Sie den Einfluss der Sonne.

Teil	Frage	Punkte
1a	Stellen Sie die Gleichung für den gegenwärtigen Gesamtdrehimpuls des Erde-Mond-Systems auf. Drücken Sie diese Gleichung durch I_E , das Trägheitsmoment der Erde, ω_{E1} , die gegenwärtige Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, I_{M1} , das gegenwärtige Trägheitsmoment des Mondes bezüglich der Erdachse, und ω_{M1} , die gegenwärtige Winkelgeschwindigkeit des Mondumlafs, aus.	0.2

Dieser Prozess der Drehimpulsübertragung endet, wenn die Rotationsperiode der Erde und die Umlaufperiode des Mondes um die Erde gleich lang sind. Dann liegen die vom Mond auf der Erde erzeugten Flutberge auf der Verbindungslinie zwischen Mond und Erde, und das Drehmoment verschwindet.

Teil	Frage	Punkte
1b	Stellen Sie die Gleichung für den Gesamtdrehimpuls L_2 des Erde-Mond-Systems im Endzustand auf. Treffen Sie dieselben Annahmen wie in Frage 1a. Drücken Sie diese Gleichung durch I_E , das Trägheitsmoment der Erde, ω_2 , die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und der Bahnbewegung des Mondes im Endzustand, und I_{M2} , das Trägheitsmoment des Mondes im Endzustand, aus.	0.2

Teil	Frage	Punkte
1c	Vernachlässigen Sie den Beitrag der Erdrotation zum Gesamtdrehimpuls im Endzustand und stellen Sie die Gleichung auf, die die Drehimpulserhaltung für diese Aufgabe ausdrückt.	0.3

2. Abstand und Winkelgeschwindigkeit des Erde-Mond-Systems im Endzustand.

Nehmen Sie an, dass die Gravitationsgleichung für eine Kreisbahn (des Mondes um die Erde) stets gilt. Vernachlässigen Sie den Beitrag der Erdrotation zum Gesamtdrehimpuls im Endzustand.

Teil	Frage	Punkte
2a	Stellen Sie die Gravitationsgleichung für die Kreisbahn des Mondes um die Erde im Endzustand in Abhängigkeit von M_E , ω_2 , G und dem Abstand D_2 zwischen Erde und Mond im Endzustand auf. M_E ist die Masse der Erde und G die Gravitationskonstante.	0.2

Teil	Frage	Punkte
2b	Stellen Sie die Gleichung für den Abstand D_2 zwischen Erde und Mond im Endzustand in Abhängigkeit von den bekannten Parametern L_1 , dem Gesamtdrehimpuls des Systems, M_E und M_M , den Massen der Erde beziehungsweise des Mondes, und G auf.	0.5

Teil	Frage	Punkte
2c	Stellen Sie die Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit ω_2 des Erde-Mond-Systems im Endzustand in Abhängigkeit von den bekannten Parametern L_1 , M_E , M_M und G auf.	0.5

Im Folgenden sollen Sie die Zahlenwerte von D_2 und ω_2 bestimmen. Dazu müssen Sie das Trägheitsmoment der Erde kennen.

Teil	Frage	Punkte
2d	Stellen Sie die Gleichung für das Trägheitsmoment der Erde I_E auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Erde eine Kugel mit der inneren Dichte ρ_i vom Mittelpunkt bis zum Radius r_i und der äußeren Dichte ρ_o vom Radius r_i bis zur Oberfläche beim Radius r_o ist (siehe Abbildung 3).	0.5

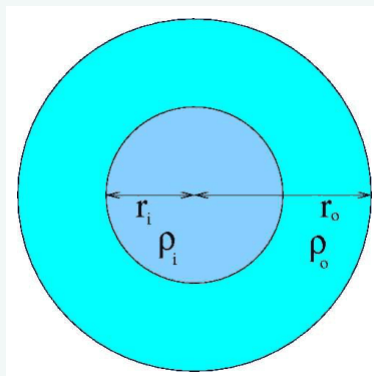


Abbildung 3. Die Erde als Kugel mit zwei Dichten, ρ_i und ρ_o .

Bestimmen Sie die in dieser Aufgabe geforderten Zahlenwerte stets auf *zwei signifikante Stellen*.

Teil	Frage	Punkte
2e	Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Erde I_E mit $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$, $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ und $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.	0.2

Die Massen der Erde und des Mondes betragen $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ beziehungsweise $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$. Der gegenwärtige Abstand zwischen Erde und Mond ist $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$. Die gegenwärtige Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation beträgt $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Die gegenwärtige Winkelgeschwindigkeit der Bahnbewegung des Mondes um die Erde beträgt $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, und die Gravitationskonstante ist $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Teil	Frage	Punkte
2f	Berechnen Sie den Zahlenwert des Gesamtdrehimpulses des Systems, L_1 .	0.2

Teil	Frage	Punkte
2g	Bestimmen Sie den Abstand D_2 im Endzustand in Metern und in Einheiten des gegenwärtigen Abstands D_1 .	0.3

Teil	Frage	Punkte
2h	Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 im Endzustand in s^{-1} sowie die Tageslänge im Endzustand in Einheiten heutiger Tage.	0.3

Überprüfen Sie, dass die Vernachlässigung des Beitrags der Erdrotation zum Gesamtdrehimpuls im Endzustand gerechtfertigt ist, indem Sie das Verhältnis des Drehimpulses der Erde zu dem des Mondes im Endzustand bestimmen. Dieses Verhältnis sollte klein sein.

Teil	Frage	Punkte
2i	Bestimmen Sie das Verhältnis des Drehimpulses der Erde zu dem des Mondes im Endzustand.	0.2

3. Um wie viel entfernt sich der Mond pro Jahr?

Nun werden Sie bestimmen, um wie viel sich der Mond jedes Jahr von der Erde entfernt. Dazu benötigen Sie die Gleichung für das gegenwärtig auf den Mond wirkende Drehmoment. Nehmen Sie an, dass sich die Flutberge durch zwei Massenpunkte mit jeweils der Masse m auf der Erdoberfläche annähern lassen, siehe Abb. 4. Sei θ der Winkel zwischen der durch die Flutberge verlaufenden Geraden und der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten von Erde und Mond.

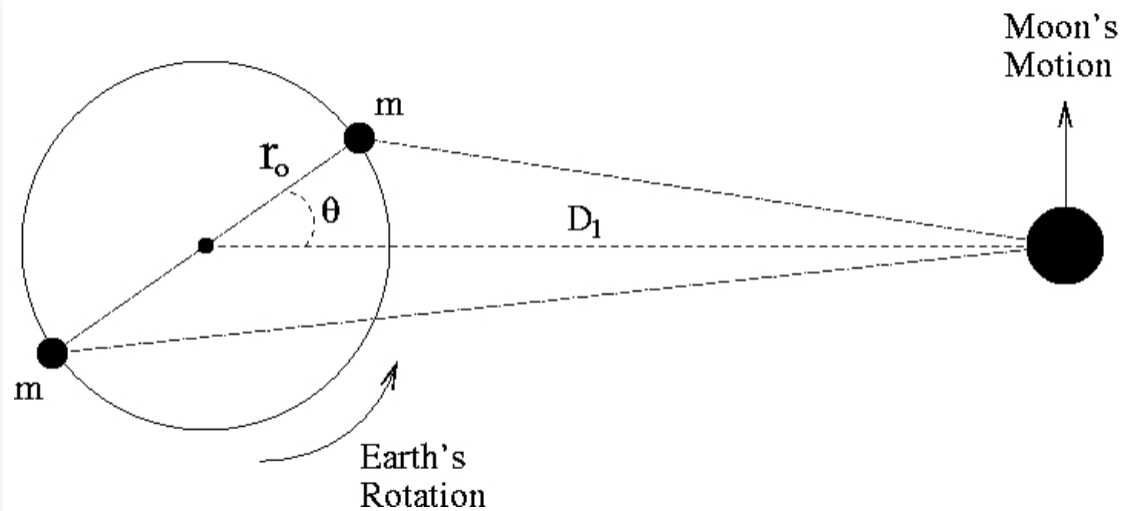


Abbildung 4. Schematische Darstellung zur Abschätzung des Drehmoments, das die Flutberge auf der Erde auf den Mond ausüben. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

Teil	Frage	Punkte
3a	Bestimmen Sie F_c , den Betrag der Kraft, die der nähere Massenpunkt auf den Mond ausübt.	0.4

Teil	Frage	Punkte
3b	Bestimmen Sie F_f , den Betrag der Kraft, die der weiter entfernte Massenpunkt auf den Mond ausübt.	0.4

Nun können Sie die von den Massenpunkten erzeugten Drehmomente bestimmen.

Teil	Frage	Punkte
3c	Bestimmen Sie den Betrag von τ_c , dem vom näheren Massenpunkt erzeugten Drehmoment.	0.4

Teil	Frage	Punkte
3d	Bestimmen Sie den Betrag von τ_f , dem vom weiter entfernten Massenpunkt erzeugten Drehmoment.	0.4

Teil	Frage	Punkte
3e	Bestimmen Sie den Betrag des von den beiden Massen erzeugten Gesamtdrehmoments τ . Da $r_o \ll D_1$, sollen Sie Ihren Ausdruck in der niedrigsten nicht verschwindenden Ordnung in r_o/D_1 annähern. Sie dürfen verwenden, dass $(1+x)^a \approx 1+ax$, wenn $x \ll 1$.	1.0

Teil	Frage	Punkte
3f	Berechnen Sie den Zahlenwert des Gesamtdrehmoments τ unter Berücksichtigung von $\theta = 3^\circ$ und $m = 3.6 \times 10^{16} \text{ kg}$ (beachten Sie, dass diese Masse von der Größenordnung des 10^{-8} -Fachen der Erdmasse ist).	0.5

Da das Drehmoment die zeitliche Änderungsrate des Drehimpulses ist, bestimmen Sie die gegenwärtige Zunahme des Abstands zwischen Erde und Mond pro Jahr. Drücken Sie für diesen Schritt den Drehimpuls des Mondes ausschließlich durch M_M , M_E , D_1 und G aus.

Teil	Frage	Punkte
3g	Bestimmen Sie die gegenwärtige Zunahme des Abstands zwischen Erde und Mond pro Jahr.	1.0

Schätzen Sie schließlich ab, um wie viel die Tageslänge jedes Jahr zunimmt.

Teil	Frage	Punkte
3h	Bestimmen Sie die Abnahme von ω_{E1} pro Jahr und die gegenwärtige jährliche Zunahme der Tageslänge.	1.0

4. Wohin geht die Energie?

Im Gegensatz zum Drehimpuls, der erhalten bleibt, ist die Gesamtenergie (Rotations- und Gravitationsenergie) des Systems nicht erhalten. Dies werden wir in diesem letzten Abschnitt untersuchen.

Teil	Frage	Punkte
4a	Stellen Sie eine Gleichung für die gegenwärtige Gesamtenergie (Rotations- und Gravitationsenergie) des Erde-Mond-Systems, E , auf. Drücken Sie diese Gleichung ausschließlich durch I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 und G aus.	0.4

Teil	Frage	Punkte
4b	Stellen Sie eine Gleichung für die Änderung von E , ΔE , als Funktion der Änderungen von D_1 und ω_{E1} auf. Berechnen Sie den Zahlenwert von ΔE für ein Jahr unter Verwendung der in den Fragen 3g und 3h bestimmten Änderungen von D_1 und ω_{E1} .	0.4

Überprüfen Sie, dass dieser Energieverlust mit einer Abschätzung der Energie übereinstimmt, die bei den vom Mond auf der Erde erzeugten Gezeiten als Wärme dissipiert wird. Nehmen Sie an, dass die Gezeiten eine $h = 0.5$ m tiefe Wasserschicht, die die Erdoberfläche bedeckt, im Mittel um 0,5 m anheben (nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die gesamte Erdoberfläche mit Wasser bedeckt ist). Dies geschieht zweimal täglich. Nehmen Sie ferner an, dass 10 % dieser Gravitationsenergie beim Absinken des Wassers aufgrund der Viskosität als Wärme dissipiert werden. Verwenden Sie für die Dichte des Wassers $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ und für die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Teil	Frage	Punkte
4c	Wie groß ist die Masse dieser oberflächlichen Wasserschicht?	0.2

Teil	Frage	Punkte
4d	Berechnen Sie, wie viel Energie in einem Jahr dissipiert wird. Wie verhält sich dies zur Energie, die das Erde-Mond-System gegenwärtig pro Jahr verliert?	0.3

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Für die Kräfte und Drehmomente der Flutberge definieren wir die Abstände

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

T_1 und T_2 bezeichnen die gegenwärtige Tageslänge beziehungsweise die Tageslänge im Endzustand. Die numerischen Ergebnisse werden auf zwei signifikante Stellen angegeben.

- **1a:** $L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$.
- **1b:** $L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2$.
- **1c:** $I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2$.
- **2a:** $\omega_2^2 D_2^3 = G M_E$.
- **2b:** $D_2 = \frac{L_1^2}{G M_E M_M^2}$.
- **2c:** $\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$.
- **2d:** $I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)]$.
- **2e:** $I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$.
- **2f:** $L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.
- **2g:** $D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4 D_1$.
- **2h:** $\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $T_2/T_1 = 47$.
- **2i:** $\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3}$.
- **3a:** $F_c = \frac{G M_M m}{d_c^2}$.
- **3b:** $F_f = \frac{G M_M m}{d_f^2}$.
- **3c:** $\tau_c = \frac{G M_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3}$.
- **3d:** $\tau_f = \frac{G M_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3}$.
- **3e:** $\tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3 G M_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta)$, in Richtung des Bahndrehimpulses des Mondes.
- **3f:** $\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m}$.
- **3g:** $\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{G M_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1}$.
- **3h:** In einem Jahr gilt $\Delta \omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ und $\Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s}$.
- **4a:** $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{G M_E M_M}{2 D_1}$.
- **4b:** $\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta \omega_{E1} + \frac{G M_E M_M}{2 D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ in einem Jahr.
- **4c:** $M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}$.
- **4d:** $E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}$, in guter Übereinstimmung mit dem Verlust an mechanischer Energie von $9.1 \times 10^{19} \text{ J}$ pro Jahr.

Lösung

Alle Rechnungen verwenden die in der Aufgabenstellung genannten Annahmen. Numerische Ergebnisse werden erst am Ende gerundet. Für jährliche Änderungen setzen wir

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s.}$$

1a. Gegenwärtiger Drehimpuls

Die Eigenrotation der Erde und der Umlauf des Mondes erfolgen im gleichen Drehsinn um parallele Achsen, sodass sich ihre Drehimpulse addieren:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

Da der Mond als Massenpunkt im Abstand D_1 von der Erdachse behandelt wird, gilt

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. Drehimpuls im Endzustand

Im synchronisierten Endzustand sind beide Winkelgeschwindigkeiten gleich ω_2 . Somit gilt

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2, \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. Drehimpulserhaltung

Im angegebenen Modell gibt es kein äußeres Drehmoment. Die Gezeitendrehmomente übertragen Drehimpuls innerhalb des Systems, sodass $L_1 = L_2$ gilt.

Vernachlässigt man nur den Beitrag der Eigenrotation der Erde *im Endzustand*, so erhält man

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.$$

Die gegenwärtige Eigenrotation der Erde muss weiterhin in L_1 berücksichtigt werden.

2a. Kreisbahngleichung

Die Gravitationskraft bewirkt die Zentripetalbeschleunigung des Mondes:

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

Kürzen von M_M ergibt

$$\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.$$

2b. Abstand im Endzustand

Im Rahmen der Näherung aus Teil 1c gilt

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

Mit $\omega_2 = \sqrt{GM_E / D_2^3}$ folgt

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

Quadrieren und Auflösen ergibt

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2c. Winkelgeschwindigkeit im Endzustand

Einsetzen des vorhergehenden Ergebnisses in die Kreisbahngleichung liefert

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

Damit gilt

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. Trägheitsmoment der Erde

Für eine dünne Kugelschale mit Radius r , Dichte ρ und Dicke dr gilt

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm = \frac{8\pi}{3}\rho r^4 dr.$$

Integration über die beiden Dichtebereiche ergibt

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

Somit gilt

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2e. Zahlenwert des Trägheitsmoments

Einsetzen der gegebenen Dichten und Radien ergibt

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

Daraus folgt

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. Gegenwärtiger Gesamtdrehimpuls

Mit den gegebenen gegenwärtigen Winkelgeschwindigkeiten gilt

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

Die beiden Beiträge sind

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Addition mit ungerundeten Zwischenwerten ergibt

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. Zahlenwert des Abstands im Endzustand

Mit Teil 2b und dem ungerundeten Wert von L_1 erhält man

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

Bezogen auf den gegenwärtigen Abstand gilt

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. Winkelgeschwindigkeit und Tageslänge im Endzustand

Aus Teil 2c folgt

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Da eine Rotationsperiode durch $T = 2\pi/\omega$ gegeben ist, gilt

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

Mit ungerundeten Zwischenwerten erhält man

$$T_2 = 47T_1,$$

sodass ein Tag im Endzustand 47 heutige Tage dauert.

2i. Überprüfung der vernachlässigten Eigenrotation im Endzustand

Beide Drehimpulse im Endzustand enthalten dieselbe Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.$$

Der Eigendrehimpuls der Erde im Endzustand beträgt nur 0.36% des Bahndrehimpulses des Mondes, was seine Vernachlässigung rechtfertigt.

3a. Kraft des näheren Flutbergs

Wir wählen den Erdmittelpunkt als Ursprung, setzen den Mond an die Position $(D_1, 0)$ und legen die positive y -Richtung entlang der momentanen Bewegung des Mondes fest. Der nähere Flutberg befindet sich bei

$$(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta).$$

Sein Abstand vom Mond ergibt sich daher aus

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

Das Newtonsche Gravitationsgesetz liefert

$$F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3b. Kraft des weiter entfernten Flutbergs

Der weiter entfernte Flutberg befindet sich bei

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

Folglich gilt

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

und

$$F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3c. Drehmoment des näheren Flutbergs

Nur die Kraftkomponente senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Erde und Mond trägt zum Drehmoment bezüglich der Erdachse bei. Für den näheren Flutberg gilt

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

Sein Drehmoment ist positiv und zeigt in Richtung des Bahndrehimpulses des Mondes:

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

Sein Betrag ist somit

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3d. Drehmoment des weiter entfernten Flutbergs

Der weiter entfernte Flutberg zieht den Mond in die negative y -Richtung:

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

Sein Drehmoment ist dem Drehmoment des näheren Flutbergs entgegengesetzt. Sein Betrag ist

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3e. Gesamtdrehmoment in der niedrigsten nicht verschwindenden Ordnung

Da $d_c < d_f$, erzeugt der nähere Flutberg das größere Drehmoment. Für die dargestellte Geometrie gilt

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

Wir definieren $\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

und

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

Die Terme nullter Ordnung heben sich auf, sodass

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

Damit folgt

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

Dieses Drehmoment vergrößert den Bahndrehimpuls des Mondes.

3f. Zahlenwert des Drehmoments

Mit $\theta = 3^\circ$ gilt

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

Daraus folgt

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m.}$$

3g. Gegenwärtige Entfernung des Mondes von der Erde

Für eine Kreisbahn im Abstand D gilt

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

sodass der Drehimpuls des Mondes gegeben ist durch

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

Beim gegenwärtigen Abstand gilt somit

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

Die Zunahme innerhalb eines Jahres ist

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

woraus folgt

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{in einem Jahr.}$$

3h. Verlangsamung der Erdrotation und Zunahme der Tageslänge

Das Drehmoment auf die Erde ist dem Drehmoment auf den Mond entgegengesetzt. Bei konstantem I_E gilt

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

Daher gilt

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

und die Änderung innerhalb eines Jahres ist

$$\Delta\omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

Da $T_E = 2\pi/\omega_E$, gilt für eine kleine Änderung

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta\omega_E.$$

Folglich erhält man

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi\tau t_{\text{yr}}}{I_E\omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{in einem Jahr.}$$

Der Tag verlängert sich um ungefähr $19 \mu\text{s}$ pro Jahr.

4a. Gegenwärtige mechanische Energie

Die mechanische Energie setzt sich aus der Rotationsenergie der Erde, der kinetischen Energie der Bahnbewegung des Mondes und ihrer gravitativen potenziellen Energie zusammen:

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 - \frac{G M_E M_M}{D_1}.$$

Die Kreisbahnbeziehung liefert

$$\frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 = \frac{G M_E M_M}{2 D_1}.$$

Daraus folgt

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{G M_E M_M}{2 D_1}.$$

4b. Jährliche Änderung der mechanischen Energie

Für Änderungen $\Delta\omega_{E1}$ und ΔD_1 ist die exakte Differenz innerhalb dieses Energiemodells

$$\Delta E = \frac{1}{2} I_E [(\omega_{E1} + \Delta\omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{G M_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

Die jährlichen relativen Änderungen sind äußerst klein, sodass die Beschränkung auf Terme erster Ordnung ergibt

$$\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{G M_E M_M}{2 D_1^2} \Delta D_1.$$

Der erste Term ist negativ: Die Erde verliert Rotationsenergie. Der zweite ist positiv: Die Bahnenergie des Mondes nimmt zu, während sich seine Bahn ausweitet.

Einsetzen der jährlichen Änderungen aus den Teilen 3g und 3h unter Beibehaltung ihrer ungerundeten Werte ergibt

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J} \quad \text{in einem Jahr.}$$

Die Energiebilanz lässt sich auch direkt durch das Drehmoment ausdrücken:

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau \omega_{E1}.$$

Mit der Formel für die Abstandszunahme gilt

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \dot{D}_1 = \tau \sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

Somit gilt

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

wobei ω_{M1} durch die Kreisbahnbeziehung bestimmt ist. Da sich die Erde schneller dreht, als der Mond sie umläuft, nimmt die mechanische Energie ab; die Differenz wird in Wärme umgewandelt.

4c. Masse der Wasserschicht

Da die Schicht im Vergleich zum Erdradius sehr dünn ist, ist ihr Volumen gleich ihrer Oberfläche mal ihrer Dicke:

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

Daher gilt

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5) (10^3) \text{ kg}.$$

Daraus folgt

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

4d. Jährliche Dissipation als Wärme

Die angegebene mittlere Anhebung beträgt $H = 0.5 \text{ m}$. Die bei einer Anhebung von der Schicht gewonnene Gravitationsenergie ist

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

Zehn Prozent werden beim anschließenden Absinken als Wärme dissipiert. Bei zwei Zyklen pro Tag gibt es 2×365 Zyklen pro Jahr:

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10 (2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

Einsetzen ergibt

$$E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}.$$

Dies stimmt gut mit dem Verlust an mechanischer Energie

$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

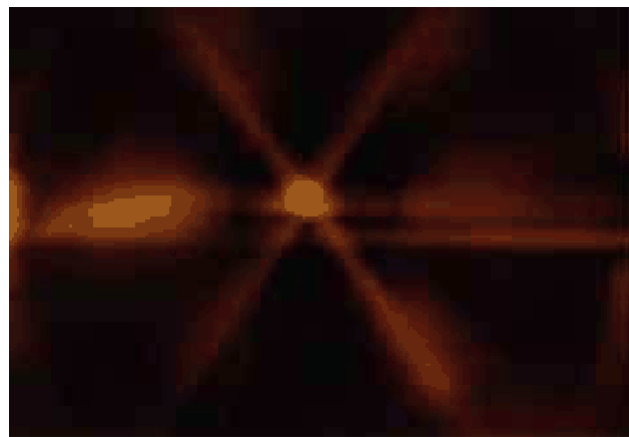
aus Teil 4b überein. Im Rahmen des vereinfachten Modells erklärt die Gezeitendissipation den Verlust an mechanischer Energie durch deren Umwandlung in Wärme.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Doppler-Laserkühlung und optische Melasse

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine einfache Theorie zum Verständnis der sogenannten „Laserkühlung“ und „optischen Melasse“ zu entwickeln. Dabei geht es um die Kühlung eines Strahls neutraler Atome, typischerweise Alkaliatome, durch gegenläufige Laserstrahlen gleicher

Frequenz. Dies ist Teil der Arbeiten, für die S. Chu, P. Phillips und C. Cohen-Tannoudji 1997 den Nobelpreis für Physik erhielten.



Das obige Bild zeigt Natriumatome (den hellen Fleck in der Mitte), die am Schnittpunkt dreier zueinander senkrechter Paare gegenläufiger Laserstrahlen eingefangen sind. Der Bereich, in dem die Atome eingefangen sind, wird als „optische Melasse“ bezeichnet, weil die dissipative optische Kraft der viskosen Widerstandskraft auf einen Körper ähnelt, der sich durch Melasse bewegt.

In dieser Aufgabe untersuchen Sie das grundlegende Phänomen der Wechselwirkung zwischen einem auf ein Atom treffenden Photon und dem Atom sowie die Grundlage des dissipativen Mechanismus in einer Dimension.

TEIL I: GRUNDLAGEN DER LASERKÜHLUNG

Betrachten Sie ein Atom der Masse m , das sich mit der Geschwindigkeit v in $+x$ -Richtung bewegt. Der Einfachheit halber betrachten wir das Problem als eindimensional, vernachlässigen also die y - und z -Richtungen (siehe Abbildung 1). Das Atom besitzt zwei innere Energieniveaus. Die Energie des niedrigsten Zustands wird gleich null gesetzt, die Energie des angeregten Zustands gleich $\hbar\omega_0$, wobei $\hbar = h/2\pi$. Das Atom befindet sich anfangs im niedrigsten Zustand. Ein Laserstrahl mit der Frequenz ω_L im Laborsystem ist in $-x$ -Richtung gerichtet und trifft auf das Atom. Quantenmechanisch besteht der Laserstrahl aus einer großen Anzahl von Photonen, die jeweils die Energie $\hbar\omega_L$ und den Impuls $-\hbar q$ besitzen. Ein Photon kann vom Atom absorbiert und später spontan emittiert werden; diese Emission kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit in $+x$ - oder $-x$ -Richtung erfolgen. Da sich das Atom mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten bewegt, $v/c \ll 1$ (wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist), berücksichtigen Sie nur Terme bis zur ersten Ordnung in dieser Größe. Nehmen Sie außerdem $\hbar q/mv \ll 1$ an, also dass der Impuls des Atoms viel größer als der Impuls eines einzelnen Photons ist. Behalten Sie in Ihren Antworten nur Korrekturen bei, die in einer der beiden obigen Größen linear sind.

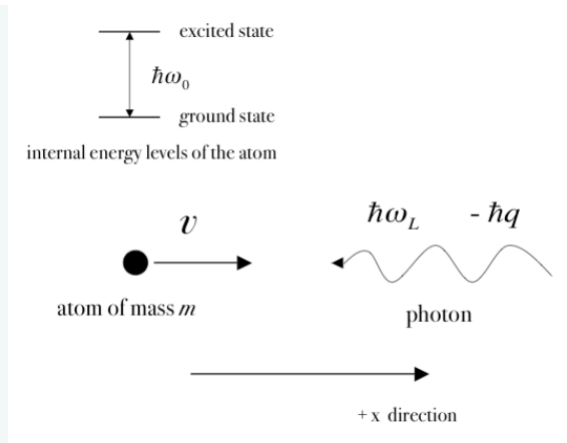


Abb.1 Skizze eines Atoms der Masse m mit der Geschwindigkeit v in $+x$ -Richtung, das mit einem Photon der Energie $\hbar\omega_L$ und des Impulses $-\hbar q$ zusammenstößt. Das Atom besitzt zwei innere Zustände mit der Energiedifferenz $\hbar\omega_0$.

Nehmen Sie an, dass die Laserfrequenz ω_L so abgestimmt ist, dass sie aus Sicht des bewegten Atoms mit dessen innerem Übergang in Resonanz ist. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Absorption.

1a	Geben Sie die Resonanzbedingung für die Absorption des Photons an.	0.2
1b	Geben Sie den Impuls p_{at} des Atoms nach der Absorption im Laborsystem an.	0.2
1c	Geben Sie die Gesamtenergie ε_{at} des Atoms nach der Absorption im Laborsystem an.	0.2

2. Spontane Emission eines Photons in $-x$ -Richtung.

Einige Zeit nach der Absorption des einfallenden Photons kann das Atom ein Photon in $-x$ -Richtung emittieren.

2a	Geben Sie die Energie des emittierten Photons, ε_{ph} , nach dem Emissionsvorgang in $-x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
2b	Geben Sie den Impuls des emittierten Photons p_{ph} nach dem Emissionsvorgang in $-x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
2c	Geben Sie den Impuls des Atoms p_{at} nach dem Emissionsvorgang in $-x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
2d	Geben Sie die Gesamtenergie des Atoms ε_{at} nach dem Emissionsvorgang in $-x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2

3. Spontane Emission eines Photons in $+x$ -Richtung.

Einige Zeit nach der Absorption des einfallenden Photons kann das Atom stattdessen ein Photon in $+x$ -Richtung emittieren.

3a	Geben Sie die Energie des emittierten Photons, ε_{ph} , nach dem Emissionsvorgang in $+x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
3b	Geben Sie den Impuls des emittierten Photons p_{ph} nach dem Emissionsvorgang in $+x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
3c	Geben Sie den Impuls des Atoms p_{at} nach dem Emissionsvorgang in $+x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2

3d	Geben Sie die Gesamtenergie des Atoms ε_{at} nach dem Emissionsvorgang in $+x$ -Richtung im Laborsystem an.	0.2
----	---	-----

4. Mittelwerte der Emission nach der Absorption.

Die spontane Emission eines Photons in $-x$ - oder $+x$ -Richtung erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Beantworten Sie unter Berücksichtigung dieser Tatsache die folgenden Fragen.

4a	Geben Sie die mittlere Energie eines emittierten Photons, ε_{ph} , nach dem Emissionsvorgang an.	0.2
4b	Geben Sie den mittleren Impuls eines emittierten Photons p_{ph} nach dem Emissionsvorgang an.	0.2
4c	Geben Sie die mittlere Gesamtenergie des Atoms ε_{at} nach dem Emissionsvorgang an.	0.2
4d	Geben Sie den mittleren Impuls des Atoms p_{at} nach dem Emissionsvorgang an.	0.2

5. Energie- und Impulsübertragung.

Betrachtet man nur einen vollständigen Absorptions-Emissions-Prozess eines einzelnen Photons wie oben beschrieben, so ergibt sich im Mittel eine Nettoübertragung von Impuls und Energie zwischen der Laserstrahlung und dem Atom.

5a	Geben Sie die mittlere Energieänderung $\Delta\varepsilon$ des Atoms nach einem vollständigen Absorptions-Emissions-Prozess eines einzelnen Photons an.	0.2
5b	Geben Sie die mittlere Impulsänderung Δp des Atoms nach einem vollständigen Absorptions-Emissions-Prozess eines einzelnen Photons an.	0.2

6. Energie- und Impulsübertragung durch einen Laserstrahl in $+x$ -Richtung.

Betrachten Sie nun einen Laserstrahl der Frequenz ω'_L , der in $+x$ -Richtung auf das Atom trifft, während sich das Atom ebenfalls mit der Geschwindigkeit v in $+x$ -Richtung bewegt. Beantworten Sie die folgenden Fragen unter der Annahme, dass aus Sicht des Atoms die Resonanzbedingung zwischen seinem inneren Übergang und dem Laserstrahl erfüllt ist:

6a	Geben Sie die mittlere Energieänderung $\Delta\varepsilon$ des Atoms nach einem vollständigen Absorptions-Emissions-Prozess eines einzelnen Photons an.	0.3
6b	Geben Sie die mittlere Impulsänderung Δp des Atoms nach einem vollständigen Absorptions-Emissions-Prozess eines einzelnen Photons an.	0.3

TEIL II: DISSIPATION UND GRUNDLAGEN DER OPTISCHEN MELASSE

Die Natur bringt jedoch eine inhärente Unschärfe in Quantenprozessen mit sich. So hat die Tatsache, dass das Atom ein Photon innerhalb einer *endlichen Zeit* nach der Absorption spontan emittieren kann, zur Folge, dass die Resonanzbedingung nicht wie in der obigen Betrachtung *exakt* erfüllt sein muss. Das heißt, die Frequenzen der Laserstrahlen ω_L und ω'_L können beliebige Werte annehmen, und der Absorptions-Emissions-Prozess kann dennoch stattfinden. Diese Prozesse treten mit unterschiedlichen (quantenmechanischen) Wahrscheinlichkeiten auf, wobei erwartungsgemäß die größte Wahrscheinlichkeit bei exakter Erfüllung der Resonanzbedingung vorliegt. Die im Mittel zwischen der Absorption und der Emission bei einem einzelnen Prozess verstrichene Zeit heißt Lebensdauer des angeregten Energieniveaus des Atoms und wird mit Γ^{-1} bezeichnet.

Betrachten Sie eine Ansammlung von N Atomen, die im Laborsystem *ruhen*, und einen auf sie einfallenden Laserstrahl der Frequenz ω_L . Die Atome absorbieren und emittieren fortlaufend, sodass sich im Mittel N_{exc} Atome im angeregten Zustand befinden (und somit $N - N_{exc}$ Atome im Grundzustand). Eine quantenmechanische Rechnung liefert das folgende Ergebnis:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

Dabei ist ω_0 die Resonanzfrequenz des atomaren Übergangs und Ω_R die sogenannte Rabi-Frequenz; Ω_R^2 ist proportional zur *Intensität* des Laserstrahls. Wie oben erwähnt, erkennen Sie, dass diese Zahl auch dann von null verschieden ist, wenn die Resonanzfrequenz ω_0 von der Frequenz des Laserstrahls ω_L abweicht. Das vorherige Ergebnis lässt sich auch so ausdrücken, dass die Anzahl der Absorptions-Emissions-Prozesse pro Zeiteinheit $N_{exc}\Gamma$ beträgt.

Betrachten Sie die in Abbildung 2 dargestellte physikalische Situation, in der zwei gegenläufige Laserstrahlen mit *gleicher*, aber *beliebiger* Frequenz ω_L auf ein Gas aus N Atomen treffen, die sich mit der Geschwindigkeit v in $+x$ -Richtung bewegen.

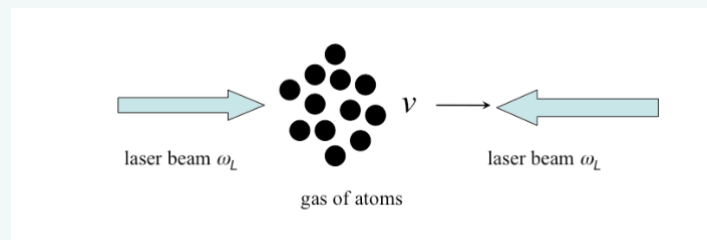


Abbildung 2. Zwei gegenläufige Laserstrahlen mit *gleicher*, aber *beliebiger* Frequenz ω_L treffen auf ein Gas aus N Atomen, die sich mit der Geschwindigkeit v in $+x$ -Richtung bewegen.

7. Kraft der Laser auf den Atomstrahl.

7a	Bestimmen Sie mithilfe der bisher gewonnenen Erkenntnisse die Kraft, welche die Laser auf den Atomstrahl ausüben. Nehmen Sie dabei $mv \gg \hbar q$ an.	1.5
----	---	-----

8. Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten.

Nehmen Sie nun an, dass die Geschwindigkeit der Atome so klein ist, dass Sie die Kraft bis zur ersten Ordnung in v entwickeln können.

8a	Bestimmen Sie in diesem Grenzfall einen Ausdruck für die in Frage (7a) ermittelte Kraft.	1.5
----	--	-----

Mithilfe dieses Ergebnisses können Sie die Bedingungen bestimmen, unter denen die Laserstrahlung die Atome beschleunigt, abbremst oder überhaupt nicht beeinflusst.

8b	Geben Sie die Bedingung für eine positive Kraft an (Beschleunigung der Atome).	0.25
8c	Geben Sie die Bedingung für eine verschwindende Kraft an.	0.25
8d	Geben Sie die Bedingung für eine negative Kraft an (Abbremsung der Atome).	0.25
8e	Betrachten Sie nun Atome, die sich mit der Geschwindigkeit $-v$ (in $-x$ -Richtung) bewegen. Geben Sie die Bedingung für eine die Atome abbremsende Kraft an.	0.25

9. Optische Melasse.

Im Fall einer negativen Kraft erhält man eine dissipative Reibungskraft. Nehmen Sie an, dass das Gas aus Atomen anfangs, bei $t = 0$, die Geschwindigkeit v_0 besitzt.

9a	Bestimmen Sie im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit der Atome, nachdem die Laserstrahlen für eine Zeit τ eingeschaltet waren.	1.5
9b	Nehmen Sie nun an, dass sich das Gas aus Atomen bei einer Temperatur T_0 im thermischen Gleichgewicht befindet. Bestimmen Sie die Temperatur T , nachdem die Laserstrahlen für eine Zeit τ eingeschaltet waren.	0.5

Dieses Modell erlaubt es nicht, beliebig niedrige Temperaturen zu erreichen.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir definieren

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Für Teil II definieren wir

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

Für die beiden Strahlen wird derselbe Wert von Ω_R angenommen.

Bei den nachfolgenden Photonengrößen wird die erste Doppler-Korrektur beibehalten. Bei den atomaren Größen wird die führende Rückstoßkorrektur beibehalten, während Produkte aus v/c und $\hbar q/(mv)$ vernachlässigt werden. Die kleinen Impulskorrekturen vor dieser Beschränkung werden in der Lösung angegeben. Bei den atomaren Energien wird die konstante Ruheenergie weggelassen.

- **1a:** $\omega_L(1 + \beta) = \omega_0$, äquivalent dazu $\omega_L + qv = \omega_0$.
- **1b:** $p_{at} = mv - \hbar q$.
- **1c:** $\varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv$.
- **2a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L$.
- **2b:** $p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q$.
- **2c:** $p_{at} = mv$.
- **2d:** $\varepsilon_{at} = K$.
- **3a:** $\varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)$.
- **3b:** $p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)$.
- **3c:** $p_{at} \simeq mv - 2\hbar q$.
- **3d:** $\varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv$.
- **4a:** $\langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0$.
- **4b:** $\langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta$.
- **4c:** $\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv$.

- **4d:** $\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q$.
- **5a:** $\Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv$.
- **5b:** $\Delta p \simeq -\hbar q$.
- **6a:** $\Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v$.
- **6b:** $\Delta p \simeq +\hbar q'$.
- **7a:**

$$F(v) = N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

- **8a:**

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2\Gamma\Omega_R^2(\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

- **8b:** $\omega_L > \omega_0$.
- **8c:** $\omega_L = \omega_0$.
- **8d:** $\omega_L < \omega_0$.
- **8e:** $\omega_L < \omega_0$; die Kraft zeigt dann in $+x$ -Richtung.
- **9a:** $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$, mit $\alpha > 0$.
- **9b:** $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$.

Lösung

Aus der Energie-Impuls-Beziehung des Photons folgt

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

Wir schreiben die beiden kleinen Parameter als

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

Die Rückstoßenergie $(\hbar q)^2/(2m)$ ist relativ zur anfänglichen kinetischen Energie des Atoms quadratisch in η und wird daher vernachlässigt. Die Änderung der Atomgeschwindigkeit infolge der Absorption beträgt $-\hbar q/m$; ihr Beitrag zu einem Doppler-Faktor ist

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

und wird ebenfalls vernachlässigt.

Bei der Berechnung der Frequenzen emittierter Photonen kann dem emittierenden Atom somit die Geschwindigkeit v zugeordnet werden. Impulskorrekturen der Ordnung $\hbar q\beta = mv\eta\beta$ werden angegeben, wo dies hilfreich ist, in den Ergebnissen für den führenden atomaren Rückstoß jedoch weggelassen.

1a. Resonanzbedingung

Für ein Photon, das sich in $-x$ -Richtung ausbreitet, ist die von einem in $+x$ -Richtung bewegten Atom gemessene Frequenz in erster Ordnung

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

Resonanz erfordert, dass diese Frequenz gleich ω_0 ist:

$$\boxed{\omega_L + qv = \omega_0}, \quad \boxed{\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0}.$$

Dies folgt auch aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

Vernachlässigt man die Rückstoßenergie, erhält man dieselbe Bedingung.

1b. Impuls des Atoms nach der Absorption

Aus der Impulserhaltung folgt

$$\boxed{p_{\text{at}} = mv - \hbar q}.$$

1c. Energie des Atoms nach der Absorption

Das Atom nimmt die Energie des einfallenden Photons auf:

$$\boxed{\varepsilon_{\text{at}} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L}.$$

Gleichwertig ergibt sich durch Addition seiner kinetischen und inneren Energie

$$\varepsilon_{\text{at}} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \boxed{\frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0}.$$

Aufgrund der Resonanzbedingung sind diese Ausdrücke bis zur berücksichtigten Ordnung gleich.

Für die Fragen zur Emission bezeichne $s = +1$ ein in $+x$ -Richtung emittiertes Photon und $s = -1$ ein in $-x$ -Richtung emittiertes Photon. Vernachlässigt man den Rückstoß in der Übergangsfrequenz, so ist seine Energie im Ruhesystem des emittierenden Atoms $\hbar\omega_0$. Die Doppler-Transformation erster Ordnung ergibt

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + s\beta).$$

2a. Photonenenergie bei Emission in $-x$ -Richtung

Mit $s = -1$ folgt

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta)}.$$

Da

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

ergibt sich

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L}.$$

2b. Photonenimpuls bei Emission in $-x$ -Richtung

Mit $p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$ folgt

$$p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q.$$

2c. Impuls des Atoms nach der Emission in $-x$ -Richtung

Die Impulserhaltung für den vollständigen Prozess ergibt

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

Daher gilt

$$p_{at}^{(-)} = mv.$$

2d. Energie des Atoms nach der Emission in $-x$ -Richtung

Das emittierte Photon trägt die Energie fort, die das absorbierte Photon zugeführt hat:

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

Somit gilt

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3a. Photonenenergie bei Emission in $+x$ -Richtung

Für $s = +1$ gilt

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta).$$

Mit $\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$ folgt

$$\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta).$$

3b. Photonenimpuls bei Emission in $+x$ -Richtung

Der Impuls ist positiv:

$$p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

3c. Impuls des Atoms nach der Emission in $+x$ -Richtung

Die Impulserhaltung ergibt, wenn die Doppler-Korrektur des Photons vorübergehend beibehalten wird,

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

Der letzte Term hat im atomaren Impuls die relative Ordnung $\eta\beta$. Unter Vernachlässigung dieser gemischten Korrektur folgt

$$p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q.$$

3d. Energie des Atoms nach der Emission in $+x$ -Richtung

Das Atom kehrt in seinen Grundzustand zurück. Die Energieerhaltung ergibt

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\
&\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\
&= K - 2\hbar\omega_0\beta.
\end{aligned}$$

Mit der für die atomaren Größen beibehaltenen Genauigkeit gilt

$$\boxed{\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv}.$$

Dies folgt auch durch Ausmultiplizieren von

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

und Vernachlässigen des quadratischen Rückstoßterms.

4a. Mittlere Energie des emittierten Photons

Die beiden Richtungen sind gleich wahrscheinlich:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 - \beta) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 + \beta) \\
&= \boxed{\hbar\omega_0}.
\end{aligned}$$

4b. Mittlerer Impuls des emittierten Photons

Die Mittelung der vorzeichenbehafteten Impulse ergibt

$$\begin{aligned}
\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) + \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \right] \\
&= \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q \beta}.
\end{aligned}$$

Obwohl die Richtungen gleich wahrscheinlich sind, unterscheiden sich die beiden Photonenenergien im Laborsystem. Ihr mittlerer Impuls im Laborsystem ist daher klein und positiv.

Relativ zum Impuls des Atoms hat dieser Mittelwert die Ordnung

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta\beta.$$

Er wird deshalb bei den nachfolgenden führenden Änderungen des atomaren Impulses vernachlässigt.

4c. Mittlere Energie des Atoms

Mit den Ergebnissen aus 2d und 3d gilt

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}(K - 2\hbar qv).$$

Daraus folgt

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv}.$$

Gleichwertig gilt

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0.$$

4d. Mittlerer Impuls des Atoms

Vor dem Vernachlässigen der gemischten Korrektur ergibt die Impulserhaltung

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}.$$

Somit gilt in der geforderten führenden Ordnung des atomaren Rückstoßes

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. Mittlere Energieänderung des Atoms

Durch Subtraktion der Anfangsenergie ergibt sich

$$\Delta \varepsilon = \langle \varepsilon_{at} \rangle - K = \hbar(\omega_L - \omega_0).$$

Die Resonanzbedingung liefert

$$\boxed{\Delta \varepsilon = -\frac{\hbar \omega_0 v}{c} \simeq -\hbar q v}.$$

Das emittierte Photon hat im Mittel mehr Energie als das absorbierte Photon. Diese Differenz stammt aus der kinetischen Energie des Atoms.

5b. Mittlere Impulsänderung des Atoms

Subtraktion des Anfangsimpulses vom Ergebnis aus 4d ergibt

$$\boxed{\Delta p \simeq -\hbar q}.$$

Die kleinere Korrektur vor der Beschränkung auf die führende Ordnung lautet

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar \omega_0 v}{c^2}.$$

In führender Rückstoßordnung erfüllen die Energie- und Impulsänderungen die Beziehung

$$\Delta \varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. Energieänderung für einen in $+x$ -Richtung laufenden Laserstrahl

Das Atom bewegt sich nun vom einfallenden Licht weg. Die Resonanzbedingung lautet

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

also

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

Die mittlere Energie des emittierten Photons bleibt $\hbar \omega_0$. Daher gilt

$$\Delta \varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \boxed{\frac{\hbar \omega_0 v}{c}} \simeq \boxed{\hbar q' v}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

Das Atom gewinnt kinetische Energie.

6b. Impulsänderung für einen in $+x$ -Richtung laufenden Laserstrahl

Das absorbierte Photon führt den Impuls $+\hbar q'$ zu. Folglich gilt

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar \omega_0 v}{c^2} \simeq \boxed{+\hbar q'}.$$

Der vernachlässigte zweite Term ist wiederum eine gemischte Doppler-Rückstoßkorrektur des atomaren Impulses.

7a. Kraft durch die beiden Laserstrahlen

Wir wenden das angegebene Streugesetz getrennt auf die beiden Strahlen an und nehmen an, dass ihre Intensitäten und damit ihre Rabi-Frequenzen gleich sind.

Mit $+$ bezeichnen wir den in $+x$ -Richtung laufenden Strahl und mit $-$ den in $-x$ -Richtung laufenden Strahl. Die von den bewegten Atomen wahrgenommenen Frequenzen sind

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

Ihre Verstimmungen gegenüber dem atomaren Übergang sind somit

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

Die Gesamtzahlen der Streueignisse pro Zeiteinheit betragen

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$

$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

In führender Rückstoßordnung überträgt jedes Ereignis den Impuls $+\hbar q$ beziehungsweise $-\hbar q$. Daher gilt

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

woraus folgt

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

Dies ist die Kraft auf alle N Atome. Die Kraft auf ein einzelnes Atom ist F/N .

Die Doppler-Verschiebung qv wird in den Streuwahrscheinlichkeiten beibehalten: Sie kann im Vergleich zur Linienbreite des Übergangs bedeutend sein, selbst wenn v/c sehr klein ist.

8a. Entwicklung für kleine Geschwindigkeiten

Wir setzen

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

Für hinreichend kleines qv gilt

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

Beispielsweise ist $|qv| \ll \sqrt{D}$ eine hinreichende Bedingung für kleine Geschwindigkeiten.

Subtrahieren der beiden Entwicklungen ergibt

$$F(v) \simeq N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

Daraus folgt

$$F(v) \simeq -N\alpha v, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

Der Koeffizient α hat die Einheit Masse pro Zeit, sodass αv die Einheit einer Kraft hat.

8b. Positive Kraft

Für $v > 0$ sind alle Faktoren in α außer Δ positiv. Eine positive Kraft erfordert

$$\Delta < 0.$$

Daher gilt

$$\boxed{\omega_L > \omega_0}.$$

Dies ist eine Blauverstimmung.

8c. Verschwindende Kraft

Für eine von null verschiedene Intensität und ein bewegtes Atom lautet die Bedingung an die Verstimmung

$$\Delta = 0,$$

oder

$$\boxed{\omega_L = \omega_0}.$$

Die beiden Streuraten sind dann gleich. Unabhängig davon ergibt sich aus der Symmetrie auch bei $v = 0$ eine verschwindende Kraft.

8d. Negative Kraft

Für $v > 0$ erfordert eine negative Kraft $\alpha < 0$, also

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

Dies ist eine Rotverstimmung. Der entgegenlaufende Strahl wird durch den Doppler-Effekt näher an die Resonanz verschoben und stärker gestreut.

8e. Abbremsen von Atomen, die sich in $-x$ -Richtung bewegen

Für die Geschwindigkeit $-v$ mit $v > 0$ gilt

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

Das Abbremsen erfordert eine Kraft in $+x$ -Richtung, also wiederum $\alpha > 0$. Somit gilt

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

Eine Rotverstimmung erzeugt eine Kraft, die der Bewegung in beiden Richtungen entgegenwirkt.

9a. Geschwindigkeit nach der Zeit τ

Bei Rotverstimmung gilt $\alpha > 0$. Das Gas hat die Gesamtmasse Nm , sodass das zweite Newtonsche Gesetz ergibt

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

Der Faktor N kürzt sich heraus:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v.$$

Integration mit $v(0) = v_0$ ergibt

$$\boxed{v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}}.$$

Explizit gilt

$$v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Die Abklingzeit der Geschwindigkeit beträgt m/α .

9b. Temperatur nach der Zeit τ

In diesem deterministischen Reibungsmodell wird jede Atomgeschwindigkeit mit folgendem Faktor multipliziert:

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

Daher wird die Varianz der Geschwindigkeiten mit folgendem Faktor multipliziert:

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Für eine eindimensionale thermische Bewegung gilt

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

Folglich gilt

$$T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}.$$

Explizit gilt

$$T(\tau) = T_0 \exp \left[-\frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

Dieser exponentielle Verlauf kann nicht zu beliebig niedrigen Temperaturen extrapoliert werden. In der Rechnung wurden quadratische Rückstoßbeiträge und die durch zufällige Streuereignisse verursachten Fluktuationen vernachlässigt. Insbesondere erfordert die Annahme $mv \gg \hbar q$, angewandt auf eine typische thermische Geschwindigkeit,

$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

Wenn die Atome abkühlen, werden die in diesem Modell vernachlässigten Terme relevant.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Warum sind Sterne so groß?

Sterne sind Kugeln aus heißem Gas. Die meisten von ihnen leuchten, weil in ihrem Inneren Wasserstoff zu Helium fusioniert. In dieser Aufgabe verwenden wir Konzepte sowohl der klassischen Mechanik als auch der Quantenmechanik sowie der Elektrostatik und Thermodynamik, um zu verstehen, warum Sterne groß genug sein müssen, damit dieser Fusionsprozess stattfinden kann. Außerdem leiten wir die Masse und den Radius des kleinsten Sterns her, der Wasserstoff fusionieren kann.

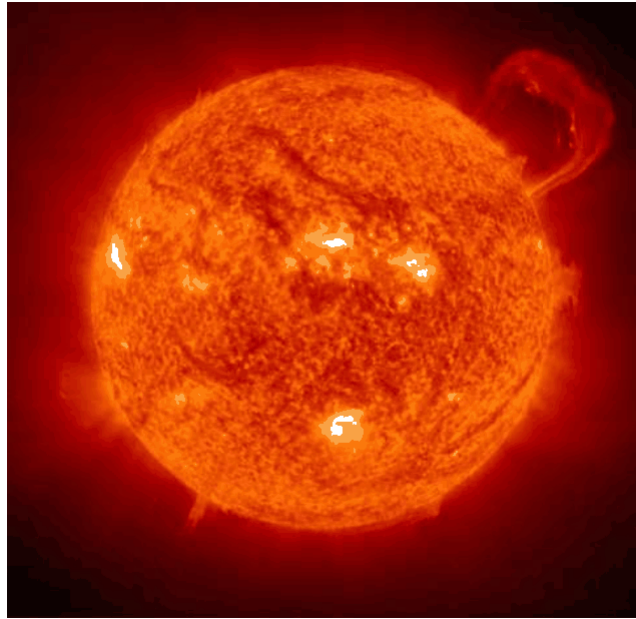


Abbildung 1. Unsere Sonne leuchtet wie die meisten Sterne infolge der thermonuklearen Fusion von Wasserstoff zu Helium in ihrem Inneren.

NÜTZLICHE KONSTANTEN
Gravitationskonstante = $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (Druckfehler im offiziellen Aufgabentext: s^2 statt s^{-2})
Boltzmann-Konstante = $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum = $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
Masse des Protons = $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse des Elektrons = $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Elementarladung = $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektrische Feldkonstante (Permittivität des Vakuums) = $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Radius der Sonne = $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
Masse der Sonne = $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

1. Eine klassische Abschätzung der Temperatur im Zentrum von Sternen.

Nehmen Sie an, dass das Gas, aus dem der Stern besteht, reiner ionisierter Wasserstoff ist (Elektronen und Protonen in gleicher Anzahl) und sich wie ein ideales Gas verhält. Aus klassischer Sicht müssen sich zwei Protonen auf 10^{-15} m annähern, um zu fusionieren, damit die kurzreichweitige, anziehende starke Kernkraft überwiegt. Um einander so nahe zu kommen, müssen sie jedoch zunächst die abstoßende Wirkung der Coulomb-Kraft überwinden. Nehmen Sie im klassischen Modell an, dass sich die beiden Protonen (als punktförmige Quellen betrachtet) bei einem eindimensionalen Frontalstoß antiparallel bewegen, jeweils mit der Geschwindigkeit v_{rms} , der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit (rms-Geschwindigkeit) der Protonen.

1a	Wie groß muss die Temperatur des Gases, T_c , sein, damit der kleinste Abstand der Protonen, d_c , gleich 10^{-15} m ist? Geben Sie diesen und alle weiteren Zahlenwerte in dieser Aufgabe mit zwei signifikanten Stellen an.	1.5
----	---	-----

2. Feststellung, dass die vorherige Temperaturabschätzung falsch ist.

Um zu prüfen, ob die vorherige Temperaturabschätzung plausibel ist, benötigt man eine unabhängige Methode zur Abschätzung der Zentraltemperatur eines Sterns. Der Aufbau von Sternen ist sehr kompliziert, doch mit einigen Annahmen können wir wesentliche Erkenntnisse gewinnen. Sterne befinden sich im Gleichgewicht, das heißt, sie dehnen sich weder aus noch ziehen sie sich zusammen, weil die nach innen gerichtete Gravitationskraft durch die nach außen gerichtete Druckkraft ausgeglichen wird (siehe Abbildung 2). Für eine Gasschicht in einem gegebenen Abstand r vom Zentrum des Sterns lautet die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

wobei P der Gasdruck, G die Gravitationskonstante, M_r die Masse des Sterns innerhalb einer Kugel mit dem Radius r und ρ_r die Dichte des Gases in der Schicht ist.

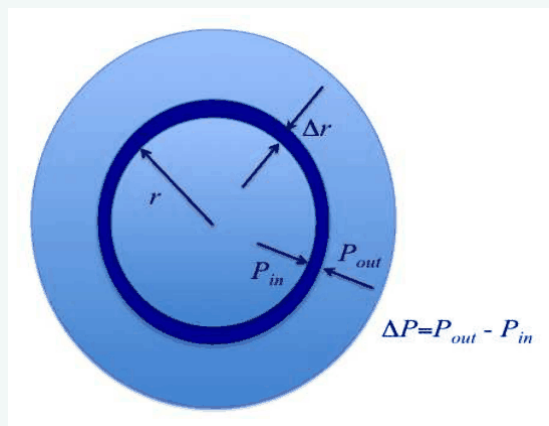


Abbildung 2. Sterne befinden sich im hydrostatischen Gleichgewicht, wobei die Druckdifferenz die Gravitation ausgleicht.

Eine Abschätzung der Größenordnung der Zentraltemperatur des Sterns lässt sich mit den Werten der Parameter im Zentrum und an der Oberfläche des Sterns unter Verwendung der folgenden Näherungen erhalten:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

wobei P_c und P_o die Drücke im Zentrum beziehungsweise an der Oberfläche des Sterns sind. Da $P_c \gg P_o$, können wir annehmen, dass

$$\Delta P \approx -P_c.$$

Im Rahmen derselben Näherung können wir schreiben

$$\Delta r \approx R,$$

wobei R der Gesamtradius des Sterns ist, und

$$M_r \approx M_R = M,$$

wobei M die Gesamtmasse des Sterns ist.

Die Dichte kann durch ihren Wert im Zentrum angenähert werden,

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Sie können annehmen, dass der Druck dem eines idealen Gases entspricht.

2a	Bestimmen Sie eine Gleichung für die Temperatur im Zentrum des Sterns, T_c , die nur vom Radius und der Masse des Sterns sowie von physikalischen Konstanten abhängt.	0.5
----	---	-----

Wir können nun die folgende Vorhersage dieses Modells als Kriterium für seine Gültigkeit verwenden:

2b	Geben Sie mithilfe der in (2a) gefundenen Gleichung das für einen Stern zu erwartende Verhältnis M/R ausschließlich in Abhängigkeit von physikalischen Konstanten und T_c an.	0.5
2c	Verwenden Sie den in Abschnitt (1a) hergeleiteten Wert von T_c und bestimmen Sie den Zahlenwert des für einen Stern zu erwartenden Verhältnisses M/R .	0.5
2d	Berechnen Sie nun das Verhältnis $M(Sun)/R(Sun)$ und überprüfen Sie, dass dieser Wert viel kleiner ist als der in (2c) gefundene.	0.5

3. Eine quantenmechanische Abschätzung der Temperatur im Zentrum von Sternen

Die in (2d) festgestellte große Abweichung legt nahe, dass die in (1a) erhaltene klassische Abschätzung für T_c nicht richtig ist. Diese Abweichung lässt sich aufklären, wenn wir quantenmechanische Effekte berücksichtigen. Diese besagen, dass sich Protonen wie Wellen verhalten und dass ein einzelnes Proton über einen Bereich von der Größenordnung seiner De-Broglie-Wellenlänge λ_p verteilt ist. Das bedeutet: Wenn d_c , der kleinste Abstand der Protonen, von der Größenordnung λ_p ist, überlappen sich die Protonen im quantenmechanischen Sinne und können fusionieren.

3a	Nehmen Sie an, dass $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ die Bedingung ist, die eine Fusion ermöglicht. Bestimmen Sie für ein Proton mit der Geschwindigkeit v_{rms} eine Gleichung für T_c , die nur von physikalischen Konstanten abhängt.	1.0
3b	Berechnen Sie den Zahlenwert des in (3a) erhaltenen T_c .	0.5
3c	Verwenden Sie den in (3b) hergeleiteten Wert von T_c , um mithilfe der in (2b) hergeleiteten Formel den Zahlenwert des für einen Stern zu erwartenden Verhältnisses M/R zu bestimmen. Überprüfen Sie, dass dieser Wert dem beobachteten Verhältnis $M(Sun)/R(Sun)$ recht nahekommt.	0.5

Tatsächlich weisen Sterne der sogenannten *Hauptreihe* (in denen Wasserstoff fusioniert) über einen großen Massenbereich näherungsweise dieses Verhältnis auf.

4. Das Verhältnis von Masse zu Radius bei Sternen.

Die zuvor gefundene Übereinstimmung legt nahe, dass der quantenmechanische Ansatz zur Abschätzung der Temperatur im Zentrum der Sonne richtig ist.

4a	Zeigen Sie mithilfe der vorherigen Ergebnisse, dass das Verhältnis der Masse M zum Radius R für jeden Stern, in dem Wasserstoff fusioniert, gleich ist und nur von physikalischen Konstanten abhängt. Bestimmen Sie die Gleichung für das Verhältnis M/R für Sterne, in denen Wasserstoff fusioniert.	0.5
----	---	-----

5. Die Masse und der Radius des kleinsten Sterns.

Das in (4a) gefundene Ergebnis legt nahe, dass es Sterne beliebiger Masse geben könnte, solange diese Beziehung erfüllt ist; dies ist jedoch nicht der Fall.

Es ist bekannt, dass sich das Gas im Inneren normaler Sterne, in denen Wasserstoff fusioniert, näherungsweise wie ein ideales Gas verhält. Das bedeutet, dass $\bar{d}_e$, der typische Abstand zwischen Elektronen, im Mittel größer ist als λ_e , ihre typische De-Broglie-Wellenlänge. Bei kleineren Abständen befänden sich die Elektronen in einem sogenannten entarteten Zustand, und die Sterne würden sich anders verhalten. Beachten Sie den Unterschied in der Behandlung von Protonen und Elektronen im Inneren des Sterns. Bei Protonen müssen sich ihre De-Broglie-Wellen beim Zusammenstoß stark überlappen, damit sie fusionieren können, während sich bei Elektronen ihre De-Broglie-Wellen nicht überlappen dürfen, damit sie weiterhin ein ideales Gas bilden.

Die Dichte in den Sternen nimmt mit abnehmendem Radius zu. Nehmen Sie für diese Abschätzung der Größenordnung dennoch an, dass die Sterne eine gleichmäßige Dichte haben. Sie dürfen außerdem verwenden, dass $m_p \gg m_e$.

5a	Bestimmen Sie eine Gleichung für n_e , die mittlere Elektronenanzahldichte im Inneren des Sterns.	0.5
5b	Bestimmen Sie eine Gleichung für $\bar{d}_e$, den typischen Abstand zwischen Elektronen im Inneren des Sterns.	0.5
5c	Geben Sie mithilfe der Bedingung $\bar{d}_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ eine Gleichung für den Radius des kleinstmöglichen normalen Sterns an. Betrachten Sie die Temperatur im Zentrum des Sterns als typisch für das gesamte Sterninnere.	1.5
5d	Bestimmen Sie den Zahlenwert des Radius des kleinstmöglichen normalen Sterns, sowohl in Metern als auch in Einheiten des Sonnenradius.	0.5
5e	Bestimmen Sie den Zahlenwert der Masse des kleinstmöglichen normalen Sterns, sowohl in kg als auch in Einheiten der Sonnenmasse.	0.5

6. Fusion von Heliumkernen in älteren Sternen.

Wenn Sterne älter werden, haben sie den größten Teil des Wasserstoffs in ihren Kernen zu Helium (He) fusioniert. Sie müssen daher beginnen, Helium zu schwereren Elementen zu fusionieren, um weiterhin zu leuchten. Ein Heliumkern hat zwei Protonen und zwei Neutronen, also die doppelte Ladung und ungefähr die vierfache Masse eines Protons. Wir haben zuvor gesehen, dass

$d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ die Bedingung für die Fusion von Protonen ist.

6a	Stellen Sie die entsprechende Bedingung für Heliumkerne auf und bestimmen Sie $v_{rms}(He)$, die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Heliumkerne, sowie $T(He)$, die für die Heliumfusion erforderliche Temperatur.	0.5
----	--	-----

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Alle Ergebnisse beruhen auf den in der Aufgabe vorgegebenen Näherungen. Die Zahlenwerte sind auf zwei signifikante Stellen gerundet; in den Zwischenrechnungen werden ungerundete Werte verwendet.

- 1a. $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K}.$

- **2a.** $T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}$.
- **2b.** $\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}$.
- **2c.** $\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}$.
- **2d.** $\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}$. Die klassische Vorhersage ist um den Faktor 4.7×10^2 größer.
- **3a.** $T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}$.
- **3b.** $T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}$.
- **3c.** $\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S}$.
- **4a.** $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}$.
- **5a.** $n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}$.
- **5b.** $d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}$.
- **5c.** $R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}$.
- **5d.** $R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S$.
- **5e.** $M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S$.
- **6a.** Die Bedingung lautet $d_c(\text{He}) = \frac{\lambda_{\text{He}}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{\text{rms}}(\text{He})}$, woraus folgt

$$v_{\text{rms}}(\text{He}) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(\text{He}) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Lösung

1a. Klassisch erforderliche Temperatur für die Fusion

Für ein nichtrelativistisches ideales Gas liefert der Gleichverteilungssatz die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Protonen über

$$\frac{1}{2} m_p v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2} k T_c.$$

Der Stoß ist frontal, doch v_{rms} ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit im dreidimensionalen Gas.

Die beiden Protonen haben gleich große, entgegengesetzt gerichtete Impulse, sodass ihr Schwerpunkt ruht. Beim kleinsten Abstand kommen beide kurzzeitig zum Stillstand. Wenn ihre anfängliche elektrostatische potenzielle Energie als vernachlässigbar angenommen wird, ergibt die Energieerhaltung

$$2 \left(\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}.$$

Somit gilt

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

Für $d_c = 10^{-15}$ m gilt

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

also

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. Zentraltemperatur aus dem hydrostatischen Gleichgewicht

Mit den vorgegebenen Näherungen, einschließlich einer charakteristischen radialen Skala $r \simeq R$, gilt

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

also

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

In vollständig ionisiertem Wasserstoff sind die Protonen- und Elektronenanzahldichten gleich. Unter Vernachlässigung der Elektronenmasse in der Massendichte gilt

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

Beide Teilchenarten tragen zum Druck des idealen Gases bei:

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für den Druck und Kürzen von ρ_c erhält man

$$\boxed{T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}}.$$

2b. Verhältnis von Masse zu Radius

Umstellen des Ergebnisses aus (2a) ergibt

$$\boxed{\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}}.$$

2c. Mit der klassischen Fusionstemperatur vorhergesagtes Verhältnis

Einsetzen der Temperatur aus (1a) ergibt

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\boxed{\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}}.$$

2d. Vergleich mit der Sonne

Aus der angegebenen Sonnenmasse und dem Sonnenradius folgt

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

Mit ungerundeten Werten ergibt der Vergleich

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

Das Verhältnis der Sonne ist somit viel kleiner als die klassische Vorhersage. Im Rahmen des hydrostatischen Modells ist die klassische Fusionstemperatur viel zu hoch.

3a. Quantenmechanische Abschätzung der Fusionstemperatur

Für ein Proton, das sich mit v_{rms} bewegt, beträgt die De-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

Die Beziehung für die Stoßenergie aus (1a) ergibt

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

Fordern wir die in der Aufgabe angegebene Fusionsbedingung

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

so erhalten wir

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

und folglich

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

Mit $m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$ folgt

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

Daher gilt

$$\boxed{T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}}.$$

3b. Zahlenwert der quantenmechanisch bestimmten Temperatur

Einsetzen der angegebenen Konstanten liefert

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2(8.9 \times 10^{-12})^2(1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

woraus sich ergibt

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

Die zugehörige quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Protonen beträgt $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

3c. Verhältnis von Masse zu Radius mit der quantenmechanisch bestimmten Temperatur

Mit (2b) und der Temperatur aus (3b) folgt

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

Das Verhältnis zum Sonnenwert beträgt

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

Die Vorhersage liegt somit etwa 16% unter dem Sonnenwert, was angesichts der verwendeten Größenordnungsnäherungen eine gute Übereinstimmung darstellt.

4a. Gemeinsames Verhältnis von Masse zu Radius

In diesem Modell hat die Wasserstofffusion in jedem Stern dieselbe charakteristische Temperatur. Durch Kombination von (2b) und (3a) erhält man

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2}.$$

Die Faktoren m_p und k kürzen sich:

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

Dies hängt nur von physikalischen Konstanten ab. Für die folgenden Teilaufgaben bezeichnen wir dieses gemeinsame Verhältnis mit

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5a. Mittlere Elektronenanzahldichte

Zu jedem Wasserstoffproton gehört ein Elektron. Unter Vernachlässigung der Elektronenmasse gilt

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

Für einen homogenen kugelförmigen Stern mit dem Volumen $V = 4\pi R^3/3$ gilt

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5b. Typischer Elektronenabstand

Das typische Volumen pro Elektron beträgt $1/n_e$. Nimmt man dessen Kubikwurzel als charakteristischen Abstand, so erhält man

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5c. Radius des kleinsten normalen Sterns

Der Gleichverteilungssatz liefert für die Elektronen

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

Ihre charakteristische De-Broglie-Wellenlänge beträgt daher

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT_c}}.$$

Die vorgegebene Bedingung zur Vermeidung der Elektronenentartung lautet damit

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}}.$$

Mit $M = AR$ in der Formel für den Abstand ergibt sich

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

Entlang der Masse-Radius-Beziehung des Modells nimmt der Abstand somit wie $R^{2/3}$ ab. Der kleinste zulässige Radius wird bei Gleichheit erreicht:

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e kT_c}} \right)^3.$$

Daraus folgt

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e kT_c)^{3/2}}.$$

Zunächst setzen wir $A = 2kT_c/(Gm_p)$ ein:

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

Aus (3a) folgt

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Daher gilt

$$R_{\min}^2 = \frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

oder

$$R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

Bei einem kleineren Radius entlang $M = AR$ würden sich die Elektronenwellen nach dem angegebenen Kriterium überlappen, und die angenommene Beschreibung als ideales Gas wäre nicht mehr gültig.

5d. Zahlenwert des minimalen Radius

Einsetzen ergibt

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

Teilt man das ungerundete Ergebnis durch den angegebenen Sonnenradius, erhält man

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

Der kleinste normale Stern in diesem Modell hat somit einen Radius von ungefähr einem Zehntel des Sonnenradius.

5e. Zahlenwert der minimalen Masse

Da $M = AR$ mit festem positivem A gilt, ergibt der minimale Radius zugleich die minimale Masse:

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}, \quad \frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083.$$

6a. Heliumfusion

Ein Heliumkern hat die Masse $m_{He} \simeq 4m_p$ und die Ladung $Q_{He} = 2q$. Seine De-Broglie-Wellenlänge beträgt

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

Die entsprechende Fusionsbedingung lautet

$$d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}.$$

Für zwei Heliumkerne, die sich mit gleich großen, entgegengesetzt gerichteten rms-Geschwindigkeiten aufeinander zubewegen, ergibt die Energieerhaltung

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c(He)}.$$

Einsetzen der Fusionsbedingung und Vereinfachen liefert

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \varepsilon_0 h}.$$

Dies ist das Vierfache der in (3a) erhaltenen Protonengeschwindigkeit, also

$$v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

Der Gleichverteilungssatz liefert nun

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

Da die Masse viermal so groß und die Geschwindigkeit viermal so groß ist, gilt

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

wobei T_c die Wasserstofffusionstemperatur aus (3b) ist. Daher gilt

$$T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.