

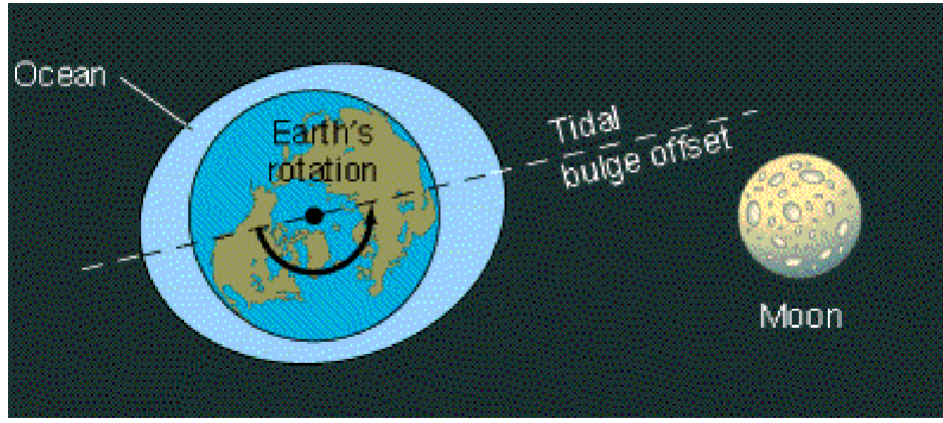
المسألة 1: تطور منظومة الأرض والقمر

يستطيع العلماء تحديد المسافة بين الأرض والقمر بدقة كبيرة. ويحققون ذلك بإرسال حزمة ليزر تنعكس عن مرايا خاصة وضعها رواد الفضاء على سطح القمر عام 1969، وقياس زمن رحلة الضوء ذهاباً وإياباً (انظر الشكل 1).



الشكل 1. تُستخدم حزمة ليزر مرسل من مرصد لقياس المسافة بين الأرض والقمر بدقة.

باستخدام هذه الأرصاد، قاس العلماء مباشرةً أن القمر يبتعد ببطء عن الأرض. أي إن المسافة بين الأرض والقمر تزداد مع الزمن. ويحدث ذلك لأن الأرض تنقل زخماً زاوياً إلى القمر بفعل عزوم قوى المد والجزر، انظر الشكل 2. في هذه المسألة، ستشتق المقادير الأساسية لهذه الظاهرة.



الشكل 2. تُحدث جاذبية القمر تشوهات مدية أو «انتفاخات» في الأرض. وبسبب دوران الأرض، لا يكون الخط المار بالانتفاخين على استقامة الخط الواصل بين الأرض والقمر. ويؤد عدم الاستقامة هذا عزمًا ينقل الزخم الزاوي من دوران الأرض حول نفسها إلى الحركة المدارية للقمر. الرسم ليس وفق مقياس رسم.

1. انحفاظ الزخم الزاوي.

ليكن L_1 الزخم الزاوي الكلي الحالي لمنظومة الأرض والقمر. اعتمد الآن الافتراضات التالية: (i) L_1 هو مجموع الزخم الزاوي لدوران الأرض حول محورها ولحركة القمر في مداره حول الأرض فقط. (ii) مدار القمر دائري، ويمكن اعتبار القمر نقطة. (iii) محور دوران الأرض حول نفسها ومحور دوران القمر حول الأرض متوازيان. (iv) لتبسيط الحسابات، نعتبر الحركة حول مركز الأرض لا حول مركز الكتلة. وتُعرّف جميع عزوم القصور الذاتي وعزوم القوى والزخم الزاوية في هذه المسألة بالنسبة إلى محور الأرض. (v) أهمل تأثير الشمس.

الجزء	السؤال	الدرجات
1a	اكتب معادلة الزخم الزاوي الكلي الحالي لمنظومة الأرض والقمر. عبّر عن هذه المعادلة بدلالة I_E ، عزم القصور الذاتي للأرض؛ ω_{E1} ، التردد الزاوي الحالي لدوران الأرض حول نفسها؛ I_{M1} ، عزم القصور الذاتي الحالي للقمر بالنسبة إلى محور الأرض؛ ω_{M1} ، التردد الزاوي الحالي لدوران القمر في مداره.	0.2

ستنتهي عملية انتقال الزخم الزاوي هذه عندما يتساوى زمن دورة الأرض حول نفسها مع زمن دورة القمر حول الأرض. عندئذٍ، ستصبح الانتفاخات المدية التي يُحدثها القمر على الأرض على استقامة الخط الواصل بين القمر والأرض، وسيزول عزم القوة.

الجزء	السؤال	الدرجات
1b	اكتب معادلة الزخم الزاوي الكلي النهائي L_2 لمنظومة الأرض والقمر. اعتمد الافتراضات نفسها الواردة في السؤال 1a. عبّر عن هذه المعادلة بدلالة I_E ، عزم القصور الذاتي للأرض؛ ω_2 ، التردد الزاوي النهائي لدوران الأرض حول نفسها وللحركة المدارية للقمر؛ I_{M2} ، عزم القصور الذاتي النهائي للقمر.	0.2

الجزء	السؤال	الدرجات
1c	بإهمال مساهمة دوران الأرض حول نفسها في الزخم الزاوي الكلي النهائي، اكتب المعادلة التي تعبر عن انحفاظ الزخم الزاوي في هذه المسألة.	0.3

2. المسافة النهائية والتردد الزاوي النهائي لمنظومة الأرض والقمر.

افترض أن معادلة الجاذبية لمدار دائري (للقمر حول الأرض) صالحة دائماً. أهمل مساهمة دوران الأرض حول نفسها في الزخم الزاوي الكلي النهائي.

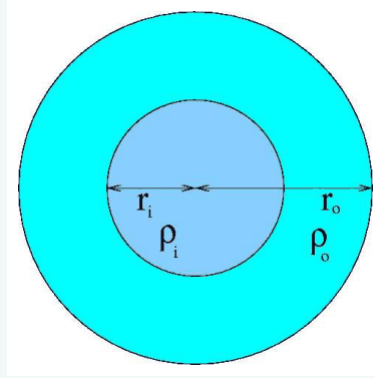
الجزء	السؤال	الدرجات
2a	اكتب معادلة الجاذبية للمدار الدائري للقمر حول الأرض، في الحالة النهائية، بدلالة M_E و ω_2 و G والمسافة النهائية D_2 بين الأرض والقمر. حيث M_E كتلة الأرض و G ثابت الجذب العام.	0.2

الدرجة	السؤال	الجزء
0.5	اكتب معادلة المسافة النهائية D_2 بين الأرض والقمر بدلالة المقادير المعروفة: L_1 ، الزخم الزاوي الكلي للمنظومة، و M_E و M_M ، كتلتي الأرض والقمر على الترتيب، و G .	2b

الدرجة	السؤال	الجزء
0.5	اكتب معادلة التردد الزاوي النهائي ω_2 لمنظومة الأرض والقمر بدلالة المقادير المعروفة L_1 و M_E و M_M و G .	2c

سيُطلب منك فيما يلي إيجاد القيم العددية لكل من D_2 و ω_2 . ولهذا، تحتاج إلى معرفة عزم القصور الذاتي للأرض.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.5	اكتب معادلة عزم القصور الذاتي للأرض I_E ، بافتراض أنها كرة ذات كثافة داخلية ρ_i من المركز حتى نصف القطر r_i ، وكثافة خارجية ρ_o من نصف القطر r_i حتى السطح عند نصف القطر r_o (انظر الشكل 3).	2d



الشكل 3. الأرض بوصفها كرة ذات كثافتين، ρ_o و ρ_i .

حدّد القيم العددية المطلوبة في هذه المسألة دائماً بدقة رقمين معنويين.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.2	احسب عزم القصور الذاتي للأرض I_E ، باستخدام $\rho_i = 1.3 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ و $r_i = 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ و $\rho_o = 4.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ و $r_o = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.	2e

كتلتا الأرض والقمر هما $M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ و $M_M = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$ ، على الترتيب. والمسافة الحالية بين الأرض والقمر هي $D_1 = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$. والتردد الزاوي الحالي لدوران الأرض حول نفسها هو $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. والتردد الزاوي الحالي للحركة المدارية للقمر حول الأرض هو $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ، وثابت الجذب العام هو $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.2	احسب القيمة العددية للزخم الزاوي الكلي للمنظومة، L_1 .	2f

الدرجة	السؤال	الجزء
0.3	أوجد المسافة النهائية D_2 بالأمتار وبدلالة المسافة الحالية D_1 بوصفها وحدة قياس.	2g

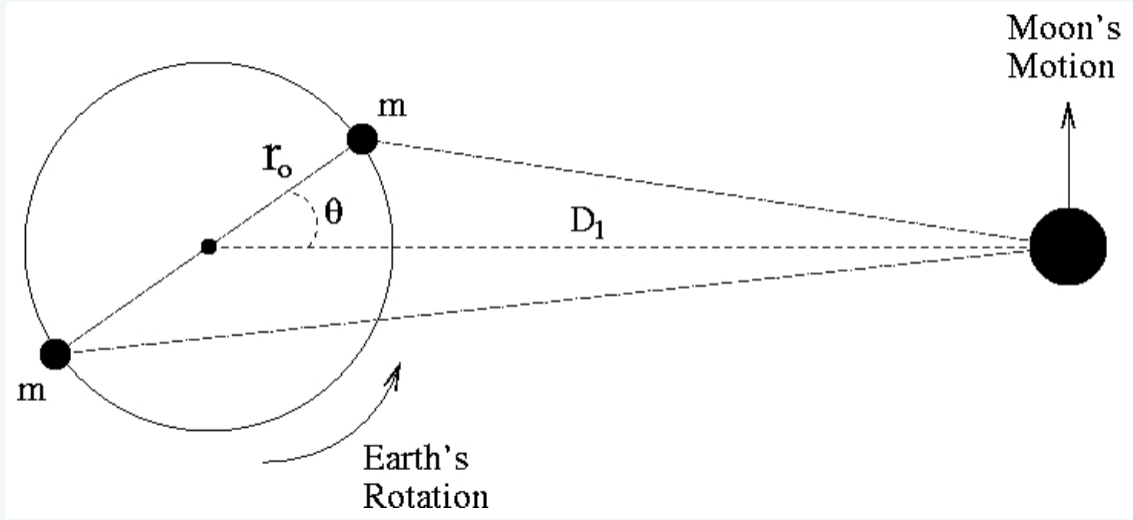
الدرجة	السؤال	الجزء
0.3	أوجد التردد الزاوي النهائي ω_2 بوحدة s^{-1} ، وكذلك المدة النهائية لليوم بوحدة الأيام الحالية.	2h

تحقق من أن افتراض إهمال مساهمة دوران الأرض حول نفسها في الزخم الزاوي الكلي النهائي مبرر، وذلك بإيجاد نسبة الزخم الزاوي النهائي للأرض إلى نظيره للقمر. ينبغي أن تكون هذه النسبة صغيرة.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.2	أوجد نسبة الزخم الزاوي النهائي للأرض إلى نظيره للقمر.	2i

3. ما مقدار ابتعاد القمر كل سنة؟

ستجد الآن مقدار ابتعاد القمر عن الأرض كل سنة. ولهذا، ستحتاج إلى معرفة معادلة عزم القوة المؤثر حاليًا في القمر. افترض أنه يمكن تقريب الانتفاخين المدين بكتلتين نقطيتين، كتلة كل منهما m ، تقعان على سطح الأرض، انظر الشكل 4. لتكن الزاوية بين الخط المار بالانتفاخين والخط الواصل بين مركزي الأرض والقمر.



الشكل 4. رسم تخطيطي لتقدير عزم القوة الذي يؤثر به الانتفاخان على الأرض في القمر. الرسم ليس وفق مقياس رسم.

الجزء	السؤال	الدرجات
3a	أوجد F_c ، مقدار القوة التي تؤثر بها الكتلة النقطية الأقرب في القمر.	0.4

الجزء	السؤال	الدرجات
3b	أوجد F_f ، مقدار القوة التي تؤثر بها الكتلة النقطية الأبعد في القمر.	0.4

يمكنك الآن حساب عزوم القوى الناتجة عن الكتلتين النقطيتين.

الجزء	السؤال	الدرجات
3c	أوجد مقدار τ_c ، عزم القوة الناتج عن الكتلة النقطية الأقرب.	0.4

الجزء	السؤال	الدرجات
3d	أوجد مقدار τ_f ، عزم القوة الناتج عن الكتلة النقطية الأبعد.	0.4

الجزء	السؤال	الدرجات
3e	أوجد مقدار عزم القوة الكلي τ الناتج عن الكتلتين. بما أن $r_o \ll D_1$ ، ينبغي أن تقرّب التعبير الذي تحصل عليه إلى أدنى رتبة غير منعدمة في r_o/D_1 . يمكنك استخدام العلاقة $(1+x)^a \approx 1+ax$ ، إذا كان $x \ll 1$.	1.0

الجزء	السؤال	الدرجات
3f	احسب القيمة العددية لعزم القوة الكلي τ ، مع الأخذ في الحسبان أن $\theta = 3^\circ$ وأن $m = 3.6 \times 10^{16} \text{ kg}$ (لاحظ أن هذه الكتلة من رتبة 10^{-8} من كتلة الأرض).	0.5

بما أن عزم القوة هو معدل تغير الزخم الزاوي مع الزمن، أوجد الزيادة الحالية في المسافة بين الأرض والقمر خلال سنة. لهذه الخطوة، عبّر عن الزخم الزاوي للقمر بدلالة M_M و M_E و D_1 و G فقط.

الجزء	السؤال	الدرجات
3g	أوجد الزيادة الحالية في المسافة بين الأرض والقمر خلال سنة.	1.0

أخيرًا، قدر مقدار ازدياد طول اليوم كل سنة.

الجزء	السؤال	الدرجات
3h	أوجد مقدار تناقص ω_{E1} خلال سنة، ومقدار ازدياد طول اليوم حاليًا كل سنة.	1.0

4. أين تذهب الطاقة؟

على خلاف الزخم الزاوي الذي ينحفظ، فإن الطاقة الكلية للمنظومة (الدورانية مضافاً إليها طاقة الجاذبية) لا تتحفظ. وسندرس ذلك في هذا القسم الأخير.

الجزء	السؤال	الدرجات
4a	اكتب معادلة الطاقة الكلية الحالية (الدورانية مضافاً إليها طاقة الجاذبية) لمنظومة الأرض والقمر، E . عبّر عن هذه المعادلة بدلالة I_E و ω_{E1} و M_M و M_E و D_1 و G فقط.	0.4

الجزء	السؤال	الدرجات
4b	اكتب معادلة التغير في E ، أي ΔE ، بدلالة التغيرين في D_1 وفي ω_{E1} . احسب القيمة العددية لـ ΔE خلال سنة، باستخدام قيمتي التغير في D_1 وفي ω_{E1} اللتين وجدتهما في السؤالين 3g و 3h.	0.4

تحقق من أن هذا الفقد في الطاقة يتوافق مع تقدير للطاقة المبددة على هيئة حرارة في المد والجزر الذي يُحدثه القمر على الأرض. افترض أن المد يرفع، بمقدار 0.5 m في المتوسط، طبقة ماء عمقها $h = 0.5$ m تغطي سطح الأرض (للتبسيط، افترض أن سطح الأرض كله مغطى بالماء). ويحدث ذلك مرتين في اليوم. وافترض أيضاً أن 10% من طاقة الجاذبية هذه تتبدد على هيئة حرارة بفعل اللزوجة عند هبوط الماء. خذ كثافة الماء $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ، وتسارع الجاذبية عند سطح الأرض $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

الجزء	السؤال	الدرجات
4c	ما كتلة هذه الطبقة السطحية من الماء؟	0.2

الجزء	السؤال	الدرجات
4d	احسب مقدار الطاقة المبددة خلال سنة. كيف يُقارَن ذلك بالطاقة التي تفقدها منظومة الأرض والقمر حاليًا خلال سنة؟	0.3

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لحساب قوى الانتفاخين وعزومها، نعرّف المسافتين

$$d_c = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}, \quad d_f = \sqrt{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$$

ليكن T_1 و T_2 طولَي اليوم الحالي والنهائي. تُعطى النتائج العددية بدقة رقمين معنويين.

$$\bullet \text{ 1a: } L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

$$\bullet \text{ 1b: } L_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2.$$

$$\bullet \text{ 1c: } I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = L_1 \simeq I_{M2} \omega_2.$$

$$\bullet \text{ 2a: } \omega_2^2 D_2^3 = G M_E.$$

$$\bullet \text{ 2b: } D_2 = \frac{L_1^2}{G M_E M_M^2}.$$

$$\bullet \text{ 2c: } \omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

$$\bullet \text{ 2d: } I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

$$\bullet \text{ 2e: } I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

$$\bullet \text{ 2f: } L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \text{ :2g } D_2 = 5.5 \times 10^8 \text{ m} = 1.4D_1 \\
& \bullet \text{ :2h } \omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \quad T_2/T_1 = 47 \\
& \bullet \text{ :2i } \frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E}{M_M D_2^2} = 3.6 \times 10^{-3} \\
& \bullet \text{ :3a } F_c = \frac{GM_M m}{d_c^2} \\
& \bullet \text{ :3b } F_f = \frac{GM_M m}{d_f^2} \\
& \bullet \text{ :3c } \tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_c^3} \\
& \bullet \text{ :3d } \tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{d_f^3} \\
& \bullet \text{ :3e } \tau = \tau_c - \tau_f \simeq \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta) \\
& \bullet \text{ :3f } \tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m} \\
& \bullet \text{ :3g } \dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m yr}^{-1} = 3.5 \text{ cm yr}^{-1} \\
& \bullet \text{ :3h } \Delta T_1 = +1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \text{ و } \Delta \omega_{E1} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ خلال سنة واحدة,} \\
& \bullet \text{ :4a } E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{GM_E M_M}{2D_1} \\
& \bullet \text{ :4b } \Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta \omega_{E1} + \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \Delta D_1 = -9.1 \times 10^{19} \text{ J} \\
& \bullet \text{ :4c } M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg} \\
& \bullet \text{ :4d } E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J, وهو متوافق بدرجة كبيرة مع فقد الطاقة الميكانيكية البالغ } 9.1 \times 10^{19} \text{ J في السنة.}
\end{aligned}$$

الحل

تستخدم جميع الحسابات الافتراضات الواردة في المسألة. ولا تُقَرَّب النتائج العددية إلا في النهاية. ولحساب التغيرات السنوية، نأخذ

$$t_{\text{yr}} = 365 \times 24 \times 3600 \text{ s.}$$

1a. الزخم الزاوي الحالي

يدور كلٌّ من الأرض حول نفسها والقمر حول الأرض في المنحى نفسه حول محورين متوازيين، لذا يُجمع زخماهما الزاويان:

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}.$$

بما أن القمر يُعامل كنقطة على مسافة D_1 من محور الأرض، فإن

$$I_{M1} = M_M D_1^2.$$

1b. الزخم الزاوي النهائي

في حالة التزامن النهائية، يساوي كلا الترددات الزاويين ω_2 . ومن ثم

$$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2 = (I_E + I_{M2}) \omega_2, \quad I_{M2} = M_M D_2^2.$$

1c. انحفاظ الزخم الزاوي

لا يوجد عزم قوة خارجي في النموذج المذكور. وتنقل عزوم قوى المد والجزر الزخم الزاوي داخلياً، مما يعطي $L_1 = L_2$.

بإهمال مساهمة دوران الأرض حول نفسها في الحالة النهائية فقط،

$$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} \simeq I_{M2} \omega_2.$$

يجب مع ذلك تضمين دوران الأرض الحالي حول نفسها في L_1 .

2a. معادلة المدار الدائري

توفر قوة الجاذبية التسارع المركزي للقمر:

$$\frac{GM_E M_M}{D_2^2} = M_M \omega_2^2 D_2.$$

باختزال M_M ، نحصل على

$$\omega_2^2 D_2^3 = GM_E.$$

2b. المسافة النهائية

ضمن التقريب المستخدم في الجزء 1c،

$$L_1 = M_M D_2^2 \omega_2.$$

باستخدام $\omega_2 = \sqrt{GM_E/D_2^3}$

$$L_1 = M_M \sqrt{GM_E D_2}.$$

بالتربيع والحل،

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2}.$$

2c. التردد الزاوي النهائي

بالتعويض بالنتيجة السابقة في معادلة المدار الدائري، نحصل على

$$\omega_2 = \sqrt{GM_E} \left(\frac{GM_E M_M^2}{L_1^2} \right)^{3/2}.$$

وعليه

$$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}.$$

2d. عزم القصور الذاتي للأرض

لقشرة كروية رقيقة نصف قطرها r ، وكثافتها ρ ، وسمكها dr ، لدينا

$$dm = 4\pi \rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8\pi}{3} \rho r^4 dr.$$

بالتكامل على منطقتي الكثافة،

$$I_E = \frac{8\pi}{3} \left[\rho_i \int_0^{r_i} r^4 dr + \rho_o \int_{r_i}^{r_o} r^4 dr \right].$$

ومن ثم

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [\rho_i r_i^5 + \rho_o (r_o^5 - r_i^5)].$$

2e. القيمة العددية لعزم القصور الذاتي

بالتعويض بالكثافات وأنصاف الأقطار المعطاة،

$$I_E = \frac{8\pi}{15} [(1.3 \times 10^4)(3.5 \times 10^6)^5 + (4.0 \times 10^3) ((6.4 \times 10^6)^5 - (3.5 \times 10^6)^5)] \text{ kg m}^2.$$

إذن

$$I_E = 8.0 \times 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

2f. الزخم الزاوي الكلي الحالي

باستخدام التردد الزاويين الحاليين المعطيين،

$$L_1 = I_E \omega_{E1} + M_M D_1^2 \omega_{M1}.$$

المساهمتان هما

$$I_E \omega_{E1} = 5.8 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$M_M D_1^2 \omega_{M1} = 2.8 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

بجمعهما باستخدام القيم الوسيطة غير المقرّبة،

$$L_1 = 3.4 \times 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

2g. القيمة العددية للمسافة النهائية

باستخدام الجزء 2b والقيمة غير المقرّبة لـ L_1 ،

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_E M_M^2} = 5.5 \times 10^8 \text{ m}.$$

بالنسبة إلى المسافة الحالية،

$$\frac{D_2}{D_1} = 1.4.$$

2h. التردد النهائي وطول اليوم

من الجزء 2c،

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

بما أن زمن الدورة هو $T = 2\pi/\omega$ ، فإن

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi/\omega_2}{2\pi/\omega_{E1}} = \frac{\omega_{E1}}{\omega_2}.$$

باستخدام القيم الوسيطة غير المقرّبة، نحصل على

$$T_2 = 47T_1,$$

أي إن اليوم النهائي يستغرق 47 يوماً حالياً.

2i. التحقق من إهمال الدوران الذاتي النهائي

يتضمن كلا الزخمين الزاويين النهائيين التردد الزاوي نفسه:

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = \frac{I_E \omega_2}{M_M D_2^2 \omega_2} = \frac{I_E}{M_M D_2^2}.$$

عددياً،

$$\frac{L_{E2}}{L_{M2}} = 3.6 \times 10^{-3}.$$

لا يمثل الزخم الزاوي النهائي لدوران الأرض حول نفسها سوى 0.36% من الزخم الزاوي المداري للقمر، مما يبرر إهماله.

3a. القوة الناتجة عن الانتفاخ الأقرب

نختار مركز الأرض مبدأً للإحداثيات، ونضع القمر عند $(D_1, 0)$ ، ونجعل الاتجاه الموجب للمحور y في اتجاه الحركة اللحظية للقمر. يقع الانتفاخ الأقرب عند

$$(r_o \cos \theta, r_o \sin \theta).$$

ومن ثم فإن المسافة بينه وبين القمر تحقق

$$d_c^2 = (D_1 - r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta.$$

يعطي قانون نيوتن للجذب العام

$$F_c = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3b. القوة الناتجة عن الانتفاخ الأبعد

يقع الانتفاخ الأبعد عند

$$(-r_o \cos \theta, -r_o \sin \theta).$$

وبالتالي،

$$d_f^2 = (D_1 + r_o \cos \theta)^2 + (r_o \sin \theta)^2 = D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta,$$

و

$$F_f = \frac{GM_M m}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta}.$$

3c. عزم القوة الناتج عن الانتفاخ الأقرب

لا تسهم في عزم القوة حول محور الأرض إلا مركبة القوة العمودية على الخط الواصل بين الأرض والقمر. ولانتفاخ الأقرب،

$$F_{c,y} = F_c \frac{r_o \sin \theta}{d_c}.$$

عزم قوته موجب، وفي اتجاه الزخم الزاوي المداري للقمر:

$$\tau_c = D_1 F_{c,y}.$$

ومن ثم فإن مقداره هو

$$\tau_c = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3d. عزم القوة الناتج عن الانتفاخ الأبعد

يجذب الانتفاخ الأبعد القمر في الاتجاه السالب للمحور y :

$$F_{f,y} = -F_f \frac{r_o \sin \theta}{d_f}.$$

يعاكس عزم قوته عزم قوة الانتفاخ الأقرب. ومقداره هو

$$\tau_f = \frac{GM_M m D_1 r_o \sin \theta}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1 r_o \cos \theta)^{3/2}}.$$

3e. عزم القوة الكلي إلى أدنى رتبة غير منعدمة

بما أن $d_c < d_f$ ، فإن الانتفاخ الأقرب يولد عزم القوة الأكبر. وللوضع الهندسي المبين،

$$\tau = \tau_c - \tau_f = GM_M m D_1 r_o \sin \theta \left(\frac{1}{d_c^3} - \frac{1}{d_f^3} \right).$$

نعرف $\epsilon = r_o/D_1 \ll 1$ عندئذٍ

$$\frac{1}{d_c^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 + 3\epsilon \cos \theta),$$

و

$$\frac{1}{d_f^3} = \frac{1}{D_1^3} (1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta)^{-3/2} \simeq \frac{1}{D_1^3} (1 - 3\epsilon \cos \theta).$$

تُلغى حدود الرتبة الصفرية، ويتبقى

$$\tau \simeq GM_M m D_1 r_o \sin \theta \frac{6r_o \cos \theta}{D_1^4}.$$

وعليه

$$\tau \simeq \frac{6GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin \theta \cos \theta = \frac{3GM_M m r_o^2}{D_1^3} \sin(2\theta).$$

يزيد عزم القوة هذا الزخم الزاوي المداري للقمر.

3f القيمة العددية لعزم القوة

عند $\theta = 3^\circ$.

$$\tau \simeq \frac{3(6.7 \times 10^{-11})(7.3 \times 10^{22})(3.6 \times 10^{16})(6.4 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^3} \sin 6^\circ.$$

إذن

$$\tau = 4.1 \times 10^{16} \text{ N m.}$$

3g ابتعاد القمر حالياً

لمدار دائري عند مسافة D ،

$$\omega_M = \sqrt{\frac{GM_E}{D^3}},$$

ومن ثم فإن الزخم الزاوي للقمر هو

$$L_M = M_M D^2 \omega_M = M_M \sqrt{GM_E D}.$$

بالتفاضل بالنسبة إلى الزمن،

$$\tau = \frac{dL_M}{dt} = \frac{M_M}{2} \sqrt{\frac{GM_E}{D}} \dot{D}.$$

إذن، عند المسافة الحالية،

$$\dot{D}_1 = \frac{2\tau}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{GM_E}}.$$

عددياً،

$$\dot{D}_1 = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}.$$

الزيادة خلال سنة واحدة هي

$$\Delta D_1 = \dot{D}_1 t_{\text{yr}},$$

مما يعطي

$$\Delta D_1 = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.5 \text{ cm} \quad \text{خلال سنة واحدة}$$

3h. تباطؤ دوران الأرض وازدياد طول اليوم

عزم القوة المؤثر في الأرض معاكس لعزم القوة المؤثر في القمر. ومع ثبات I_E ,

$$I_E \dot{\omega}_E = -\tau.$$

وعليه

$$\dot{\omega}_{E1} = -\frac{\tau}{I_E} = -5.2 \times 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

ويكون التغير خلال سنة واحدة

$$\Delta \omega_{E1} = -\frac{\tau t_{\text{yr}}}{I_E} = -1.6 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$

بما أن $T_E = 2\pi/\omega_E$ فإن التغير الصغير يحقق

$$\Delta T_E \simeq -\frac{2\pi}{\omega_E^2} \Delta \omega_E.$$

وبالتالي،

$$\Delta T_1 = \frac{2\pi \tau t_{\text{yr}}}{I_E \omega_{E1}^2} = 1.9 \times 10^{-5} \text{ s} \quad \text{خلال سنة واحدة}$$

يزداد طول اليوم بمقدار $19 \mu\text{s}$ تقريباً في السنة.

4a. الطاقة الميكانيكية الحالية

تتألف الطاقة الميكانيكية من الطاقة الحركية لدوران الأرض حول نفسها، والطاقة الحركية المدارية للقمر، وطاقة وضع الجاذبية بينهما:

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 - \frac{G M_E M_M}{D_1}.$$

تعطي علاقة المدار الدائري

$$\frac{1}{2} M_M D_1^2 \omega_{M1}^2 = \frac{G M_E M_M}{2 D_1}.$$

إذن

$$E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{G M_E M_M}{2 D_1}.$$

4b. التغير السنوي في الطاقة الميكانيكية

للتغيرين ΔD_1 و $\Delta \omega_{E1}$ يكون الفرق الدقيق ضمن نموذج الطاقة هذا

$$\Delta E = \frac{1}{2} I_E [(\omega_{E1} + \Delta \omega_{E1})^2 - \omega_{E1}^2] - \frac{G M_E M_M}{2} \left[\frac{1}{D_1 + \Delta D_1} - \frac{1}{D_1} \right].$$

التغيرات النسبية السنوية صغيرة للغاية، لذا فإن الاحتفاظ بحدود الرتبة الأولى يعطي

$$\Delta E \simeq I_E \omega_{E1} \Delta \omega_{E1} + \frac{G M_E M_M}{2 D_1^2} \Delta D_1.$$

الحد الأول سالب: تفقد الأرض طاقة دورانها حول نفسها. والحد الثاني موجب: تزداد الطاقة المدارية للقمر مع اتساع مداره.

بالتعويض بالتغيرات السنوية من الجزيئين $3g$ و $3h$ ، مع الاحتفاظ بقيمها غير المقرّبة،

$$\Delta E = -9.1 \times 10^{19} \text{ J} \quad \text{.خلال سنة واحدة}$$

يمكن أيضاً التعبير عن ميزان الطاقة مباشرةً بدلالة عزم القوة:

$$\dot{E}_{\text{spin}} = -\tau \omega_{E1}.$$

باستخدام صيغة الابتعاد،

$$\dot{E}_{\text{orbit}} = \frac{GM_E M_M}{2D_1^2} \dot{D}_1 = \tau \sqrt{\frac{GM_E}{D_1^3}}.$$

ومن ثم

$$\dot{E} = -\tau(\omega_{E1} - \omega_{M1}),$$

حيث تُحدّد ω_{M1} من خلال علاقة المدار الدائري. وبما أن دوران الأرض حول نفسها أسرع من دوران القمر حولها، فإن الطاقة الميكانيكية تتناقص؛ ويتحول الفرق إلى حرارة.

4c. كتلة طبقة الماء

بما أن الطبقة رقيقة جداً مقارنةً بنصف قطر الأرض، فإن حجمها يساوي مساحة سطحها مضروبة في سمكها:

$$V \simeq 4\pi r_o^2 h.$$

وعليه

$$M_{\text{water}} = 4\pi r_o^2 h \rho_{\text{water}} = 4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (0.5)(10^3) \text{ kg}.$$

إذن

$$M_{\text{water}} = 2.6 \times 10^{17} \text{ kg}.$$

4d. التبدد الحراري السنوي

متوسط الارتفاع المذكور هو $H = 0.5 \text{ m}$. وطاقة وضع الجاذبية التي تكتسبها الطبقة في ارتفاع واحد هي

$$E_{\text{rise}} = M_{\text{water}} g H.$$

يتبدد عشرة بالمئة منها على هيئة حرارة أثناء الهبوط اللاحق. ومع حدوث دورتين في اليوم، يكون عدد الدورات في السنة 2×365 :

$$E_{\text{heat, yr}} = 0.10(2 \times 365) M_{\text{water}} g H.$$

بالتعويض، نحصل على

$$E_{\text{heat, yr}} = 9.2 \times 10^{19} \text{ J}.$$

يتوافق هذا بدرجة كبيرة مع فقد الطاقة الميكانيكية

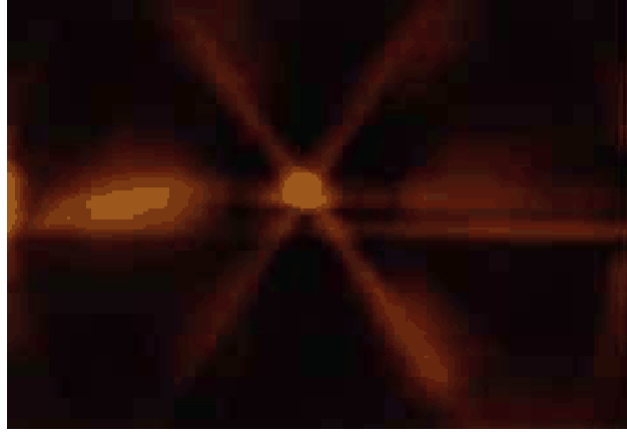
$$|\Delta E| = 9.1 \times 10^{19} \text{ J}$$

الذي وُجد في الجزء 4b. وضمن النموذج المبسط، يفسر التبدد بفعل المد والجزر فقد الطاقة الميكانيكية بتحويلها إلى حرارة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: التبريد بالليزر بتأثير دوبلر والدبس البصري

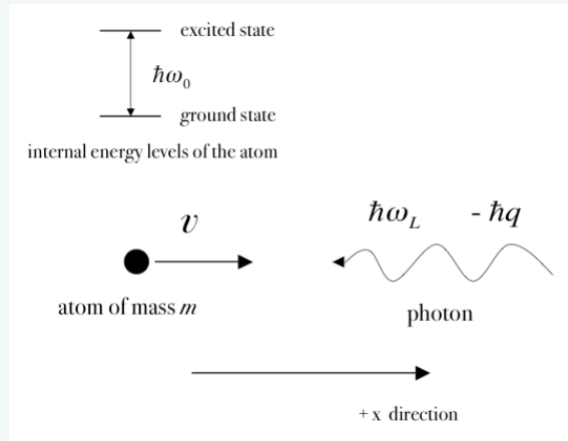
الهدف من هذه المسألة هو تطوير نظرية بسيطة لفهم الظاهرتين المعروفتين باسم «التبريد بالليزر» و«الدبس البصري». ويُقصد بذلك تبريد حزمة من الذرات المتعادلة، التي تكون عادةً من الفلزات القلوية، بواسطة حزم ليزر متعاكسة الانتشار ذات التردد نفسه. وهذا جزء من العمل الذي مُنحت عليه جائزة نوبل في الفيزياء لكل من ستيفن تشو وويليام فيليبس وكلود كوهين تانوجي في عام 1997.



تُظهر الصورة أعلاه ذرات الصوديوم (البقعة المضيئة في الوسط) المحتجزة عند تقاطع ثلاثة أزواج متعامدة من حزم الليزر المتقابلة. وتُسمى منطقة الاحتجاز «الدبس البصري» لأن القوة البصرية المبددة تشبه قوة المقاومة اللزجة المؤثرة في جسم يتحرك عبر الدبس. ستحلل في هذه المسألة الظاهرة الأساسية لتفاعل فوتون ساقط على ذرة، وأساس آلية التبريد في بُعد واحد.

الجزء 1: أساسيات التبريد بالليزر

اعتبر ذرة كتلتها m تتحرك في الاتجاه $+x$ بسرعة v . وللتبسيط، سنعتبر المسألة أحادية البعد، أي إننا سنهمل الاتجاهين y و z (انظر الشكل 1). للذرة مستويان داخليان للطاقة. تُعتبر طاقة الحالة الدنيا مساوية للصفر، وطاقة الحالة المثارة مساوية لـ $\hbar\omega_0$ ، حيث $\hbar = h/2\pi$. تكون الذرة في البداية في الحالة الدنيا. تُوجّه حزمة ليزر ذات تردد ω_L في المختبر في الاتجاه $-x$ ، وتسقط على الذرة. من منظور ميكانيكا الكم، يتكوّن الليزر من عدد كبير من الفوتونات، طاقة كل منها $\hbar\omega_L$ وزخمه $\hbar q$. يمكن أن تمتص الذرة فوتوناً ثم تبعثه تلقائياً لاحقاً؛ ويمكن أن يحدث هذا الانبعاث باحتمالين متساويين في الاتجاهين $+x$ و $-x$. وبما أن الذرة تتحرك بسرعات غير نسبية، فإن $v/c \ll 1$ (حيث c سرعة الضوء)، لذا احتفظ فقط بالحدود حتى الرتبة الأولى في هذه الكمية. واعتبر أيضاً أن $\hbar q/mv \ll 1$ ، أي إن زخم الذرة أكبر بكثير من زخم فوتون واحد. وعند كتابة إجاباتك، احتفظ فقط بالتصحيفات الخطية في أيٍّ من الكميتين المذكورتين أعلاه.



الشكل 1. رسم تخطيطي لذرة كتلتها m وسرعتها v في الاتجاه $+x$ ، تتصادم مع فوتون طاقته $\hbar\omega_L$ وزخمه $\hbar q$. للذرة حالتان داخليتان فرق الطاقة بينهما $\hbar\omega_0$.

افترض أن تردد الليزر ω_L مضبوط بحيث يكون، كما تراه الذرة المتحركة، في حالة رنين مع الانتقال الداخلي للذرة. أجب عن الأسئلة الآتية:

1. الامتصاص.

1a	اكتب شرط الرنين لامتصاص الفوتون.	0.2
1b	اكتب زخم الذرة p_{at} بعد الامتصاص، كما يُقاس في المختبر.	0.2

1c	اكتب الطاقة الكلية للذرة ε_{at} بعد الامتصاص، كما تُقاس في المختبر. 0.2
----	---

2. الانبعاث التلقائي لفوتون في الاتجاه $-x$.

في وقتٍ ما بعد امتصاص الفوتون الساقط، قد تبعث الذرة فوتوناً في الاتجاه $-x$.

2a	اكتب طاقة الفوتون المنبعث، ε_{ph} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $-x$ ، كما تُقاس في المختبر. 0.2
2b	اكتب زخم الفوتون المنبعث p_{ph} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $-x$ ، كما يُقاس في المختبر. 0.2
2c	اكتب زخم الذرة p_{at} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $-x$ ، كما يُقاس في المختبر. 0.2
2d	اكتب الطاقة الكلية للذرة ε_{at} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $-x$ ، كما تُقاس في المختبر. 0.2

3. الانبعاث التلقائي لفوتون في الاتجاه $+x$.

في وقتٍ ما بعد امتصاص الفوتون الساقط، قد تبعث الذرة بدلاً من ذلك فوتوناً في الاتجاه $+x$.

3a	اكتب طاقة الفوتون المنبعث، ε_{ph} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $+x$ ، كما تُقاس في المختبر. 0.2
3b	اكتب زخم الفوتون المنبعث p_{ph} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $+x$ ، كما يُقاس في المختبر. 0.2
3c	اكتب زخم الذرة p_{at} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $+x$ ، كما يُقاس في المختبر. 0.2
3d	اكتب الطاقة الكلية للذرة ε_{at} ، بعد عملية الانبعاث في الاتجاه $+x$ ، كما تُقاس في المختبر. 0.2

4. متوسطات الانبعاث بعد الامتصاص.

يحدث الانبعاث التلقائي لفوتون في الاتجاه $-x$ أو في الاتجاه $+x$ بالاحتمال نفسه. مع أخذ ذلك في الحسبان، أجب عن الأسئلة الآتية.

4a	اكتب متوسط طاقة الفوتون المنبعث، ε_{ph} ، بعد عملية الانبعاث. 0.2
4b	اكتب متوسط زخم الفوتون المنبعث p_{ph} ، بعد عملية الانبعاث. 0.2
4c	اكتب متوسط الطاقة الكلية للذرة ε_{at} ، بعد عملية الانبعاث. 0.2
4d	اكتب متوسط زخم الذرة p_{at} ، بعد عملية الانبعاث. 0.2

5. انتقال الطاقة والزخم.

بافتراض حدوث عملية كاملة واحدة فقط لامتصاص فوتون واحد ثم انبعثه، كما وُصفت أعلاه، يكون هناك متوسط انتقال صافي للزخم والطاقة بين إشعاع الليزر والذرة.

5a	اكتب متوسط التغير في طاقة الذرة $\Delta\varepsilon$ بعد عملية كاملة لامتصاص فوتون واحد ثم انبعثه. 0.2
5b	اكتب متوسط التغير في زخم الذرة Δp بعد عملية كاملة لامتصاص فوتون واحد ثم انبعثه. 0.2

6. انتقال الطاقة والزخم بواسطة حزمة ليزر في الاتجاه $+x$.

اعتبر الآن أن حزمة ليزر ذات تردد ω'_L تسقط على الذرة في الاتجاه $+x$ ، بينما تتحرك الذرة أيضاً في الاتجاه $+x$ بسرعة v . بافتراض تحقق شرط الرنين بين الانتقال الداخلي للذرة وحزمة الليزر، كما تراه الذرة، أجب عن الأسئلة الآتية:

6a	اكتب متوسط التغير في طاقة الذرة $\Delta\varepsilon$ بعد عملية كاملة لامتصاص فوتون واحد ثم انبعثه. 0.3
6b	اكتب متوسط التغير في زخم الذرة Δp بعد عملية كاملة لامتصاص فوتون واحد ثم انبعثه. 0.3

الجزء II: التبديد وأسس الدبس البصري

إلا أن الطبيعة تفرض عدم يقين متأصلاً في العمليات الكمومية. وهكذا، فإن قدرة الذرة على أن تبعث فوتوناً تلقائياً خلال زمن محدود بعد الامتصاص تعني أن شرط الرنين لا يلزم أن يتحقق تماماً كما في المناقشة أعلاه. أي إن ترددي حزمتي الليزر ω_L و ω'_L يمكن أن يأخذا أي قيمة، ومع ذلك يمكن أن تحدث عملية الامتصاص والانبعاث. وتحدث هذه العمليات باحتمالات (كمومية) مختلفة، وكما

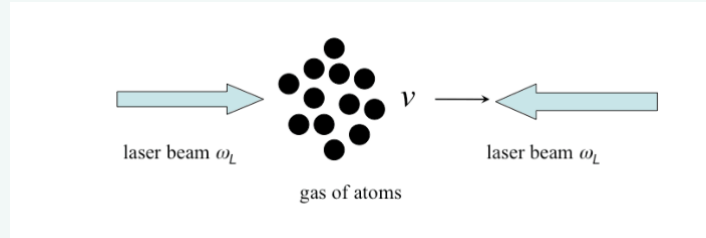
يُتَوَقَّع، يكون الاحتمال أعظمياً عند تحقق شرط الرنين تماماً. ويُسمَّى متوسط الزمن المنقضي بين الامتصاص والانبعاث في عملية واحدة عمر مستوى الطاقة المثار للذرة، ويُرمز إليه بـ Γ^{-1} .

اعتبر مجموعة من N ذرة ساكنة في الإطار المرجعي للمختبر، وحزمة ليزر ذات تردد ω_L تسقط عليها. تمتص الذرات وتبعث باستمرار بحيث يوجد، في المتوسط، N_{exc} ذرة في الحالة المثارة (ومن ثمّ $N - N_{exc}$ ذرة في الحالة الأرضية). ويعطي حساب وفق ميكانيكا الكم النتيجة الآتية:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

حيث ω_0 هو تردد رنين الانتقال الذري، و Ω_R هو ما يُسمَّى تردد رابي؛ وتتناسب Ω_R^2 مع شدة حزمة الليزر. وكما ذُكر أعلاه، يمكنك أن ترى أن هذا العدد يختلف عن الصفر حتى إذا اختلف تردد الرنين ω_0 عن تردد حزمة الليزر ω_L . ويمكن التعبير عن النتيجة السابقة بطريقة أخرى، وهي أن عدد عمليات الامتصاص والانبعاث في وحدة الزمن يساوي $N_{exc}\Gamma$.

اعتبر الحالة الفيزيائية المبينة في الشكل 2، حيث تسقط حزمتا ليزر متعاكستا الانتشار لهما التردد نفسه، ولكنه/عتباطي، ω_L ، على غاز من N ذرة تتحرك في الاتجاه $+x$ بسرعة v .



الشكل 2. تسقط حزمتا ليزر متعاكستا الانتشار لهما التردد نفسه، ولكنه/عتباطي، ω_L ، على غاز من N ذرة تتحرك في الاتجاه $+x$ بسرعة v .

7. القوة التي يؤثر بها الليزران في الحزمة الذرية.

7a	باستخدام المعلومات التي حصلت عليها حتى الآن، أوجد القوة التي يؤثر بها الليزران في الحزمة الذرية. عليك افتراض أن $mv \gg \hbar q$.	1.5
----	--	-----

8. حد السرعات الصغيرة.

افتراض الآن أن سرعة الذرات صغيرة بما يكفي لتتمكن من توسيع القوة حتى الرتبة الأولى في v .

8a	أوجد تعبيراً للقوة التي وجدها في السؤال (7a)، في هذا الحد.	1.5
----	--	-----

باستخدام هذه النتيجة، يمكنك إيجاد الشروط التي يؤدي فيها إشعاع الليزر إلى زيادة سرعة الذرات أو إبطائها أو عدم التأثير فيها إطلاقاً.

8b	اكتب شرط الحصول على قوة موجبة (تزيد سرعة الذرات).	0.25
8c	اكتب شرط الحصول على قوة معدومة.	0.25
8d	اكتب شرط الحصول على قوة سالبة (تبطئ الذرات).	0.25
8e	اعتبر الآن أن الذرات تتحرك بسرعة $-v$ (في الاتجاه $-x$). اكتب شرط الحصول على قوة تُبطئ الذرات.	0.25

9. الدبس البصري.

في حالة القوة السالبة، نحصل على قوة احتكاك مبدّدة. افترض أن غاز الذرات تكون له في البداية، عند $t = 0$ ، سرعة v_0 .

9a	في حد السرعات الصغيرة، أوجد سرعة الذرات بعد تشغيل حزمتي الليزر لمدة τ .	1.5
9b	افتراض الآن أن غاز الذرات في اتزان حراري عند درجة حرارة T_0 . أوجد درجة الحرارة T بعد تشغيل حزمتي الليزر لمدة τ .	0.5

لا يتيح لك هذا النموذج الوصول إلى درجات حرارة منخفضة كيفما تشاء.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نعرّف

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad q = \frac{\omega_L}{c}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2.$$

وللجزء II، نعرّف

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L, \quad D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2, \quad \alpha = \frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 \Delta}{D^2}.$$

نعتبر أن للحزمتين القيمة نفسها لـ Ω_R .

تحتفظ الكميات المتعلقة بالفوتونات أدناه بتصحيح دوبلر الأول. وتحتفظ الكميات المتعلقة بالذرة بتصحيح الارتداد من الرتبة الأولى، مع إهمال حواصل ضرب v/c و $\hbar q/(mv)$. وتُعرض في الحل تصحيحات الزخم الصغيرة قبل هذا القطع. وتُهمل طاقات الذرة طاقة السكون الثابتة.

$$\bullet \text{ 1a : } \omega_L + qv = \omega_0 \text{ أو بصورة مكافئة } \omega_L(1 + \beta) = \omega_0.$$

$$\bullet \text{ 1b : } p_{at} = mv - \hbar q.$$

$$\bullet \text{ 1c : } \varepsilon_{at} = K + \hbar\omega_L = K + \hbar\omega_0 - \hbar qv.$$

$$\bullet \text{ 2a : } \varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 - \beta) \simeq \hbar\omega_L.$$

$$\bullet \text{ 2b : } p_{ph} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q.$$

$$\bullet \text{ 2c : } p_{at} = mv.$$

$$\bullet \text{ 2d : } \varepsilon_{at} = K.$$

$$\bullet \text{ 3a : } \varepsilon_{ph} = \hbar\omega_0(1 + \beta) \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta).$$

$$\bullet \text{ 3b : } p_{ph} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta).$$

$$\bullet \text{ 3c : } p_{at} \simeq mv - 2\hbar q.$$

$$\bullet \text{ 3d : } \varepsilon_{at} \simeq K - 2\hbar qv.$$

$$\bullet \text{ 4a : } \langle \varepsilon_{ph} \rangle = \hbar\omega_0.$$

$$\bullet \text{ 4b : } \langle p_{ph} \rangle = \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \hbar q\beta.$$

$$\bullet \text{ 4c : } \langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar qv.$$

$$\bullet \text{ 4d : } \langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q.$$

$$\bullet \text{ 5a : } \Delta\varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar qv.$$

$$\bullet \text{ 5b : } \Delta p \simeq -\hbar q.$$

$$\bullet \text{ 6a : } \Delta\varepsilon = +\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq +\hbar q'v.$$

$$\bullet \text{ 6b : } \Delta p \simeq +\hbar q'.$$

$$\bullet \text{ 7a : }$$

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

• 8a:

$$F(v) \simeq -N\alpha v = -\frac{4N\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L)}{[(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} v.$$

• 8b: $\omega_L > \omega_0$.

• 8c: $\omega_L = \omega_0$.

• 8d: $\omega_L < \omega_0$.

• 8e: $\omega_L < \omega_0$ ؛ وتكون القوة حينئذٍ في الاتجاه $+x$.

• 9a: $v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}$ ، حيث $\alpha > 0$.

• 9b: $T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}$.

الحل

تعطي علاقة الطاقة بالزخم للفوتون

$$\hbar\omega_L = c\hbar q, \quad q = \frac{\omega_L}{c}.$$

نكتب المعلمتين الصغيرتين على الصورة

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1, \quad \eta = \frac{\hbar q}{mv} \ll 1.$$

طاقة الارتداد $(\hbar q)^2/(2m)$ من الرتبة الثانية في η بالنسبة إلى الطاقة الحركية الابتدائية للذرة، لذا تُهمل. والتغير في سرعة الذرة عقب الامتصاص هو $-\hbar q/m$ ؛ وإسهامه في عامل دوبلر هو

$$\frac{\hbar q}{mc} = \eta\beta,$$

وهو يُهمل أيضًا.

وعليه، عند حساب ترددات الفوتونات المنبعثة، يمكن إسناد السرعة v إلى الذرة الباعثة. وتُعرض تصحيحات الزخم من الرتبة $\hbar q\beta = mv\eta\beta$ حيث يكون ذلك مفيداً، لكنها تُهمل في نتائج ارتداد الذرة من الرتبة الأولى.

1a. شرط الرنين

بالنسبة إلى فوتون ينتشر في الاتجاه $-x$ ، يكون التردد الذي تقيسه ذرة تتحرك في الاتجاه $+x$ ، حتى الرتبة الأولى،

$$\omega_{\text{atom}} = \omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_L + qv.$$

يتطلب الرنين أن يساوي هذا التردد ω_0 :

$$\boxed{\omega_L + qv = \omega_0}, \quad \boxed{\omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \omega_0}.$$

ويمكن الحصول على ذلك أيضًا من حفظ الطاقة:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0.$$

يؤدي إهمال طاقة الارتداد إلى الشرط نفسه.

1b. زخم الذرة بعد الامتصاص

يعطي حفظ الزخم

$$\boxed{p_{\text{at}} = mv - \hbar q}.$$

1c. طاقة الذرة بعد الامتصاص

تكتسب الذرة طاقة الفوتون الساقط:

$$\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L.$$

وبصورة مكافئة، بجمع طاقتها الحركية والداخلية،

$$\varepsilon_{at} = \frac{(mv - \hbar q)^2}{2m} + \hbar\omega_0 \simeq \left[\frac{1}{2}mv^2 - \hbar qv + \hbar\omega_0 \right].$$

يجعل شرط الرنين هذين التعبيرين متساويين حتى الرتبة المحتفظ بها.

في أسئلة الانبعاث، ليرمز $s = +1$ إلى فوتون منبعث في الاتجاه $+x$ ، و $s = -1$ إلى فوتون منبعث في الاتجاه $-x$. بإهمال الارتداد في تردد الانتقال، تكون طاقته في إطار سكون الذرة الباعثة $\hbar\omega_0$. ويعطي تحويل دوبلر من الرتبة الأولى

$$\varepsilon_{ph}^{(s)} = \hbar\omega_0(1 + s\beta), \quad p_{ph}^{(s)} = s \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + s\beta).$$

2a. طاقة الفوتون عند الانبعاث في الاتجاه $-x$

بوضع $s = -1$ ،

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} = \hbar\omega_0(1 - \beta).$$

وبما أن

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{1 + \beta} \simeq \omega_0(1 - \beta),$$

فإن ذلك يعطي

$$\varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq \hbar\omega_L.$$

2b. زخم الفوتون عند الانبعاث في الاتجاه $-x$

باستخدام $p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c$ ،

$$p_{ph}^{(-)} = -\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) \simeq -\hbar q.$$

2c. زخم الذرة بعد الانبعاث في الاتجاه $-x$

يعطي حفظ الزخم خلال العملية الكاملة

$$p_{at}^{(-)} = mv - \hbar q - p_{ph}^{(-)} \simeq mv - \hbar q + \hbar q.$$

ومن ثمّ

$$p_{at}^{(-)} = mv.$$

2d. طاقة الذرة بعد الانبعاث في الاتجاه $-x$

يحمل الفوتون المنبعث الطاقة التي قدّمها الفوتون الممتص:

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = K + \hbar\omega_L - \varepsilon_{ph}^{(-)} \simeq K.$$

إذن

$$\varepsilon_{at}^{(-)} = \frac{1}{2}mv^2.$$

3a. طاقة الفوتون عند الانبعاث في الاتجاه $+x$

عند $s = +1$ ،

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(+)} = \hbar\omega_0(1 + \beta)}.$$

وباستخدام $\omega_0 = \omega_L(1 + \beta)$

$$\boxed{\varepsilon_{ph}^{(+)} \simeq \hbar\omega_L(1 + 2\beta)}.$$

3b. زخم الفوتون عند الانبعاث في الاتجاه $+x$

الزخم موجب:

$$\boxed{p_{ph}^{(+)} = \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \simeq \hbar q(1 + 2\beta)}.$$

3c. زخم الذرة بعد الانبعاث في الاتجاه $+x$

يعطي حفظ الزخم، مع الاحتفاظ مؤقتاً بتصحيح دوبلر للفوتون،

$$p_{at}^{(+)} = mv - \hbar q - \hbar q(1 + 2\beta) = mv - 2\hbar q - 2\hbar q\beta.$$

الحد الأخير من الرتبة النسبية $\eta\beta$ في زخم الذرة. وبإهمال هذا التصحيح المختلط،

$$\boxed{p_{at}^{(+)} \simeq mv - 2\hbar q}.$$

3d. طاقة الذرة بعد الانبعاث في الاتجاه $+x$

تعود الذرة إلى حالتها الأرضية. ويعطي حفظ الطاقة

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at}^{(+)} &= K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &\simeq K + \hbar\omega_0(1 - \beta) - \hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= K - 2\hbar\omega_0\beta.\end{aligned}$$

ضمن الدقة المحتفظ بها للكميات الذرية،

$$\boxed{\varepsilon_{at}^{(+)} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - 2\hbar qv}.$$

ويمكن الحصول على ذلك أيضاً بتوسيع

$$\frac{(mv - 2\hbar q)^2}{2m} = K - 2\hbar qv + \frac{2\hbar^2 q^2}{m}$$

وإهمال حد الارتداد التربيعي.

4a. متوسط طاقة الفوتون المنبعث

للجهتين احتمالان متساويان:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{ph} \rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 - \beta) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(1 + \beta) \\ &= \boxed{\hbar\omega_0}.\end{aligned}$$

4b. متوسط زخم الفوتون المنبعث

بأخذ متوسط الزخمين مع مراعاة إشارتهما،

$$\begin{aligned}\langle p_{ph} \rangle &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar\omega_0}{c}(1 - \beta) + \frac{\hbar\omega_0}{c}(1 + \beta) \right] \\ &= \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}} \simeq \boxed{\hbar q \beta}.\end{aligned}$$

على الرغم من تساوي احتمالي الاتجاهين، تختلف طاقتا الفوتونين في المختبر. ولذلك يكون متوسط زخمهما في المختبر صغيراً وموجباً. وبالنسبة إلى زخم الذرة، يكون هذا المتوسط من الرتبة

$$\frac{\langle p_{ph} \rangle}{mv} \simeq \eta \beta.$$

لذلك يُهمل في تغيرات زخم الذرة من الرتبة الأولى أدناه.

4c. متوسط طاقة الذرة

باستخدام نتيجتي 2d و 3d،

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = \frac{1}{2} K + \frac{1}{2} (K - 2\hbar q v).$$

ومن ثم

$$\boxed{\langle \varepsilon_{at} \rangle \simeq K - \hbar q v}.$$

وبصورة مكافئة،

$$\langle \varepsilon_{at} \rangle = K + \hbar\omega_L - \hbar\omega_0.$$

4d. متوسط زخم الذرة

قبل إهمال التصحيح المختلط، يعطي حفظ الزخم

$$\langle p_{at} \rangle = mv - \hbar q - \langle p_{ph} \rangle = mv - \hbar q - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

إن، حتى الرتبة الأولى المطلوبة لارتداد الذرة،

$$\boxed{\langle p_{at} \rangle \simeq mv - \hbar q}.$$

5a. متوسط التغير في طاقة الذرة

ب طرح الطاقة الابتدائية،

$$\Delta \varepsilon = \langle \varepsilon_{at} \rangle - K = \hbar(\omega_L - \omega_0).$$

يعطي شرط الرنين

$$\boxed{\Delta \varepsilon = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c} \simeq -\hbar q v}.$$

تكون طاقة الفوتون المنبعث، في المتوسط، أكبر من طاقة الفوتون الممتص. ويأتي هذا الفرق من الطاقة الحركية للذرة.

5b. متوسط التغير في زخم الذرة

ب طرح الزخم الابتدائي من نتيجة 4d نحصل على

$$\boxed{\Delta p \simeq -\hbar q}.$$

والتصحيح الأصغر قبل القطع هو

$$-\langle p_{ph} \rangle = -\frac{\hbar\omega_0 v}{c^2}.$$

حتى الرتبة الأولى للارتداد، يحقق تغيرا الطاقة والزخم العلاقة

$$\Delta\varepsilon \simeq v \Delta p.$$

6a. تغير الطاقة للليزر ينتشر في الاتجاه $+x$

تتحرك الذرة الآن مبتعدةً عن الضوء الساقط. وشرط الرنين هو

$$\omega'_L \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0,$$

ومن ثمَّ

$$\omega'_L \simeq \omega_0(1 + \beta).$$

يبقى متوسط طاقة الفوتون المنبعث $\hbar\omega_0$. لذلك

$$\Delta\varepsilon = \hbar(\omega'_L - \omega_0) = \boxed{\frac{\hbar\omega_0 v}{c}} \simeq \boxed{\hbar q' v}, \quad q' = \frac{\omega'_L}{c}.$$

تكتسب الذرة طاقة حركية.

6b. تغير الزخم للليزر ينتشر في الاتجاه $+x$

يقدم الفوتون الممتص زخمًا مقداره $\hbar q'$. وبالتالي،

$$\Delta p = \hbar q' - \frac{\hbar\omega_0 v}{c^2} \simeq \boxed{+\hbar q'}.$$

الحد الثاني المُهمَل هو، مرة أخرى، تصحيح مختلط من دوپلر والارتداد في زخم الذرة.

7a. القوة الناتجة عن حزمتي الليزر

نستخدم قانون التشتت المعطى لكل حزمة على حدة، مع اعتبار شدتيهما، ومن ثمَّ ترددي رابي لهما، متساويتين.

لنرمز بـ $+$ إلى الحزمة المنتشرة في الاتجاه $+x$ ، وبـ $-$ إلى الحزمة المنتشرة في الاتجاه $-x$. الترددان اللذان تراهما الذرات المتحركة هما

$$\omega_{\text{atom},+} = \omega_L - qv, \quad \omega_{\text{atom},-} = \omega_L + qv.$$

ومن ثمَّ يكون انحرافهما عن تردد الانتقال الذري

$$\omega_0 - \omega_{\text{atom},+} = \Delta + qv, \quad \omega_0 - \omega_{\text{atom},-} = \Delta - qv.$$

العددان الكليان لأحداث التشتت في وحدة الزمن هما

$$R_+(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2},$$

$$R_-(v) = \frac{N\Gamma\Omega_R^2}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2}.$$

حتى الرتبة الأولى للارتداد، ينقل كل حدث زخمًا مقداره $\hbar q$ أو $-\hbar q$ ، على الترتيب. لذلك

$$F(v) = \hbar q R_+(v) - \hbar q R_-(v),$$

مما يعطي

$$F(v) = N\hbar q \Gamma \Omega_R^2 \left[\frac{1}{(\Delta + qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} - \frac{1}{(\Delta - qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \right].$$

هذه هي القوة المؤثرة في جميع الذرات البالغ عددها N . أما القوة المؤثرة في ذرة واحدة فهي F/N .

يُحتفظ بإزاحة دوپلر qv في احتمالات التشتت؛ فقد تكون كبيرة مقارنة بعرض خط الانتقال حتى عندما تكون v/c صغيرة جدًا.

8a. التوسيع عند السرعات الصغيرة

نضع

$$D = \Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2.$$

عندما تكون qv صغيرة بما يكفي،

$$\frac{1}{(\Delta \pm qv)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2} \simeq \frac{1}{D} \mp \frac{2\Delta qv}{D^2}.$$

على سبيل المثال، يُعدّ $|qv| \ll \sqrt{D}$ شرطاً كافياً لصغر السرعة.

ب طرح التوسيعين،

$$F(v) \simeq N\hbar q\Gamma\Omega_R^2 \left(-\frac{4\Delta qv}{D^2} \right).$$

ومن ثمّ

$$\boxed{F(v) \simeq -N\alpha v}, \quad \boxed{\alpha = \frac{4\hbar q^2\Gamma\Omega_R^2\Delta}{D^2}}.$$

للمعامل α وحدات كتلة مقسومة على زمن، لذا تكون لـ αv وحدات قوة.

8b. القوة الموجبة

عندما $v > 0$ ، تكون جميع العوامل في α موجبة باستثناء Δ . وتتطلب القوة الموجبة

$$\Delta < 0.$$

لذلك

$$\boxed{\omega_L > \omega_0}.$$

هذا هو الانحراف نحو الأزرق.

8c. القوة المعدومة

لشدة غير معدومة وذرة متحركة، يكون شرط الانحراف عن الرنين

$$\Delta = 0,$$

أو

$$\boxed{\omega_L = \omega_0}.$$

يكون معدلاً التشتت حينئذٍ متساويين. وبصورة مستقلة، يقتضي التناظر أيضاً انعدام القوة عند $v = 0$.

8d. القوة السالبة

عندما $v > 0$ ، تتطلب القوة السالبة أن يكون $\alpha > 0$ ، ومن ثمّ

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

هذا هو الانحراف نحو الأحمر. تجعل إزاحة دوبلر الحزمة المنتشرة عكس اتجاه الحركة أقرب إلى الرنين، فتتشتت بدرجة أكبر.

8e. إبطاء الذرات المتحركة في الاتجاه $-x$

عند السرعة $-v$ ، حيث $v > 0$ ،

$$F(-v) = +N\alpha v.$$

يتطلب الإبطاء قوة في الاتجاه $+x$ ، لذا يلزم مرة أخرى أن يكون $\alpha > 0$. وعليه

$$\boxed{\omega_L < \omega_0}.$$

يُنتج الانحراف نحو الأحمر قوة تعاكس الحركة في أيّ من الاتجاهين.

9a. السرعة بعد زمن τ

عند الانحراف نحو الأحمر، يكون $\alpha > 0$. الكتلة الكلية للغاز هي Nm ، لذا يعطي قانون نيوتن الثاني

$$Nm \frac{dv}{dt} = -N\alpha v.$$

يُختزل العامل N :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v.$$

بالتكامل مع الشرط $v(0) = v_0$

$$v(\tau) = v_0 e^{-\alpha\tau/m}.$$

وبصورة صريحة،

$$v(\tau) = v_0 \exp \left[-\frac{4\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

ثابت الزمن لتناقص السرعة هو m/α .

9b. درجة الحرارة بعد زمن τ

في نموذج الاحتكاك الحتمي هذا، تُضرب سرعة كل ذرة في

$$e^{-\alpha\tau/m}.$$

لذلك يُضرب تباين السرعات في

$$e^{-2\alpha\tau/m}.$$

للحركة الحرارية أحادية البعد،

$$m \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = k_B T.$$

وبالتالي،

$$T(\tau) = T_0 e^{-2\alpha\tau/m}.$$

وبصورة صريحة،

$$T(\tau) = T_0 \exp \left[-\frac{8\hbar q^2 \Gamma \Omega_R^2 (\omega_0 - \omega_L) \tau}{m [(\omega_0 - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4 + 2\Omega_R^2]^2} \right].$$

لا يمكن استقراء هذا السلوك الأسّي إلى درجات حرارة منخفضة কিفما نشاء. فقد أهمل الحساب إسهامات الارتداد التريبيعية والتقلبات الناتجة عن أحداث التشتت العشوائية. وعلى وجه الخصوص، يتطلب الافتراض $\hbar q \gg mv$ ، عند تطبيقه على سرعة حرارية نموذجية،

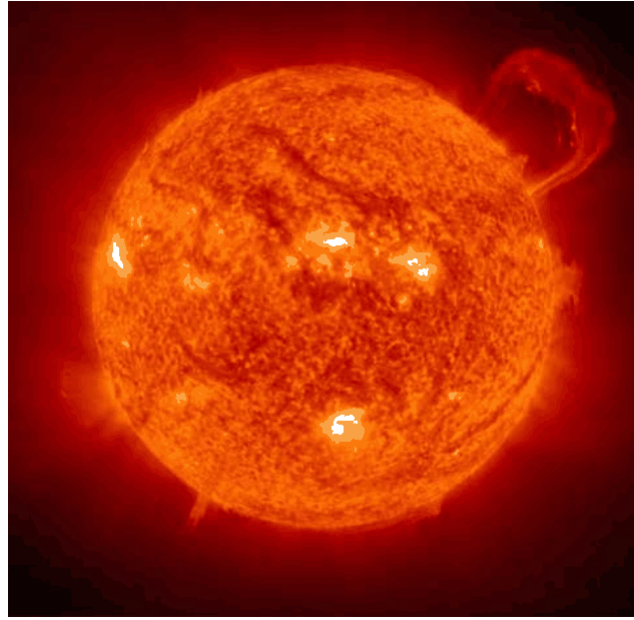
$$k_B T \gg \frac{(\hbar q)^2}{m}.$$

ومع تبريد الذرات، تصبح الحدود المُهملة في هذا النموذج ذات أهمية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: لماذا النجوم كبيرة إلى هذا الحد؟

النجوم كرات من الغاز الساخن. ويضيء معظمها بسبب اندماج الهيدروجين وتحوله إلى هيليوم في أجزائها المركزية. نستخدم في هذه المسألة مفاهيم من الميكانيكا الكلاسيكية وميكانيكا الكم، وكذلك من الكهروستاتيكا والديناميكا الحرارية، لفهم سبب ضرورة أن تكون النجوم كبيرة بما يكفي لتحقيق عملية الاندماج هذه، ولاشتقاق كتلة أصغر نجم يمكنه دمج الهيدروجين ونصف قطره.



الشكل 1. تضيء شمسنا، شأنها شأن معظم النجوم، نتيجة الاندماج النووي للهيدروجين وتحوله إلى هيليوم في أجزائها المركزية.

ثوابت مفيدة
ثابت الجذب العام $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (خطأ مطبوعي في النص الرسمي: s^2 بدلاً من s^{-2})
ثابت بولتزمان $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
ثابت بلانك $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
كتلة البروتون $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
كتلة الإلكترون $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
وحدة الشحنة الكهربائية $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
الثابت الكهربائي (سمحية الفراغ) $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
نصف قطر الشمس $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$
كتلة الشمس $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$

1. تقدير كلاسيكي لدرجة الحرارة في مركز النجوم.

افترض أن الغاز الذي يتكون منه النجم هو هيدروجين مؤين نقي (إلكترونات وبروتونات بأعداد متساوية)، وأنه يسلك سلوك الغاز المثالي. من وجهة النظر الكلاسيكية، لكي يندمج بروتونان، يجب أن يقترب أحدهما من الآخر إلى مسافة 10^{-15} m حتى تصبح القوة النووية الشديدة، وهي قوة تجاذب قصيرة المدى، هي السائدة. ولكن لجعلهما يقتربان، يجب عليهما أولاً التغلب على التأثير التنافري لقوة كولوم. افترض، وفقاً للميكانيكا الكلاسيكية، أن البروتونين (الذين يُعدّان مصدرين نقطيين) يتحركان في اتجاهين متعاكسين، كل منهما بسرعة v_{rms} ، وهي الجذر التربيعي لمتوسط مربع سرعة البروتونات (rms)، في تصادم رأسي أحادي البعد.

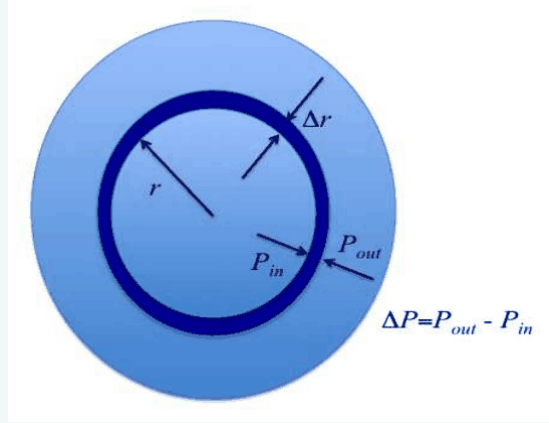
1a	ما درجة حرارة الغاز، T_c ، اللازمة لكي تساوي مسافة أقرب اقتراب بين البروتونين، d_c ، المقدار 10^{-15} m ؟ أعطِ هذه القيمة وجميع القيم العددية في هذه المسألة مقربة إلى رقمين معنويين.
1.5	

2. اكتشاف أن التقدير السابق لدرجة الحرارة غير صحيح.

للتحقق من معقولية التقدير السابق لدرجة الحرارة، نحتاج إلى طريقة مستقلة لتقدير درجة الحرارة المركزية للنجم. إن بنية النجوم معقدة جداً، ولكن يمكننا التوصل إلى فهم مهم لها بوضع بعض الافتراضات. النجوم في حالة اتزان، أي إنها لا تتمدد ولا تنكمش لأن قوة الجاذبية المتجهة إلى الداخل تتوازن مع قوة الضغط المتجهة إلى الخارج (انظر الشكل 2). بالنسبة إلى شريحة من الغاز، تُعطى معادلة الاتزان الهيدروستاتيكي عند مسافة معينة r من مركز النجم بالعلاقة

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

حيث P ضغط الغاز، و G ثابت الجذب العام، و M_r كتلة النجم داخل كرة نصف قطرها r ، و ρ_r كثافة الغاز في الشريحة.



الشكل 2. تكون النجوم في حالة اتزان هيدروستاتيكي، إذ يوازن فرق الضغط الجاذبية.

يمكن الحصول على تقدير لرتبة مقدار درجة الحرارة المركزية للنجم باستخدام قيم المعلمات عند مركز النجم وعند سطحه، بإجراء التقريبات الآتية:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

حيث P_c و P_o هما الضغطان عند مركز النجم وسطحه، على الترتيب. وبما أن $P_c \gg P_o$ ، يمكننا افتراض أن

$$\Delta P \approx -P_c.$$

وفي إطار التقريب نفسه، يمكننا كتابة

$$\Delta r \approx R,$$

حيث R نصف القطر الكلي للنجم، وكذلك

$$M_r \approx M_R = M,$$

حيث M الكتلة الكلية للنجم.

ويمكن تقريب الكثافة بقيمتها عند المركز،

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

يمكنك افتراض أن الضغط هو ضغط غاز مثالي.

2a	أوجد معادلة لدرجة الحرارة عند مركز النجم، T_c ، بدلالة نصف قطر النجم وكتلته والثوابت الفيزيائية فقط. 0.5
----	--

يمكننا الآن استخدام التنبؤ الآتي لهذا النموذج معياراً لصلاحيته:

2b	باستخدام المعادلة التي توصلت إليها في (2a)، اكتب النسبة M/R المتوقعة لنجم بدلالة الثوابت الفيزيائية و T_c فقط. 0.5
2c	استخدم قيمة T_c المستنتجة في القسم (1a)، وأوجد القيمة العددية للنسبة M/R المتوقعة لنجم. 0.5
2d	احسب الآن النسبة $M(Sun)/R(Sun)$ ، وتحقق من أن هذه القيمة أصغر بكثير من القيمة التي وجدتها في (2c). 0.5

3. تقدير لدرجة الحرارة في مركز النجوم باستخدام ميكانيكا الكم

يشير التباين الكبير الذي ظهر في (2d) إلى أن التقدير الكلاسيكي لـ T_c الذي حصلنا عليه في (1a) غير صحيح. ويحل هذا التباين عند أخذ التأثيرات الكمومية في الحسبان؛ فهي تخبرنا بأن البروتونات تسلك سلوك الموجات، وأن البروتون الواحد يكون منتشرًا على امتداد من رتبة λ_p ، وهو طول موجة دي برولي. ويعني ذلك أنه إذا كانت d_c ، وهي مسافة أقرب اقتراب بين البروتونين، من رتبة λ_p ، فإن البروتونين يتداخلان بالمعنى الكوموي ويمكنهما الاندماج.

1.0	3a	بافتراض أن $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ هو الشرط الذي يسمح بالاندماج، أوجد، لبروتون سرعته v_{rms} ، معادلة لـ T_c بدلالة الثوابت الفيزيائية فقط.
0.5	3b	احسب عددًا قيمة T_c التي حصلت عليها في (3a).
0.5	3c	استخدم قيمة T_c المستنتجة في (3b) لإيجاد القيمة العددية للنسبة M/R المتوقعة لنجم، باستخدام الصيغة المستنتجة في (2b). تحقق من أن هذه القيمة قريبة جدًا من النسبة المرصودة $M(Sun)/R(Sun)$.

وبالفعل، تتبع النجوم الواقعة فيما يُسمى *النسق الأساسي* (التي تدمج الهيدروجين) هذه النسبة تقريبًا عبر نطاق واسع من الكتل.

4. نسبة الكتلة إلى نصف القطر للنجوم.

يشير التوافق السابق إلى صحة المقاربة الكمومية لتقدير درجة الحرارة في مركز الشمس.

0.5	4a	استخدم النتائج السابقة لإثبات أن نسبة الكتلة M إلى نصف القطر R هي نفسها لأي نجم يدمج الهيدروجين، وأنها تعتمد على الثوابت الفيزيائية فقط. أوجد معادلة النسبة M/R للنجم التي تدمج الهيدروجين.
-----	----	---

5. كتلة أصغر نجم ونصف قطره.

تشير النتيجة التي توصلنا إليها في (4a) إلى إمكانية وجود نجوم بأي كتلة ما دامت هذه العلاقة متحققة؛ إلا أن ذلك غير صحيح. من المعروف أن الغاز داخل النجوم العادية التي تدمج الهيدروجين يسلك تقريبًا سلوك الغاز المثالي. ويعني ذلك أن d_e ، وهي *المسافة الفاصلة النمذجية بين الإلكترونات*، أكبر في المتوسط من λ_e ، وهو طول موجة دي برولي النموذجي لها. ولو كانت الإلكترونات أقرب من ذلك، لكانت في حالة تُسمى حالة الانحلال، ولسلكت النجوم سلوكًا مختلفًا. لاحظ الفرق بين طريقتي تعاملنا مع البروتونات والإلكترونات داخل النجم. فبالنسبة إلى البروتونات، ينبغي أن تتداخل موجات دي برولي الخاصة بها تداخلًا وثيقًا عند تصادمها لكي تندمج، أما بالنسبة إلى الإلكترونات فينبغي ألا تتداخل موجات دي برولي الخاصة بها لكي تبقى في حالة غاز مثالي. تزداد الكثافة في النجوم مع تناقص نصف القطر. ومع ذلك، افترض لأغراض هذا التقدير لرتبة المقدار أن كثافتها منتظمة. ويمكنك أيضًا استخدام أن $m_p \gg m_e$.

0.5	5a	أوجد معادلة لـ n_e ، وهو متوسط الكثافة العددية للإلكترونات داخل النجم.
0.5	5b	أوجد معادلة لـ d_e ، وهي المسافة الفاصلة النمذجية بين الإلكترونات داخل النجم.
1.5	5c	استخدم الشرط $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ لكتابة معادلة لنصف قطر أصغر نجم عادي ممكن. اعتبر درجة الحرارة عند مركز النجم درجة حرارة نمذجية لجميع أجزائه الداخلية.
0.5	5d	أوجد القيمة العددية لنصف قطر أصغر نجم عادي ممكن، بالتر وبيوحدات نصف قطر الشمس.
0.5	5e	أوجد القيمة العددية لكتلة أصغر نجم عادي ممكن، بالكيلوغرام وبيوحدات الكتلة الشمسية.

6. اندماج أنوية الهيليوم في النجوم المتقدمة في العمر.

مع تقدم النجوم في العمر، تكون قد دمجت معظم الهيدروجين في لبّها وحولته إلى هيليوم (He)، فتضطر إلى البدء بدمج الهيليوم لتكوين عناصر أثقل كي تستمر في الإضاءة. تحتوي نواة الهيليوم على بروتونين ونيوترونين، لذا فإن شحنتها تساوي ضعفي شحنة البروتون، وكتلتها تساوي تقريبًا أربعة أمثال كتلته. رأينا سابقًا أن $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ هو شرط اندماج البروتونات.

0.5	6a	ضع الشرط المكافئ لأنوية الهيليوم، وأوجد $v_{rms}(He)$ ، وهي الجذر التربيعي لمتوسط مربع سرعة أنوية الهيليوم، و $T(He)$ ، وهي درجة الحرارة اللازمة لاندماج الهيليوم.
-----	----	--

الإجابات

تستخدم جميع النتائج التقريبات المحددة في المسألة. قُرِبت النتائج العددية إلى رقمين معنويين، مع الاحتفاظ بالقيم غير المقربة في الحسابات الوسيطة.

$$.T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = 5.4 \times 10^9 \text{ K} .1a$$

$$.T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR} .2a$$

$$.\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p} .2b$$

$$.\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1} .2c$$

$$.\frac{M_S}{R_S} = 2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} .2d$$

$$.T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} .3a$$

$$.T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K} .3b$$

$$.\frac{M}{R} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1} \simeq 0.84 \frac{M_S}{R_S} .3c$$

$$.\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2} .4a$$

$$.n_e = \frac{3M}{4\pi m_p R^3} .5a$$

$$.d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3} .5b$$

$$.R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2} .5c$$

$$.R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m} = 0.099 R_S .5d$$

$$.M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.083 M_S .5e$$

$$.6a$$

$$v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \epsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}.$$

الحل

1a. درجة الحرارة الكلاسيكية اللازمة للاندماج

بالنسبة إلى غاز مثالي غير نسبي، يعطي مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة الجذر التربيعي لمتوسط مربع سرعة البروتون من خلال

$$\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k T_c.$$

التصادم رأسي، لكن v_{rms} هي الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعة في الغاز ثلاثي الأبعاد.

للبروتونين زحمان متساويان مقدارًا ومتعاكسان اتجاهًا، لذا فإن مركز كتلتهما ساكن. وعند أقرب اقتراب، يتوقف كلاهما لحظيًا. وباعتبار طاقة وضعهما الكهروستاتيكية الابتدائية مهملة، يعطي حفظ الطاقة

$$2 \left(\frac{1}{2} m_p v_{rms}^2 \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}.$$

إذن

$$3kT_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}, \quad \boxed{T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c}}.$$

عند $d_c = 10^{-15} \text{ m}$

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{12\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.4 \times 10^{-23})(10^{-15})},$$

ومن ثم

$$\boxed{T_c = 5.4 \times 10^9 \text{ K}}.$$

2a. درجة الحرارة المركزية من الاتزان الهيدروستاتيكي

باستخدام التقريبات المحددة، بما فيها المقياس الشعاعي المميز $r \simeq R$

$$-\frac{P_c}{R} \simeq -\frac{GM\rho_c}{R^2},$$

ومن ثم

$$P_c \simeq \frac{GM\rho_c}{R}.$$

في الهيدروجين المتأين كليًا، تتساوى الكثافتان العدديتان للبروتونات والإلكترونات. وبإهمال كتلة الإلكترون في الكثافة الكتلية،

$$n_{p,c} = n_{e,c} \simeq \frac{\rho_c}{m_p}.$$

يسهم كلا النوعين في ضغط الغاز المثالي:

$$P_c = (n_{p,c} + n_{e,c})kT_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}.$$

بمساواة عبارتي الضغط واختزال ρ_c ،

$$\boxed{T_c \simeq \frac{GMm_p}{2kR}}.$$

2b. نسبة الكتلة إلى نصف القطر

بإعادة ترتيب نتيجة (2a)،

$$\boxed{\frac{M}{R} \simeq \frac{2kT_c}{Gm_p}}.$$

2c. النسبة المتنبأ بها باستخدام درجة حرارة الاندماج الكلاسيكية

بالتعويض بدرجة الحرارة من (1a)، نحصل على

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d_c} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 Gm_p d_c}.$$

عدديًا،

$$\boxed{\frac{M}{R} = 1.3 \times 10^{24} \text{ kg m}^{-1}}.$$

2d. المقارنة مع الشمس

تعطي القيمتان المعطاتان لكتلة الشمس ونصف قطرها

$$\frac{M_S}{R_S} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^8} = \boxed{2.9 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}}.$$

وباستخدام القيم غير المقربة، تكون المقارنة

$$\frac{(M/R)_{\text{classical}}}{M_S/R_S} = \boxed{4.7 \times 10^2}.$$

إذن نسبة الشمس أصغر بكثير من التنبؤ الكلاسيكي. وفي إطار النموذج الهيدروستاتيكي، تكون درجة حرارة الاندماج الكلاسيكية أعلى بكثير مما ينبغي.

3a. التقدير الكمومي لدرجة حرارة الاندماج

ليوتون يتحرك بسرعة v_{rms} ، يُعطى طول موجة دي برولي بالعلاقة

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$$

تعطي علاقة طاقة التصادم من (1a)

$$d_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2}.$$

وبفرض شرط الاندماج الوارد في المسألة،

$$d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}},$$

نحصل على

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_{rms}^2} = \frac{h}{\sqrt{2} m_p v_{rms}},$$

وبالتالي

$$v_{rms} = \frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h}.$$

باستخدام $m_p v_{rms}^2 = 3kT_c$

$$T_c = \frac{m_p}{3k} \left(\frac{\sqrt{2} q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2.$$

وعليه،

$$\boxed{T_c = \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}}.$$

3b. القيمة العددية لدرجة الحرارة الكمومية

بالتعويض بالثوابت المعطاة،

$$T_c = \frac{(1.7 \times 10^{-27})(1.6 \times 10^{-19})^4}{24\pi^2 (8.9 \times 10^{-12})^2 (1.4 \times 10^{-23})(6.6 \times 10^{-34})^2},$$

وهذا يعطي

$$T_c = 9.7 \times 10^6 \text{ K}.$$

الجزر التربيعي لمتوسط مربع سرعة البروتون الموافق لذلك هو $4.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$.

3c. نسبة الكتلة إلى نصف القطر باستخدام درجة الحرارة الكمومية

باستخدام (2b) مع درجة الحرارة من (3b)،

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} = 2.4 \times 10^{21} \text{ kg m}^{-1}.$$

وتكون النسبة إلى القيمة الشمسية

$$\frac{M/R}{M_S/R_S} = 0.84.$$

إذن التنبؤ أقل من القيمة الشمسية بنحو 16%، وهو توافق وثيق بالنسبة إلى تقريبات رتبة المقدار المستخدمة.

4a. النسبة المشتركة للكتلة إلى نصف القطر

في إطار هذا النموذج، تكون لاندماج الهيدروجين درجة الحرارة المميزة نفسها في كل نجم. وبالجمع بين (2b) و(3a)،

$$\frac{M}{R} = \frac{2k}{Gm_p} \frac{m_p q^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$$

يُختزل العاملان m_p و k :

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$$

وهذا يعتمد على الثوابت الفيزيائية فقط. وفي الأجزاء التالية، نرمز إلى هذه النسبة المشتركة بالعلاقة

$$A \equiv \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}, \quad M = AR.$$

5a. متوسط الكثافة العددية للإلكترونات

يقابل كل بروتون هيدروجين إلكترون واحد. وبإهمال كتلة الإلكترون،

$$N_e = N_p \simeq \frac{M}{m_p}.$$

لنجم كروي منتظم الكثافة حجمه $V = 4\pi R^3/3$ ،

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{3M}{4\pi m_p R^3}.$$

5b. المسافة الفاصلة النموذجية بين الإلكترونات

الحجم النموذجي المتاح لكل إلكترون هو $1/n_e$. وبأخذ جذره التكعيبي بوصفه المسافة الفاصلة المميزة،

$$d_e \simeq n_e^{-1/3} = \left(\frac{4\pi m_p R^3}{3M} \right)^{1/3}.$$

5c. نصف قطر أصغر نجم عادي

يعطي مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة للإلكترونات

$$m_e v_{e,rms}^2 = 3kT_c.$$

ومن ثم يكون طول موجة دي برولي المميز لها

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_{e,rms}} = \frac{h}{\sqrt{3m_e k T_c}}.$$

ويصبح الشرط المحدد لتجنب انحلال الإلكترونات

$$d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{6m_e k T_c}}.$$

باستخدام $M = AR$ في صيغة المسافة الفاصلة،

$$d_e^3 = \frac{4\pi m_p R^2}{3A}.$$

إذن، على امتداد علاقة الكتلة بنصف القطر في النموذج، تتناقص المسافة الفاصلة وفقاً لـ $R^{2/3}$. ويتحقق أصغر نصف قطر مسموح به عند المساواة:

$$\frac{4\pi m_p R_{\min}^2}{3A} = \left(\frac{h}{\sqrt{6m_e k T_c}} \right)^3.$$

ومن ثم

$$R_{\min}^2 = \frac{3Ah^3}{4\pi m_p (6m_e k T_c)^{3/2}}.$$

نعوض أولاً بـ $A = 2kT_c/(Gm_p)$:

$$R_{\min}^2 = \frac{h^3}{4\pi G m_p^2 m_e^{3/2} \sqrt{6kT_c}}.$$

من (3a)،

$$\sqrt{6kT_c} = \frac{q^2 \sqrt{m_p}}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

وعليه،

$$R_{\min}^2 = \frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}},$$

أو

$$R_{\min} = \left(\frac{\epsilon_0 h^4}{2Gq^2 m_p^{5/2} m_e^{3/2}} \right)^{1/2}.$$

عند نصف قطر أصغر على امتداد $M = AR$ ، ستتداخل موجات الإلكترونات وفقاً للمعيار المذكور، ولن يعود وصف الغاز المثالي المفترض صالحاً.

5d. القيمة العددية لأصغر نصف قطر

يعطي التعويض

$$R_{\min} = 6.9 \times 10^7 \text{ m}.$$

وبقسمة النتيجة غير المقربة على نصف قطر الشمس المعطى،

$$\frac{R_{\min}}{R_S} = 0.099.$$

إذن يبلغ نصف قطر أصغر نجم عادي في هذا النموذج نحو عُشر نصف قطر الشمس.

5e. القيمة العددية لأصغر كتلة

بما أن $M = AR$ مع ثبات القيمة الموجبة لـ A ، فإن أصغر نصف قطر يعطي أيضاً أصغر كتلة:

$$M_{\min} = AR_{\min} = \frac{q^4 R_{\min}}{12\pi^2 \varepsilon_0^2 G h^2}.$$

عددياً،

$$\boxed{M_{\min} = 1.7 \times 10^{29} \text{ kg}}, \quad \boxed{\frac{M_{\min}}{M_S} = 0.083}.$$

6a. اندماج الهيليوم

لنواة الهيليوم كتلة $m_{He} \simeq 4m_p$ وشحنة $Q_{He} = 2q$. وطول موجة دي برولي لها هو

$$\lambda_{He} = \frac{h}{4m_p v_{rms}(He)}.$$

شرط الاندماج الموافق هو

$$\boxed{d_c(He) = \frac{\lambda_{He}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{4\sqrt{2} m_p v_{rms}(He)}}.$$

لنواتي هيليوم تقتربان إحداها من الأخرى بسرعتين متساويتين مقداراً ومتعاكستين اتجاهًا، ومقدار كل منهما هو الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعة، يعطي حفظ الطاقة

$$4m_p v_{rms}(He)^2 = \frac{(2q)^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c(He)}.$$

بالتعويض بشرط الاندماج والتبسيط،

$$\boxed{v_{rms}(He) = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h}}.$$

وهذه تساوي أربعة أمثال سرعة البروتون التي حصلنا عليها في (3a)، لذا

$$\boxed{v_{rms}(He) = 2.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}}.$$

يعطي مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة الآن

$$T(He) = \frac{4m_p v_{rms}(He)^2}{3k}.$$

بما أن الكتلة أكبر بأربعة أمثال والسرعة أكبر بأربعة أمثال،

$$T(He) = 4(4^2)T_c = 64T_c,$$

حيث T_c درجة حرارة اندماج الهيدروجين من (3b). وعليه،

$$\boxed{T(He) = \frac{8m_p q^4}{3\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2} = 6.2 \times 10^8 \text{ K}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.