

IPhO 2008

理论题与解答 · 越南河内 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2008/

题目 1: 水力舂米碓

A. 引言

稻米是越南大多数人的主要食物。要将稻谷加工成白米，需要去除稻壳（这一过程称为“砻谷”），并去除糠层（“碾米”）。越南北部丘陵地区溪流众多，当地居民使用水力舂米碓去除糠层。图 1 展示了这样一台舂米碓，图 2 展示了它的工作原理。

B. 结构与运行

1. 结构。

图 1 所示的舂米碓由以下部分组成：

臼，基本上就是一个盛米的木制容器。

杠杆，由一端粗、一端细的树干制成，可以绕水平轴转动。在杠杆较细的一端垂直安装一根**杵**。杵的长度使得杠杆处于水平位置时，杵恰好接触臼中的米。杠杆较粗的一端被凿空，形成水斗。水斗的形状对舂米碓的运行至关重要。

2. 运行模式

舂米碓有两种模式。

工作模式。 在这种模式下，舂米碓经历图 2 所示的运行循环。

舂米功能来自图 2 的 f) 阶段中杵对米所做的功。如果由于某种原因，杵始终不接触米，我们就称舂米碓不工作。

杠杆抬起时的静止模式。 在运行循环的 c) 阶段（图 2），随着倾角 α 增大，水斗中的水量减少。在某一时刻，水量恰好足以平衡杠杆的重量。将这一时刻的倾角记为 β 。如果将杠杆置于角度 β ，且初始角速度为零，那么杠杆将永远保持在这一位置。这就是杠杆抬起时的静止模式。这一位置的稳定性取决于流入水斗的水流量 Φ 。如果 Φ 超过某个值 Φ_2 ，这一静止模式就是稳定的，舂米碓便无法处于工作模式。

换言之， Φ_2 是使舂米碓不工作的最小流量。



图 1
一台水力舂米碓

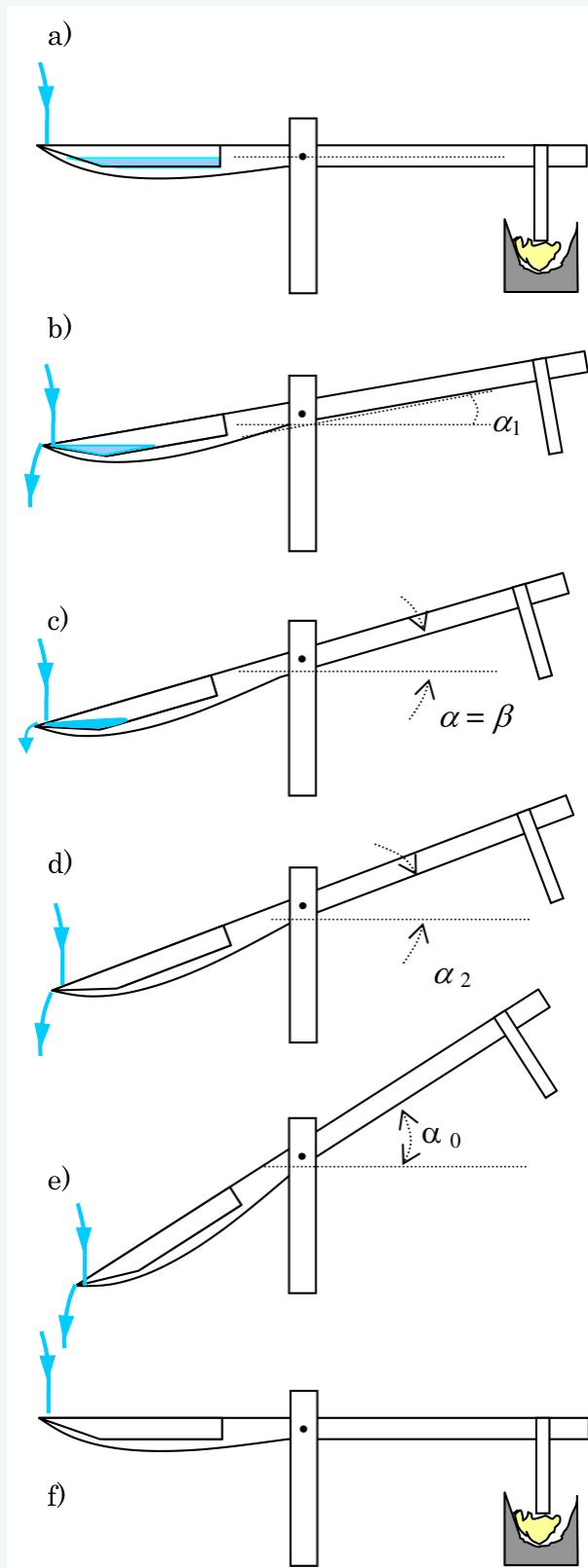


图 2

a) 起初，水斗中没有水，杵落在臼上。水以较小的流量流入水斗，但在一段时间内，杠杆仍保持水平。

b) 到某一时刻，水量足以使杠杆抬起。由于倾斜，水涌向水斗较远的一侧，使杠杆更快地倾转。

当 $\alpha = \alpha_1$ 时，水开始流出。

- c) 随着角度 α 增大，水开始流出。在某一特定倾角 $\alpha = \beta$ 处，合力矩为零。
- d) α 继续增大，水继续流出，直至水斗中的水全部流尽。
- e) 由于惯性， α 继续增大。由于水斗的形状，水落入水斗后立即流出。杠杆在惯性作用下继续运动，直至 α 达到最大值 α_0 。
- f) 水斗中没有水时，杠杆在自身重力作用下返回初始水平位置。杵向臼（其中盛有米）舂击一次，新的循环随即开始。

C. 问题

考虑一台具有以下参数的水力舂米碓（图 3）

杠杆的质量（包括杵，但不包括水）为 $M = 30 \text{ kg}$,

杠杆的质心为 G 。杠杆绕轴 T 转动（该轴在图中投影为点 T ）。

杠杆绕 T 的转动惯量为 $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

当水斗中有水时，水的质量记为 m ，水体的质心记为 N 。

杠杆相对于水平轴的倾角为 α 。

舂米碓和水斗的主要长度尺寸如图 3 所示。

忽略转轴处的摩擦以及水落到水斗上所产生的力。在本题中，近似认为水面始终保持水平。

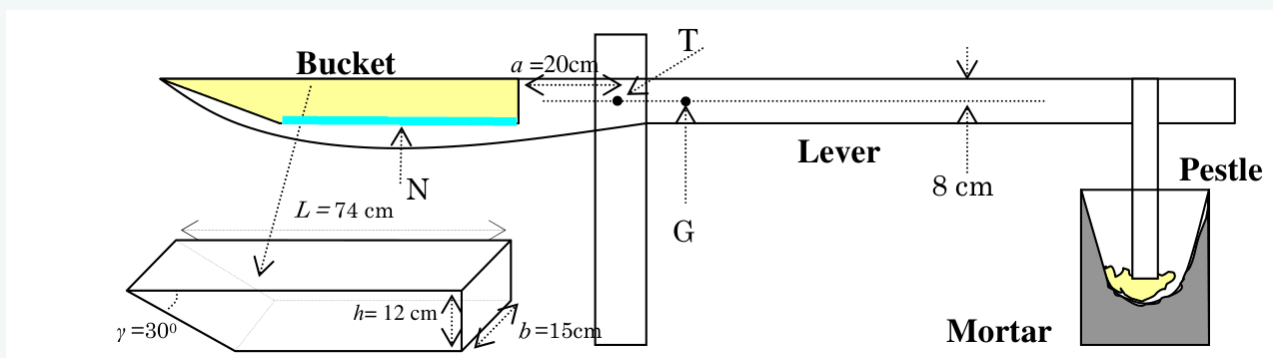


图 3 舂米碓的结构与尺寸

1. 舂米碓的结构

起初，水斗为空，杠杆处于水平位置。随后，水流入水斗，直至杠杆开始转动。此时水斗中的水量为 $m = 1.0 \text{ kg}$ 。

1.1. 求杠杆质心 G 到转轴 T 的距离。已知水斗为空时， GT 是水平的。

1.2. 当杠杆与水平轴之间的夹角达到 α_1 时，水开始从水斗中流出。当这一夹角为 α_2 时，水斗中的水完全流尽。

求 α_1 和 α_2 。

1.3. 设 $\mu(\alpha)$ 为杠杆和水斗中水的重力产生的合力矩（相对于轴 T ）。当 $\alpha = \beta$ 时， $\mu(\alpha)$ 为零。求 β 以及此时水斗中水的质量 m_1 。

2. 工作模式的参数

设水以恒定且较小的流量 Φ 流入水斗。杠杆运动过程中流入水斗的水量可以忽略。在本部分中，忽略工作循环中转动惯量的变化。

- 2.1. 画出一个运行循环中力矩 μ 随角度 α 变化的示意图，即 $\mu(\alpha)$ 的图像。明确写出角度为 α_1 、 α_2 和 $\alpha = 0$ 时 $\mu(\alpha)$ 的值。
- 2.2. 根据 2.1. 中得到的图像，讨论 $\mu(\alpha)$ 所产生的总能量 W_{total} 和杵传递给米的功 W_{pounding} 的数值，并给出其几何解释。
- 2.3. 根据 μ 随 α 变化的图像，估算 α_0 和 W_{pounding} （假设流入和流出水斗的水的动能可以忽略）。如果能简化计算，可以用折线代替曲线。

3. 静止模式

设水以恒定流量 Φ 流入水斗，但杠杆运动过程中流入水斗的水量不能忽略。

3.1. 假设水斗始终处于溢水状态，

3.1.1. 画出 $\alpha = \beta$ 附近力矩 μ 随角度 α 变化的示意图。杠杆在 $\alpha = \beta$ 处属于哪一类平衡？

3.1.2. 当 $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ 且 $\Delta\alpha$ 很小时，求力矩 $\mu(\alpha)$ 作为 $\Delta\alpha$ 的函数的解析表达式。

3.1.3. 写出杠杆从位置 $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ 很小) 以零初速度开始运动时的运动方程。证明该运动可以很好地近似为简谐振动。计算周期 τ 。

3.2. 对于给定的 Φ ，只有当杠杆运动足够缓慢时，水斗才能始终处于溢水状态。简谐振动的振幅存在一个取决于 Φ 的上限。求使杠杆能够以 1° 的振幅做简谐振动所需的 Φ 的最小值 Φ_1 （单位为 kg/s ）。

3.3. 假设 Φ 足够大，使得杠杆自由运动、倾角从 α_2 减小至 α_1 的过程中，水斗始终处于溢水状态。然而，如果 Φ 过大，舂米碓就无法工作。假设杠杆的运动为简谐振动，估算使舂米碓不工作的最小流量 Φ_2 。

题目译自官方英文原文。

答案

正力矩表示使 α 增大的力矩。数值结果采用 $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ 和 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 。

- 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$ 。
- 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$ 。
- 1.3. $\beta = 23.57^\circ$, $m_1 = 0.605 \text{ kg}$ 。
- 2.1. 在上升行程中，

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}, \quad \mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}.$$

空斗返回分支为 $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ ，终点值为 -4.62 N m 。在 $\alpha = 0$ 处注水，将这一数值连接至零。

- 2.2. $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$ 是循环所围成的面积。舂米功为

$$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0,$$

忽略水带走的动能时，它等于 W_{total} 。

- 2.3. $\alpha_0 \approx 37.5^\circ$, $W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}$ 。
- 3.1.1. 稳定平衡；力矩在 β 处以负斜率通过零点。

- 3.1.2. 当 $\Delta\alpha$ 以弧度计时,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

- 3.1.3. $\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau)$, 其中 $\tau \approx 3.26 \text{ s}$ 。
- 3.2. $\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}$ 。
- 3.3. 使用极限振幅 $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$,

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

平衡位置为 β ; α_1 是本估算中采用的下转折点。

解答

将使运动开始的水量记为 $m_0 = 1.0 \text{ kg}$, 并记 $r = GT$ 。由图 3,

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

支点位于水斗上缘下方 $d = 0.08 \text{ m}$ 处。我们采用标准值 $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ 和 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, 题目中并未给出这些数值。

引入以下便于使用的简记:

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. 杠杆质心的位置

水斗平底的长度为

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m}.$$

设 η 为初始水面相对于该底面的深度。水体的纵截面为梯形, 因此

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

于是,

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0/(\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m}.$$

沿水斗从内侧竖直壁朝外侧斗口测量坐标 u 。距底面高度为 y 的水平条带从 $u = 0$ 延伸至 $u = \ell + qy$ 。因此, 由各条带的形心得

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

令 $w = \ell + q\eta$, 上式变为

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m}.$$

在杵与米刚刚脱离接触的瞬间, 杵所受的支持力消失。两个重力矩平衡:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

因此

$$r = \frac{m_0}{M}(a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

定义相应的力矩尺度

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m}.$$

1.2. 溢水的开始与结束

采用固连于水斗的坐标：

- s 从外侧斗口沿上缘向内测量；
- z 表示该上缘下方的深度。

倾斜端面为 $z = s \tan \gamma$ ，平底为 $z = h$ ，支点的坐标为 (R, d) 。

当水达到外侧斗口时，水平水面通过 $(0, 0)$ 。在水斗坐标系中，水面方程为

$$z = s \tan \alpha.$$

此时留在斗中的水具有三角形纵截面，其顶点为

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

因此，水的质量为

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2}(\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

对于 $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ 的水量，当这一容水质量等于 m_0 时，水开始溢出：

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

所以

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

当水平自由液面与倾斜端面平行时，水完全流尽：

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

这一三角形构型与给定尺寸相符：在 α_1 处，其内侧端点为 $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$ 。

1.3. 平衡角与剩余水的质量

溢水时三角形截面的形心为

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

给定尺寸具有一个有用的性质：

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

因此， TN 沿杠杆方向，水的重力的水平力臂为

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

溢水时的合力矩为

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

令 $v = \cot \beta - q$ 。平衡条件变为

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

位于物理范围 $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ 内的根为

$$v = 0.560329.$$

因此

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

且

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

后面需要用到的距离为

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m}.$$

2.1. 整个工作循环中的力矩

对于水质心的任意位置 (s_N, z_N) ，水的重力的水平力臂为

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

因此，在溢水之前，

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

水体最初具有梯形截面。当水不再接触内侧竖直壁时，截面变为三角形。这发生在

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

对于 $\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$ ，定义

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b(\cot \alpha - q)}}.$$

这是沿垂直于水斗底面的方向测量的三角形高度。其形心为

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

这些表达式与式 (3) 共同确定了溢水前的上升分支。在 α_1 与 α_2 之间，使用式 (2)。

水斗排空后，不再有水产生的力矩：

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

可以根据以下数值绘制图像：

α	上升行程力矩 (N m)	空斗返回力矩 (N m)
0°	刚抬起时为 0	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602

α	上升行程力矩 (N m)	空斗返回力矩 (N m)
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

完整循环具有以下特征：

1. 在 $\alpha = 0$ 处，注水使重力的合力矩从 $-K$ 增加至零。这在力矩—角度图中是一条竖直线段。在这一阶段，臼的支持力使杠杆保持静止。
2. 抬起过程中，力矩从零增大至 α_1 处的最大值 +2.687 N m。
3. 溢水使力矩减小，在 β 处经过零点，并在 α_2 处达到 -4.001 N m。
4. 从 α_2 到最大角度 α_0 ，以及整个空斗返回过程中，力矩均遵循 $-K \cos \alpha$ 。当 $\alpha \geq \alpha_2$ 时，这些上行与返回曲线重合。

特别地， $\mu(0)$ 在不同阶段具有不同的值：刚抬起时为零，水斗为空时为 -4.620 N m。

2.2. 功及其几何解释

转动过程中所做的微元功为

$$dW = \mu d\alpha,$$

其中角度以弧度计。

一个循环中的总功为

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

在 α_2 以上，两分支重合，因此

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

从几何上看，这是上升分支、空斗返回分支以及 $\alpha = 0$ 处的注水线段所围成的面积。

空斗杠杆从 α_0 处由静止开始返回。其损失的重力势能转化为撞击时传递的动能：

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

它等于从 0 到 α_0 之间，空斗返回曲线与角度轴所围成的面积，取正值。

如果流出的水带走动能，这部分能量就会使循环所做的功中传递给米的比例减小。在 2.3 中忽略这部分能量的近似下，

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

等价地，由于整个上升行程开始和结束时均处于静止状态，该行程中的正、负有向面积相互抵消：

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. 最大角度与春米功

令

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

这是最后一部分水流出时剩余的动能。

用直线段连接表中上升分支的各点，得到

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

从 α_2 到 α_0 ，空斗杠杆将这部分能量转化为重力势能：

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

因此，折线估算给出

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

由此得到

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

对力矩曲线各分支进行更精确的积分，得到

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

因此 $E_2 = 0.5016 \text{ J}$ ，由此得到

$$\boxed{\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}}.$$

3.1.1. 持续溢水时的平衡

持续溢水使水的质量在两个运动方向上都成为由式 (1) 给出的角度函数。

在 β 附近，增大 α 会使水的质量减小，并产生负力矩。减小 α 会使留在斗中的水的质量增大，并产生正力矩。

因此，图像以负斜率通过 $(\beta, 0)$ ，且

$$\boxed{\alpha = \beta \text{ 是稳定平衡位置。}}$$

在题设的理想化条件下，小扰动会产生无阻尼振动。

3.1.2. 线性化力矩

将式 (2) 写为

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

其中

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

平衡时 $F(\cot \beta) = 0$ 。此外，

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3}c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

因此

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

定义

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

对于以弧度计的小角位移,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. 运动方程与周期

在一阶近似下, 取水在平衡位置时的转动惯量。将水对转动惯量的较小贡献近似为集中在其质心处的质点所产生的贡献, 得到

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

水绕自身质心的转动惯量仅约为 0.0026 kg m^2 , 因此计入水体的空间分布对所给周期的影响可以忽略。

转动惯量的变化与小加速度或小速度相乘, 其贡献超出了线性近似的阶数。因此, 令 $x = \alpha - \beta$,

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

这就是简谐振子的方程, 其中

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

对于 $x(0) = \Delta\alpha$ 和 $\dot{x}(0) = 0$,

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

周期为

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. 振幅为 1° 所需的流量

溢水状态下水斗的容水质量满足

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

在振动的下行阶段, 这一容水质量增大。为了维持溢水状态, 流入的质量流量必须满足

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

对于振幅为 A 的小振动,

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

保留至一阶,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

其最大值出现在向下通过平衡位置时。因此

$$\boxed{\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A.} \quad (4)$$

数值上,

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

对于 $A = 1^\circ = \pi/180$ 弧度,

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

所以

$$\boxed{\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}}.$$

3.3. 停止舂米的流量阈值估算

采用下转折点为 α_1 的临界抬起振动。其中心为平衡角 β , 因此振幅为

$$\boxed{A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}.}$$

这一极限振动始终处于水平位置之上, 因此杵不会接触到米。

应用相同的溢水条件 (4),

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

等价地,

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

因此

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

在保持简谐运动轨迹的前提下, 可以检验有限振幅修正。在其下行分支上,

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

因此, 容水质量的精确增长率为

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

其最大值约为 0.69 kg s^{-1} , 与以下估算一致:

$$\boxed{\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}}.$$

解答已与官方解答核对。

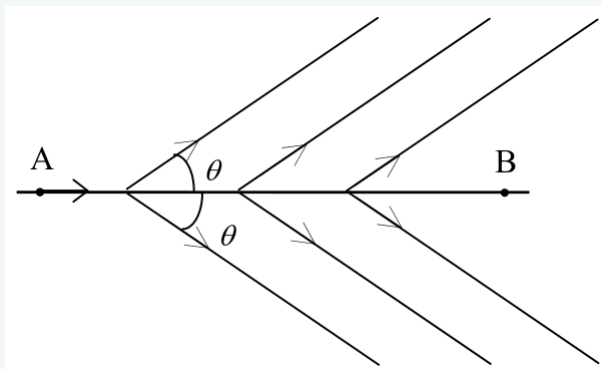
题目 2: 切伦科夫光与环形成像计数器

光在真空中以速度 c 传播。任何粒子的运动速率都不超过 c 。然而, 在透明介质中, 粒子的运动速率 v 可以大于光在同一介质中的传播速率 $\frac{c}{n}$, 其中 n 是介质的折射率。实验 (切伦科夫, 1934 年) 和理论 (塔姆和弗兰克, 1937 年) 表明, 带电粒子在折射率为 n 的透明介质中以速率 v 运动时, 若满

足 $v > \frac{c}{n}$ ，就会沿着与其轨迹成下列夹角的方向辐射光，这种光称为切伦科夫光：

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$ 。



1. 为了证明这一事实，考虑一个以恒定速率 $v > \frac{c}{n}$ 沿直线运动的粒子。它在时刻 0 经过 A 点，在时刻 t_1 经过 B 点。由于该问题关于绕 AB 的旋转具有对称性，只需考察包含 AB 的一个平面内的光线。

粒子在 A 与 B 之间的任意一点 C 发出一个球面光波，该光波以速率 $\frac{c}{n}$ 传播。我们将给定时刻 t 的波前定义为该时刻所有这些球面的包络面。

1.1. 确定时刻 t_1 的波前，并画出它与包含粒子轨迹的一个平面的交线。

1.2. 用 n 和 β 表示该交线与粒子轨迹之间的夹角 φ 。

2. 考虑一束沿直线 IS 以速率 $v > \frac{c}{n}$ 运动的粒子，使得角 θ 很小。粒子束在 S 点穿过一面焦距为 f 、球心为 C 的凹球面镜。SC 与 SI 成一个小角 α （见答题纸中的图）。粒子束在镜面的焦平面上形成一个环形像。

借助示意图解释这一现象。给出环形像的圆心 O 的位置及其半径 r 。

这种装置用于环形成像切伦科夫计数器（RICH），粒子穿过的介质称为辐射体。

注意： 本题的所有问题均忽略 α 和 θ 的二阶及更高阶项。

3. 一束已知动量为 $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ 的粒子由三种粒子组成：质子、K 介子和 π 介子，其静止质量分别为 $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$ 、 $M_K = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ 和 $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ 。请记住， pc 和 Mc^2 具有能量的量纲，1 eV 是一个电子经 1 V 电压加速后获得的能量，且 $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ 、 $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ 。

粒子束穿过压强为 P 的空气介质（辐射体）。空气的折射率随空气压强 P 变化，满足关系 $n = 1 + aP$ ，其中 $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$ 。

3.1. 分别计算使这三种粒子发出切伦科夫光所需的空气压强最小值 $P_{\min}$ 。

3.2. 计算使 K 介子环形像的半径等于 π 介子环形像半径一半的压强 $P_{\frac{1}{2}}$ 。计算此时 θ_K 和 θ_π 的值。

在此压强下能否观察到质子的环形像？

4. 现在假设粒子束并非完全单色：粒子的动量分布在以 $10 \text{ GeV}/c$ 为中心的一个区间内，其半高半宽为 Δp 。这使得环形像展宽，相应地， θ 分布的半高半宽为 $\Delta\theta$ 。辐射体的压强为 3.2 中确定的 $P_{\frac{1}{2}}$ 。

4.1. 计算 $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ 和 $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$, 即 $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ 在 π 介子和 K 介子情形下的取值。

4.2. 当两个环形像的间隔 $\theta_\pi - \theta_\kappa$ 大于半宽之和 $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ 的 10 倍, 即 $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$ 时, 就能清楚地区分这两个环形像。计算仍能清楚区分这两个环形像时 Δp 的最大值。

5. 切伦科夫在观察放置于放射源附近的一瓶水时, 首次发现了以他的名字命名的效应。他看到瓶中的水发出了光。

5.1. 求静止质量为 M 的粒子在水中运动并发出切伦科夫光所需的最小动能 $T_{\min}$ 。水的折射率为 $n = 1.33$ 。

5.2. 切伦科夫使用的放射源发射的粒子可能是静止质量为 $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$ 的 α 粒子 (即氦核), 也可能是静止质量为 $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ 的 β 粒子 (即电子)。计算 α 粒子和 β 粒子的 $T_{\min}$ 数值。

已知放射源发射的粒子的动能从不超过几 MeV, 判断切伦科夫观察到的辐射是由哪种粒子产生的。

6. 在本题前面的各部分中, 忽略了切伦科夫效应对波长 λ 的依赖。现在考虑这样一个事实: 粒子的切伦科夫辐射具有宽广的连续光谱, 其中包括可见光范围 (波长从 $0.4 \mu\text{m}$ 到 $0.8 \mu\text{m}$)。我们还知道, 当 λ 在此范围内增大时, 辐射体的折射率 n 线性减小, 减小量为 $n - 1$ 的 2%。

6.1. 考虑一束动量确定为 $10.0 \text{ GeV}/c$ 的 π 介子, 在压强为 6 atm 的空气中运动。求可见光范围两端所对应的角度差 $\delta\theta$ 。

6.2. 在此基础上, 定性研究色散对 π 介子环形像的影响, 其中 π 介子的动量分布在以 $p = 10 \text{ GeV}/c$ 为中心的一个区间内, 半高半宽为 $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ 。

6.2.1. 计算色散 (折射率变化) 引起的展宽以及粒子束的非单色性 (动量变化) 引起的展宽。

6.2.2. 通过勾选答题纸中相应的方框, 描述环形像从内缘到外缘的颜色变化。

题目译自官方英文原文。

答案

- 1.1. 公切波前是一个以 B 为顶点、AB 为轴的正圆锥面, 沿轨迹向后张开。其轴截面由在 B 点相交的两条切线段组成。若发射从 A 点开始, 完整的外边界还包括第一个球面波后部露出的球冠。
- 1.2.

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- 2. 设 F 为 SC 的中点。圆心 O 位于过 F 的焦平面内, 也位于平面 ISC 内, 且在 SC 的与 I 相反的一侧:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

沿 IS 传播的参考光线在 S 点反射后沿 SO 传播。

• 3.1.

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

阈值压强为

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

要产生非零辐射，压强必须高于阈值。

• 3.2.

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

在此压强下，质子不产生环形像。

• 4.1.

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

• 4.2. 半宽的极限值为

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

题目给出的严格分辨判据要求 $\Delta p < \Delta p_{\text{lim}}$ 。

• 5.1.

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

• 5.2.

$$T_{\min,\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\min,e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

观测到的辐射由 β 粒子，即电子产生。

• 6.1.

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

• 6.2.1. 色散使整个可见光谱对应的角度跨度约为 0.59 mrad。动量展宽给出

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (半宽)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

将这些角宽乘以 f ，即可得到相应的径向宽度。

• 6.2.2. 内缘为红色，外缘为蓝色或紫色。主要波长向外逐渐减小；动量展宽使相邻颜色变得模糊并相互混合。

解答

角度以弧度为单位。镜面的几何关系采用小角度的一阶近似。计算数值结果时，保留相对论动量与速率的关系以及切伦科夫关系式。

1.1. 波前的构造

将介质中的光速记为

$$u = \frac{c}{n}.$$

设粒子在时刻 t_C 经过 C 点。在时刻 t_1 ，从该点发出的波的半径为

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

而粒子已从 C 点运动到 B 点，经过的距离为

$$CB = v(t_1 - t_C).$$

因此，

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

与 C 点的位置无关。

在包含 AB 的任意平面内，球面波的截线为圆。这些圆的半径与其圆心到 B 点的距离成正比。因此，它们具有相同的两条过 B 点的切线。将这些切线绕 AB 旋转，就得到一个以 B 为顶点、向后张开的正圆锥面。

所需示意图按以下步骤绘制：

1. 水平画出 AB，使 B 位于右侧，且 $AB = vt_1$ 。
2. 以 A 为圆心、 ut_1 为半径，画出最大的波圆。
3. 以中间各点 C 为圆心、 $u(t_1 - t_C)$ 为半径，画出较小的波圆。
4. 从 B 点作这些圆的上下两条公切线。在以 A 为圆心的圆上标出一个切点 T，并画出 $AT \perp BT$ 。

对于 A—B 这一有限的发射区间，圆锥面部分从 B 点延伸至第一个球面上的切触圆。若画出受扰动区域的整个外边界，其后部就是以 A 为球心的露出球冠。

1.2. 波前角与切伦科夫角

在直角三角形 ATB 中，

$$AT = \frac{c}{n}t_1, \quad AB = vt_1.$$

切线 BT 与轨迹直线之间的锐角为 φ ，所以

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

于是

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

光线垂直于波前。因此，光线与粒子前进方向之间的夹角 θ 满足

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

从而

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

这就证明了式 (1)。

2. 环形像的形成、圆心与半径

这里 C 表示镜面的曲率中心。由于镜面是球面，

$$SC = 2f.$$

设 F 为 SC 的中点；近轴焦平面在 F 点垂直于 SC 。

先考虑一条沿粒子束方向 IS 传播、在 S 点射到镜面上的参考光线。镜面在 S 点的法线为 SC 。根据反射定律，反射光线 SO 与 SC 的夹角同 SI 与 SC 的夹角一样，均为 α ，但位于另一侧。

因此，反射光线与焦平面的交点 O 满足

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

由于 $CF = SF = f$ ，由同一几何构造还可得

$$CO \parallel IS.$$

现在固定绕粒子轨迹的一个方位角。在该方位角上发出的所有切伦科夫光线，即使从轨迹上的不同点发出，也具有相同的方向。它们构成一束平行光，经镜面聚焦于其焦平面上的一点。

改变方位角时，光线方向绕着半顶角为 θ 的圆锥面变化。在近轴近似下，镜面将角位移转换为焦平面上的位移，其大小等于 f 乘以该角度。因此，各像点相对于 O 的坐标具有如下形式：

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

其中 ψ 为方位角。因此

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

这是一条圆，其半径为

$$r = f\theta.$$

作图时，将 S 画在右侧， C 画在其左侧， F 画在两者的中点。将 I 放在 SC 上方。参考光线在 S 点反射后射向 SC 下方的 O 点。画出过 F 的焦平面，并以朝向 I 的一侧为正方向，在平面 ISC 内标出环形像的两个交点，它们到 F 的有向距离分别为

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta.$$

这两点相距 $2f\theta$ ，其中点为 O 。所有方位角对应的像点共同构成这个环。

3.1. 阈值压强

相对论能量和动量满足

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

为方便起见，定义

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

切伦科夫条件为

$$n\beta > 1.$$

在阈值处，

$$n_{\min} = q.$$

利用 $n = 1 + aP$ ，得

$$P_{\min} = \frac{q-1}{a} = \frac{\sqrt{1+(Mc/p)^2}-1}{a}.$$

代入题给质量和 $p = 10.0 \text{ GeV}/c$:

粒子	β	$P_{\min}$
质子	0.995611	16.3 atm
K 介子	0.998752	4.63 atm
π 介子	0.999902	0.363 atm

在等号成立时, 切伦科夫角为零; 要形成非零半径的环形像, 压强必须高于阈值。

3.2. K 介子环半径为 π 介子环半径一半时的压强

由于 $r = f\theta$, 在题设的光学近似精度下, 所要求的半径比给出

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}.$$

对于每种粒子,

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p}\right)^2}.$$

利用二倍角公式,

$$\frac{q_{\pi}}{n} = \cos(2\theta_{\kappa}) = 2\left(\frac{q_{\kappa}}{n}\right)^2 - 1.$$

因此

$$n^2 + q_{\pi}n - 2q_{\kappa}^2 = 0.$$

正根为

$$n_* = \frac{\sqrt{q_{\pi}^2 + 8q_{\kappa}^2} - q_{\pi}}{2}.$$

数值上,

$$q_{\kappa} = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_{\pi} = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

由此得到

$$n_* \simeq 1.00163306.$$

因此

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

相应的角度为

$$\theta_{\kappa} = \arccos \frac{q_{\kappa}}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_{\pi} = \arccos \frac{q_{\pi}}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

所以

$$\theta_{\kappa} \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

质子的阈值压强为 16.3 atm，远高于此压强。因此

不会产生质子的环形像。

4.1. 动量展宽引起的角度展宽

在固定压强下， n 为常数。对下式求导：

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

由于

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

得到

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

利用 $q = 1/\beta$ 和 $q/n = \cos \theta$ ，也可写成

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

对于较窄的动量分布，其变换在局部可视为线性，因此

$$\Delta \theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

该导数为正：动量增大会使切伦科夫角增大。

在 $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ 和 3.2 中求得的压强下计算，得

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\kappa} &\simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \\ \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} &\simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \theta_{\kappa}}{\Delta p} &\simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \\ \frac{\Delta \theta_{\pi}}{\Delta p} &\simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}. \end{aligned}$$

4.2. 允许的最大动量半宽

所要求的分辨条件为

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta \theta_{\kappa} + \Delta \theta_{\pi}).$$

代入线性展宽关系，得

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

使用未舍入的数值，

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

于是

$$\boxed{\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

这约为中心动量的 3.0%。由于题目给出的是严格不等式，能够清楚分辨的范围为

$$\boxed{\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

5.1. 水中的动能阈值

相对论动能为

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

在切伦科夫阈值处，

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

因此

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

并且

$$\boxed{T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).}$$

对于水，

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\text{min}} \simeq 1.51676,$$

所以

$$\boxed{T_{\text{min}} \simeq 0.5168 Mc^2.}$$

要产生非零辐射，动能必须高于这一阈值。

5.2. α 粒子与电子

对于 α 粒子，

$$T_{\text{min},\alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

对于电子，

$$T_{\text{min},e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

动能仅为几 MeV 的 α 粒子远低于其约为 1960 MeV 的阈值。能量为几 MeV 的电子则很容易超过自身阈值。因此，

$$\boxed{\text{观测到的切伦科夫辐射由电子产生。}}$$

6.1. 可见光谱两端的角度差

在 $P = 6 \text{ atm}$ 时，

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

整个可见光范围内折射率的减小量为

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

对于动量为 $10.0 \text{ GeV}/c$ 的 π 介子，代表性的切伦科夫角为

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad}.$$

固定粒子速率，对

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

关于 n 求导，得

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

所以

$$\boxed{\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}.$$

取折射率变化的一阶近似，

$$\delta\theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

于是

$$\boxed{\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

较短的波长对应较大的折射率，因而也对应较大的角度：

$$\theta(0.4 \text{ } \mu\text{m}) > \theta(0.8 \text{ } \mu\text{m}).$$

6.2.1. 色散展宽与动量展宽

色散展宽是可见光两个端点之间的完整角度跨度：

$$\boxed{w_{\text{disp}} = \delta\theta \simeq 0.59 \text{ mrad}.$$

相应的径向跨度为

$$\boxed{w_{r,\text{disp}} = f\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.$$

对于动量展宽，使用 4.1 中的导数，但现在在 6 atm 下计算：

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_{\pi}^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

当 $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ 时，

$$\Delta\theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

因此

$$\boxed{\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}}$$

为半高半宽，而

$$\boxed{w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}}$$

为半高全宽。

相应的径向半宽和半高全宽为

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,\text{FWHM}} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

色散造成的可见光谱跨度约为动量引起的半高全宽的 2.8 倍。因此，色散引起的展宽尺度更大。如果不指定动量分布的形状和光谱权重，就无法算出唯一的总半高全宽。

6.2.2. 环形像的颜色排列

由于

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

可得

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

由于 $r = f\theta$,

$$\boxed{\frac{dr}{d\lambda} < 0.}$$

因此，较长的波长产生较小的半径。正确的颜色选择为：

- **内缘：** 红色，对应较长的波长。
- **向外移动：** 占主导的波长逐渐变短，相邻颜色相互重叠。
- **外缘：** 蓝色或紫色，对应最短的波长。

动量展宽使这种排列变得模糊，但其特征宽度小于色散造成的跨度，因此仍保留内红外紫的分布。

解答已与官方解答核对。

题目 3：气温随高度的变化、大气稳定度与空气污染

空气的垂直运动支配着许多大气过程，例如云和降水的形成以及空气污染物的扩散。如果大气是稳定的，垂直运动就会受到限制，空气污染物往往会积聚在排放地点附近，而不是扩散和稀释。相反，在不稳定的大气中，空气的垂直运动会促进空气污染物的垂直扩散。因此，污染物浓度不仅取决于排放源的强度，还取决于大气的稳定度。

我们将利用气象学中的气块概念，通过比较在大气中绝热上升或下沉的气块温度与周围空气温度，来判断大气的稳定度。我们将看到，在许多情况下，含有空气污染物并从地面上升的气块会在某一高度停止上升，这一高度称为混合层高度。混合层高度越大，空气污染物浓度越低。我们将估算河内都市区早高峰情景下的混合层高度以及摩托车排放的一氧化碳浓度。在这一情景中，119 m 以上高度处存在逆温（气温随高度升高而升高），因而垂直混合受到限制。

将空气视为理想双原子气体，其摩尔质量为 $\mu = 29 \text{ g/mol}$ 。

准平衡绝热过程遵循方程 $pV^\gamma = \text{const}$ ，其中 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ 是气体的定压热容与定容热容之比。

必要时，考生可以使用以下数据：

普适气体常量为 $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ 。

地面大气压为 $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

重力加速度为常量, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

空气的摩尔定压热容为 $c_p = \frac{7}{2}R$ 。

空气的摩尔定容热容为 $c_V = \frac{5}{2}R$ 。

数学提示

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. 微分方程 $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (其中 A 和 B 为常量) 的解为

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

其中 $x_1(t)$ 是微分方程 $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ 的解。

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. 气压随高度的变化。

1.1. 假设大气温度处处相同, 等于 T_0 。写出大气压 p 随高度 z 变化的表达式。

1.2. 假设大气温度随高度按以下关系变化

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

其中 Λ 为常量, 称为大气的温度直减率 (温度的垂直梯度为 $-\Lambda$)。

1.2.1. 写出大气压 p 随高度 z 变化的表达式。

1.2.2. 当空气密度随高度升高而增大时, 会发生一种称为自由对流的过程。 Λ 取何值时会发生自由对流?

2. 气块在垂直运动中的温度变化

考虑一个在大气中上下运动的气块。气块是一团具有足够大尺度的空气, 其横向尺度为数米, 可以视为独立的热力学系统, 同时又足够小, 因而可以认为其温度均匀。气块的垂直运动可以视为近似绝热过程, 即它与周围空气之间的热交换可以忽略。如果气块在大气中上升, 它会膨胀并冷却。反之, 如果气块向下运动, 增大的外界气压会压缩气块内的空气, 使其温度升高。

由于气块的尺度不大, 可以认为气块边界上不同位置处的大气压具有相同的值 $p(z)$, 其中 z 为气块中心的高度。气块内温度均匀, 等于 $T_{\text{parcel}}(z)$, 一般不同于周围空气的温度 $T(z)$ 。在 2.1 和 2.2 两部分中, 我们不对 $T(z)$ 的形式作任何假设。

2.1. 气块温度 T_{parcel} 随高度的变化由下式定义

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

推导 $G(T, T_{\text{parcel}})$ 的表达式。

2.2. 考虑一种特殊的大气状况：在任意高度 z ，大气温度 T 都等于气块温度 T_{parcel} ，即 $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$ 。我们用 Γ 表示 $T = T_{\text{parcel}}$ 时 G 的值，即

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

(其中 $T = T_{\text{parcel}}$)。 Γ 称为干绝热直减率。

2.2.1. 推导 Γ 的表达式

2.2.2. 计算 Γ 的数值。

2.2.3. 推导大气温度 $T(z)$ 随高度变化的表达式。

2.3. 假设大气温度随高度按关系 $T(z) = T(0) - \Lambda z$ 变化，其中 Λ 为常量。求气块温度 $T_{\text{parcel}}(z)$ 与高度 z 的关系。

2.4. 当 $|\Lambda z| \ll T(0)$ 且 $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$ 时，写出 $T_{\text{parcel}}(z)$ 的近似表达式。

3. 大气稳定度。

在本部分中，假设 T 随高度线性变化。

3.1. 考虑一个最初在高度 z_0 处与周围空气处于平衡的气块，即它与周围空气具有相同的温度 $T(z_0)$ 。如果气块受到微小的向上或向下位移（例如由大气湍流引起），则可能出现以下三种情况之一：

- 气块返回原来的高度 z_0 ，气块的平衡是稳定的。此时称大气是稳定的。
- 气块沿原来的方向继续运动，气块的平衡是不稳定的。此时大气是不稳定的。
- 气块停留在新的位置，气块的平衡是随遇平衡。此时称大气是中性的。

大气分别处于稳定、不稳定或中性状态时， Λ 应满足什么条件？

3.2. 一个气块在地面的温度 $T_{\text{parcel}}(0)$ 高于周围空气的温度 $T(0)$ 。浮力将使气块上升。对于稳定大气，推导气块所能达到的最大高度的表达式，用 Λ 和 Γ 表示。

4. 混合层高度

4.1. 表 1 给出了河内 11 月某日上午 7:00 无线电探空气球记录的气温。气温随高度的变化可用公式 $T(z) = T(0) - \Lambda z$ 近似描述，其中在 $0 < z < 96 \text{ m}$ 、 $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$ 和 $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$ 这三个气层中，直减率 Λ 各不相同。

考虑一个温度为 $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$ 的气块从地面上升。根据表 1 所给数据，并使用上述线性近似，计算气块在 96 m 和 119 m 高度处的温度。

4.2. 确定气块所能达到的最大高度 H ，以及气块的温度 $T_{\text{parcel}}(H)$ 。

H 称为混合层高度。从地面排放的空气污染物可以与大气中的空气混合（例如通过风、湍流和扩散），并在这一气层内得到稀释。

表 1

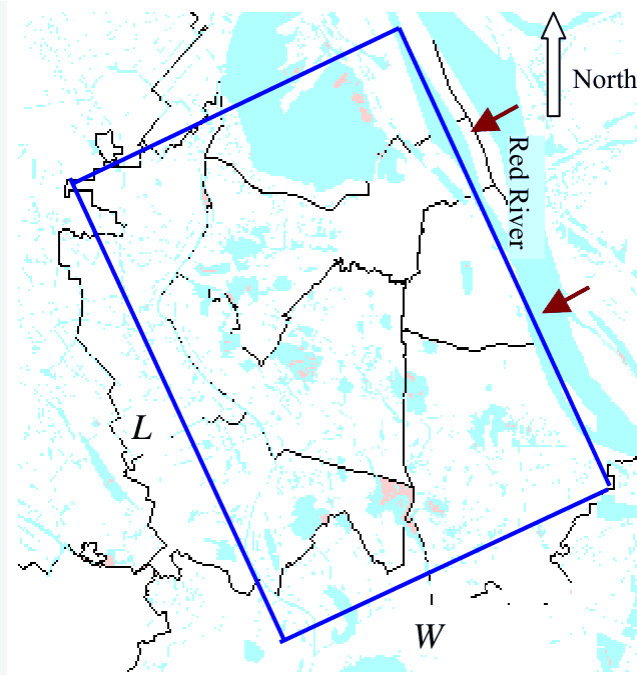
河内 11 月某日上午 7:00 无线电探空气球记录的数据。

高度, m	温度, °C
5	21.5

高度, m	温度, ° C
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. 估算河内摩托车早高峰期间的一氧化碳（CO）污染。

河内都市区可以近似为如图所示的长方形区域，其底面尺寸为 L 和 W ，其中一边沿红河西南岸。



据估计，在上午 7:00 至 8:00 的早高峰期间，路上共有 8×10^5 辆摩托车，每辆车平均行驶 5 km，每千米排放 12 g CO。近似认为，在早高峰期间，CO 污染物以恒定速率 M 随时间均匀排放。同时，洁净的东北风以速度 u 垂直于红河吹来（即垂直于长方形的 L 边），以相同速度穿过城市，并将部分受 CO 污染的空气带出城市上空的大气。

此外，我们采用以下粗略的近似模型：

- CO 迅速扩散至河内都市区上方混合层的整个体积内，因此可以假设在时刻 t ，CO 的浓度 $C(t)$ 在尺寸为 L 、 W 和 H 的整个长方体内处处相同。
- 从上风向进入长方体的空气是洁净的，并假设污染物不会通过平行于风向的侧面流出长方体。
- 上午 7:00 之前，大气中的 CO 浓度可以忽略。

5.1. 推导决定 CO 污染物浓度 $C(t)$ 随时间变化的微分方程。

5.2. 写出该方程关于 $C(t)$ 的解。

5.3. 计算上午 8:00 时浓度 $C(t)$ 的数值。

已知 $L = 15$ km、 $W = 8$ km、 $u = 1$ m/s。

题目译自官方英文原文。

答案

记 $T_0 = T(0)$ 、 $T_p = T_{\text{parcel}}$ 、 $T_{p0} = T_p(0)$ 。温度比值中的温度采用开尔文。在第 5 部分中， t 为自上午 7:00 起经过的时间。

- 1.1.

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

- 1.2.1. 对于 $\Lambda \neq 0$ 且 $T_0 - \Lambda z > 0$,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\mu g / (R \Lambda)}$$

取 $\Lambda = 0$ 的极限可得 1.1 的结果。

- 1.2.2. 使用本问指定的密度随高度增大的判据,

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.1.

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

- 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

- 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

- 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

- 2.4. 保留到高度的一阶项,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

- 3.1.

$$\begin{aligned} \Lambda < \Gamma &: \text{稳定,} \\ \Lambda > \Gamma &: \text{不稳定,} \\ \Lambda = \Gamma &: \text{中性.} \end{aligned}$$

- 3.2. 在题目所采用的混合层高度近似中, 忽略惯性超调,

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

不对气块温度作线性化时的相应表达式见解答。

• 4.1.

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

• 4.2.

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}$$

• 5.1.

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

• 5.2. 在早高峰期间,

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)$$

• 5.3.

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

保留中间计算的位数可得 2.24 mg m^{-3} 。

解答

1.1. 等温大气

水平大气层的流体静力平衡要求

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

对于理想气体空气, 其质量密度为

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

因此, 当 $T = T_0$ 时,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

从气压为 $p = p_0$ 的地面积分到高度 z , 得

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

因此,

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. 温度直减率为常量的大气

当 $T(z) = T_0 - \Lambda z$ 时, 流体静力平衡方程变为

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

对于 $\Lambda \neq 0$, 积分得

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

于是

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g/(R\Lambda)}.$$

此公式适用于绝对温度保持为正的區域。

当 $\Lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{RT_0},$$

从而恢复等温大气的结果。

1.2.2. 密度随高度增大

利用 $\rho = \mu p/(RT)$, 得

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

因此,

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R}\right).$$

由于 $\rho, T > 0$, 密度随高度增大的充要条件为

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

代入数值得

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

所以所求条件为

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

这是本问所述的密度逆转判据。第 3 部分中的绝热气块不稳定性判据所要求的条件更宽松。

2.1. 绝热气块的温度变化

气块所含气体的物质的量固定, 与周围空气保持压强平衡, 且与周围空气的热交换可以忽略。其绝热关系和理想气体关系为

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

消去 V , 得

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

或

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

取对数后求导, 得

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

气压梯度由温度为 T 的周围大气决定：

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

因此,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

由于 $c_p - c_V = R$ 且 $\gamma = c_p/c_V$,

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

于是

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}.$$

因子 T_p/T 不可忽视：当气块温度与周围空气温度不同时，气块的降温率并非严格恒定。

2.2.1. 干绝热直减率

当 $T_p = T$ 时，前式中的温度比值等于一：

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}.$$

对于题设的双原子气体，

$$c_p = \frac{7}{2} R,$$

所以

$$\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}.$$

2.2.2. 数值

代入得

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

因此,

$$\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}.$$

2.2.3. 大气温度廓线

在特殊条件 $T(z) = T_p(z)$ 下，

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

由于 Γ 为常量，

$$T(z) = T(0) - \Gamma z.$$

2.3. 在 Λ 为常量的大气中的气块温度

由第 2.1 部分,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

分离变量, 得

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

积分得

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

于是, 对于 $\Lambda \neq 0$,

$$T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}.$$

如果 $\Lambda = 0$, 周围大气为等温大气。此时直接积分得

$$T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}.$$

对于从高度 z_i 开始的气层, 同一结果可写为

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

这样便可将相邻各层连续衔接起来。

2.4. 线性近似

将第 2.3 部分的结果在 $z = 0$ 附近展开, 得

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

保留到一阶,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

当 $T_{p0} \approx T_0$ 时,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z.$$

严格来说, 这是一个小高度展开。如果 Λ 很小, 仅凭题设条件 $|\Lambda z| \ll T_0$ 并不能保证线性近似成立; 还需要 $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$ 。在第 4 部分中, 这两种温度变化相对于绝对温度都很小。

3.1. 发生位移的气块的稳定性

设气块最初位于 z_0 , 且

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

使其沿向上方向发生一个带正负号的微小位移 ξ 。在初始平衡状态, 其绝热温度梯度为 $-\Gamma$, 所以

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma \xi + O(\xi^2).$$

环境温度为

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda \xi.$$

因此，气块相对于环境的温度超额为

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

在相同压强下，密度与绝对温度成反比。气块在浮力和重力作用下的向上加速度为

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma) \xi.$$

因此：

- 如果 $\Lambda < \Gamma$ ，加速度与位移方向相反：大气是**稳定的**。
- 如果 $\Lambda > \Gamma$ ，加速度使位移进一步增大：大气是**不稳定的**。
- 如果 $\Lambda = \Gamma$ ，气块始终与周围空气具有相同的温度和密度：大气是**中性的**。

于是

稳定: $\Lambda < \Gamma$,	不稳定: $\Lambda > \Gamma$,	中性: $\Lambda = \Gamma$.
--------------------------	---------------------------	--------------------------

3.2. 初始温度较高的气块所达到的高度

在线性近似下，

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

因此，

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

在稳定大气中， $\Gamma - \Lambda > 0$ ，所以气块初始的温度超额随高度升高而减小。令这一温差为零，即可求得中性浮力高度：

$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}.$
--

这里使用的记号 $z_{\max}$ 沿用题目所采用的混合层高度模型，该模型忽略惯性超调。

为完整起见，也可以不采用第 2.4 部分的近似来求中性浮力高度。令气块温度的精确表达式等于大气温度，得

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

于是，对于 $\Lambda \neq 0$ ，

$z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}} \right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)} \right].$
--

对于 $\Lambda = 0$ ，其极限为

$z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}.$
--

当 $T_{p0} - T_0 \ll T_0$ 时，两式均化为上述线性结果。

这里必须作一点动力学上的说明：净浮力为零意味着加速度为零，但速度不一定为零。自由运动的气块可能越过这一高度。例如，在相同的线性近似下，一个从静止释放且无阻尼的气块满足

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

其第一个转向点位于 $2z_n$ 。以下各部分使用题目所采用的中性浮力混合层高度。

4.1. 气块在 96 m 和 119 m 处的温度

对每个指定气层，使用通过其实测端点的直线。各层的直减率为

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

以及

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

将第一条直线外推到地面，得到地面温度

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

接近气块的初始温度 22°C 。所有相关温度变化相对于约 294 K 的绝对温度都很小，因此第 2.4 部分的近似适用。

由于以开尔文表示的温差与以摄氏度表示的温差数值相同，

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

因此，

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

以及

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

按温度数据的精度取值，

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

作为检验，将第 2.3 部分的精确公式分别用于第一层和等温的第二层，得到的温度分别为 21.059°C 和 20.833°C 。四舍五入后得到相同的答案。

4.2. 混合层高度

在 96 m 和 119 m 两个高度处，周围空气的温度均为 20.1°C 。气块在这两个高度处都更暖，因此会继续上升，进入 119 m 以上的逆温层。

将该层中为正的溫度梯度记为

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

该层中的环境温度为

$$T(z) = 20.1^\circ\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

在混合层高度处，气块与大气的温度相等：

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

其中 H 以米为单位, 式中的温度以摄氏度为单位。解得

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m.}$$

这一高度位于所假设的逆温层内, 符合要求。

该处的气块温度为

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^\circ\text{C}.$$

因此,

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}.$$

采用气块穿过全部三个温度线性变化的大气层时的精确温度演化关系, 可得 $H = 143.78 \text{ m}$, 这证实气块温度的线性近似足够准确。

5.1. CO 的守恒方程

均匀混合的空气体积为

$$V = LWH.$$

若 $C(t)$ 为 CO 的质量浓度, 则长方体内 CO 的总质量为

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

风穿过宽度为 L 、高度为 H 的表面, 因此其体积流量为

$$Q = uLH.$$

由于流入的空气是洁净的, 流入的 CO 通量为零。CO 流出的质量速率为

$$QC = uLH C.$$

因此, 由 CO 守恒得

$$\frac{d}{dt}(LWH C) = M - uLH C.$$

长方体的尺寸为常量, 故

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0.$$

5.2. 浓度随时间的变化

一个常数特解为

$$C_{\text{ss}} = \frac{M}{uLH}.$$

齐次解正比于 $e^{-ut/W}$, 所以

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

利用 $C(0) = 0$, 得

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

于是

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right), \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s.}$$

通风时间尺度为 W/u 。在无风极限下，此表达式正确地化为 $C(t) = Mt/(LWH)$ 。

5.3. 上午 8:00 的 CO 浓度

这一小时内排放的 CO 总量为

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg}.$$

因此,

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

利用

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

得到无量纲经过时间

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

于是

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

得到

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

按与粗略输入数据相适应的精度取值,

$$\boxed{C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}}.$$

解答已与官方解答核对。