

IPhO 2008

Teorik sorular ve çözümler · Hanoi, Vietnam · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2008/

Soru 1: Suyla Çalışan Pirinç Dövme Havanı

A. Giriş

Pirinç, Vietnam'daki insanların çoğunun temel besin maddesidir. Çeltikten beyaz pirinç elde etmek için kavuzun ayrılması ("kavuz soyma" adı verilen bir işlem) ve kepek tabakasının ayrılması ("pirinç beyazlatma") gerekir. Vietnam'ın kuzeyindeki tepelik bölgelerde akarsular boldur ve burada yaşayan insanlar kepek tabakasını ayırmak için *suyla çalışan pirinç dövme havanı* kullanırlar. Şekil 1 bu havanlardan birini, Şekil 2 ise nasıl çalıştığını göstermektedir.

B. Tasarım ve çalışma

1. Tasarım.

Şekil 1'de gösterilen pirinç dövme havanı aşağıdaki parçalardan oluşur:

Havan, esas olarak pirincin konulduğu ahşap bir kaptır.

Kaldıraç, bir ucu kalın, diğer ucu ince olan bir ağaç gövdesidir. Yatay bir eksen etrafında dönebilir. Kaldıraçın ince ucuna, kaldıraça dik olarak bir *tokmak* bağlanmıştır. Tokmağın uzunluğu, kaldıraç yatay durumdayken havadaki pirince değecek şekildedir. Kaldıraçın kalın ucunun içi oyularak bir kova oluşturulmuştur. Kovanın biçimi, havanın çalışması açısından belirleyicidir.

2. Çalışma biçimleri

Havanın iki çalışma biçimi vardır.

İşleyen durum. Bu durumda havan, Şekil 2'de gösterilen çalışma çevrimini gerçekleştirir.

Pirinç dövme işlevi, Şekil 2'nin f) aşamasında tokmaktan pirince aktarılan iş sayesinde gerçekleşir. Herhangi bir nedenle tokmak pirince hiç değmiyorsa havanın çalışmadığını söyleriz.

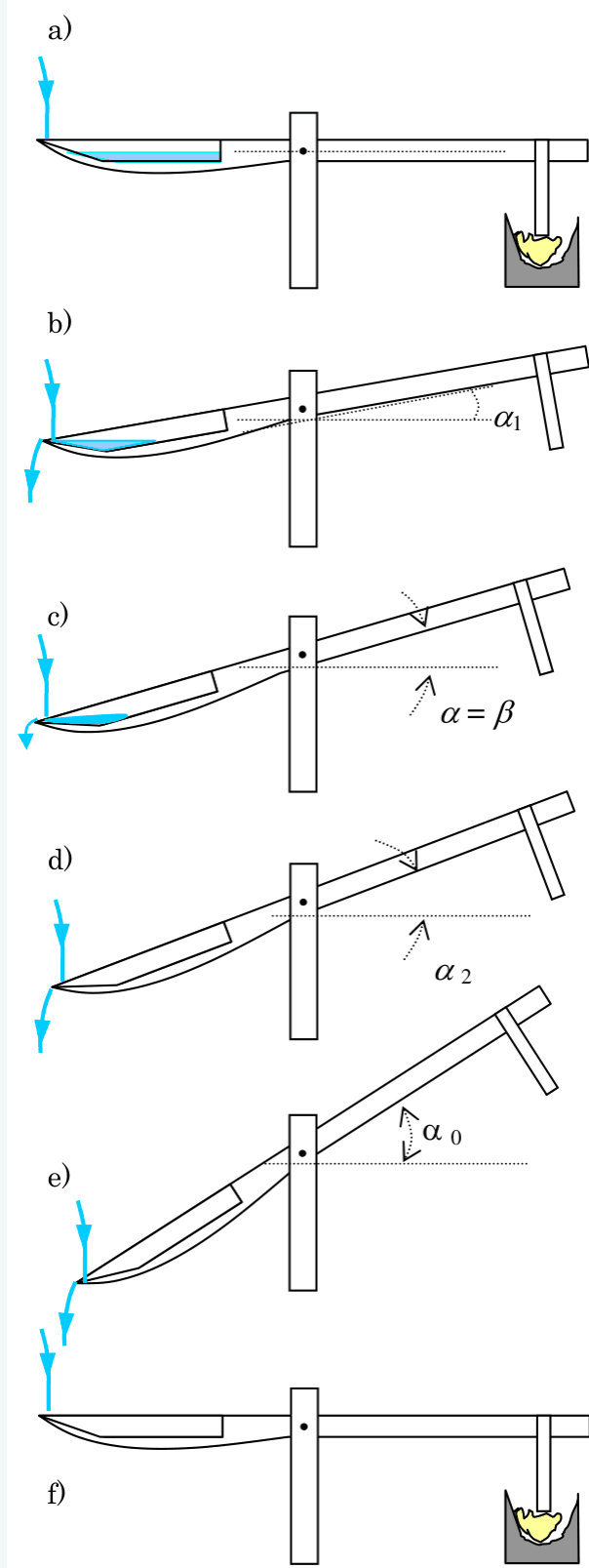
Kaldıraçın yukarıda olduğu durgun durum. Çalışma çevriminin c) aşamasında (Şekil 2), eğim açısı α arttıkça kovadaki su miktarı azalır. Belirli bir anda su miktarı, kaldıraçın ağırlığını tam olarak dengeleyecek kadardır. Bu andaki eğim açısını β ile gösterelim. Kaldıraç β açısında tutulur ve başlangıç açısız hızı sıfır olursa kaldıraç bu konumda sonsuza kadar kalır. Bu, kaldıraçın yukarıda olduğu durgun durumdur. Bu konumun kararlılığı, kovaya giren suyun debisine, Φ , bağlıdır. Φ , belirli bir Φ_2 değerini aşarsa bu durgun durum kararlı olur ve havan işleyen durumda bulunamaz.

Başka bir deyişle Φ_2 , havanın çalışmaması için gereken en küçük debidir.



Şekil 1
Suyla çalışan bir pirinç dövme havanı

SUYLA ÇALIŞAN BİR PİRİNÇ DÖVME HAVANININ ÇALIŞMA ÇEVİRİMİ



Şekil 2

a) Başlangıçta kovada su yoktur; tokmak havana dayanır. Su kovaya küçük bir debiyle akar, ancak kaldırıcı bir süre yatay konumda kalır.

b) Bir anda su miktarı, kaldırıcı yukarı kaldırmaya yeterli hâle gelir. Eğim nedeniyle su, kovanın uzak tarafına doğru hızla akar ve kaldırıcın daha hızlı eğilmesine neden olur.

$\alpha = \alpha_1$ olduğunda su dışarı akmaya başlar.

c) α açısı arttıkça su dışarı akmaya başlar. Belirli bir eğim açısında, $\alpha = \beta$, toplam tork sıfırdır.

d) α artmaya devam eder; kovada hiç su kalmayana kadar su dışarı akmayı sürdürür.

e) Eylemsizlik nedeniyle α artmaya devam eder. Kovanın biçimi nedeniyle kovaya düşen su hemen dışarı akar. Kaldıracın eylemsizlikten kaynaklanan hareketi, α en büyük değeri olan α_0 'a ulaşana kadar sürer.

f) Kovada su yokken kaldıracın ağırlığı onu başlangıçtaki yatay konumuna geri çeker. Tokmak, havana (içindeki piriñçe birlikte) bir darbe indirir ve yeni bir çevrim başlar.

C. Soru

Aşağıdaki parametrelere sahip, suyla çalışan bir piriñçe dövme havanını ele alın (Şekil 3).

Kaldıracın kütlesi (tokmak dâhil, su hariç) $M = 30$ kg'dır.

Kaldıracın kütle merkezi G'dir. Kaldıraç, T eksenı etrafında döner (bu eksenin şekil üzerindeki izdüşümü T noktasıdır).

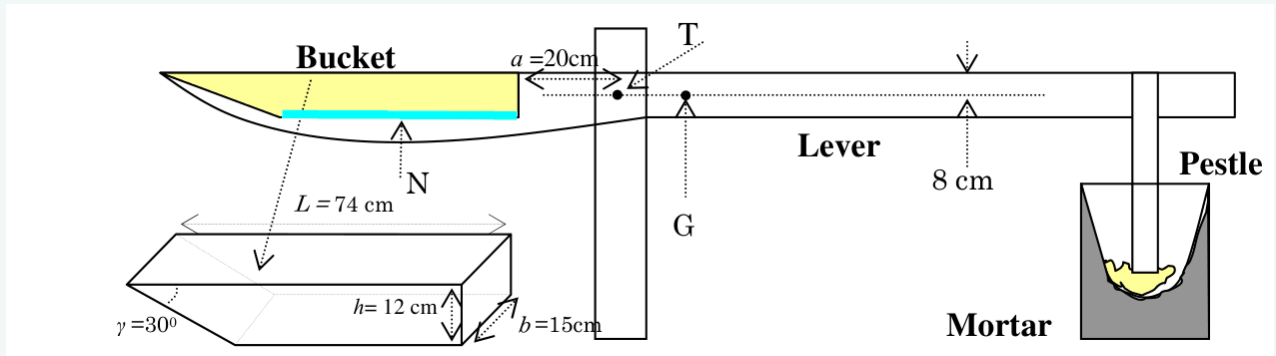
Kaldıracın T etrafındaki eylemsizlik momenti $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 'dir.

Kovada su varken suyun kütlesi m , su kütlesinin kütle merkezi ise N ile gösterilir.

Kaldıracın yatay eksene göre eğim açısı α 'dır.

Havanın ve kovanın başlıca uzunluk ölçüleri Şekil 3'teki gibidir.

Dönme eksenindeki sürtünmeyi ve kovaya düşen suyun oluşturduğu kuvveti ihmal edin. Bu soruda, su yüzeyinin her zaman yatay olduğu yaklaşımını kullanıyoruz.



Şekil 3 Piriñçe dövme havanının tasarımı ve boyutları

1. Havanın yapısı

Başlangıçta kova boştur ve kaldıracı yatay durumdadır. Ardından kaldıracı dönmeye başlayana kadar kovaya su akar. Bu anda kovadaki su miktarı $m = 1.0$ kg'dır.

1.1. Kaldıracın kütle merkezi G ile dönme eksenı T arasındaki uzaklığı bulun. Kova boşken GT'nin yatay olduğu bilinmektedir.

1.2. Kaldıraç ile yatay eksen arasındaki açı α_1 'e ulaştığında su kovadan dışarı akmaya başlar. Bu açı α_2 olduğunda kova tamamen boşalır.

α_1 ve α_2 'yi bulun.

1.3. Kaldıracın ve kovadaki suyun ağırlıklarından kaynaklanan (T eksenine göre) toplam tork $\mu(\alpha)$ olsun. $\alpha = \beta$ olduğunda $\mu(\alpha)$ sıfırdır. β 'yi ve bu anda kovadaki suyun m_1 kütlesini bulun.

2. İşleyen durumun parametreleri

Su, sabit ve küçük bir Φ debisiyle kovaya aksın. Kaldıraç hareket hâlindeyken kovaya akan su miktarı ihmal edilebilir. Bu bölümde, çalışma çevrimi boyunca eylemsizlik momentindeki değişimi ihmal edin.

2.1. Bir çalışma çevrimi boyunca μ torkunun α açısına bağıllığını gösteren $\mu(\alpha)$ grafiğini kabaca çizin. α_1 , α_2 ve $\alpha = 0$ açılarındaki $\mu(\alpha)$ değerlerini açıkça yazın.

2.2. 2.1. bölümünde bulunan grafikten yararlanarak $\mu(\alpha)$ 'nın ürettiği toplam W_{total} enerjisinin ve tokmaktan pirince aktarılan W_{pounding} işinin değerlerini tartışın ve geometrik yorumlarını verin.

2.3. μ 'nün α 'ya bağıllığını gösteren grafikten α_0 ve W_{pounding} 'i tahmin edin (kovaya giren ve kovadan çıkan suyun kinetik enerjisinin ihmal edilebilir olduğunu varsayın). Hesabı kolaylaştırıyorsa eğrileri kırık çizgilerle değiştirebilirsiniz.

3. Durgun durum

Su, sabit bir Φ debisiyle kovaya aksın; ancak kaldıracın hareketi sırasında kovaya akan su miktarı ihmal edilemesin.

3.1. Kovanın sürekli suyla dolup taşıtığını varsayarak,

3.1.1. $\alpha = \beta$ yakınında μ torkunun α açısına bağıllığını gösteren grafiği kabaca çizin. Kaldıracın $\alpha = \beta$ konumu hangi tür dengeye karşılık gelir?

3.1.2. $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ve $\Delta\alpha$ küçükken $\mu(\alpha)$ torkunun $\Delta\alpha$ 'ya bağlı analitik ifadesini bulun.

3.1.3. $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ konumundan sıfır başlangıç hızıyla harekete geçen kaldıracın hareket denklemini yazın ($\Delta\alpha$ küçüktür). Hareketin iyi bir yaklaşıklıkla harmonik salınım olduğunu gösterin. τ periyodunu hesaplayın.

3.2. Verilen bir Φ için kova, ancak kaldırma yeterince yavaş hareket ederse her an suyla dolup taşar. Harmonik salınımın genliği için Φ 'ye bağlı bir üst sınır vardır. Kaldıracın 1° genlikle harmonik salınım yapabilmesi için Φ 'nin gereken en küçük Φ_1 değerini (kg/s cinsinden) bulun.

3.3. Φ 'nin, kaldıracın serbest hareketi sırasında eğim açısı α_2 'den α_1 'e azalırken kovanın sürekli suyla dolup taşmasını sağlayacak kadar büyük olduğunu varsayın. Ancak Φ çok büyükse havan çalışmaz. Kaldıracın hareketinin harmonik salınım olduğunu varsayarak pirinç dövme havanının çalışmaması için gereken en küçük Φ_2 debisini tahmin edin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Pozitif tork, α 'nın artması anlamına gelir. Sayısal sonuçlarda $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ve $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ kullanılmıştır.

- 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$.
- 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

- 1.3. $\beta = 23.57^\circ$, $m_1 = 0.605 \text{ kg}$.

- 2.1. Yükselme hareketinde,

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}, \quad \mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}.$$

Kova boşken dönüş kolu $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ olup -4.62 N m değerinde sonlanır. $\alpha = 0$ 'daki dolma süreci bu değeri sıfıra bağlar.

- 2.2. $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$, çevrimin çevrelediği alandır. Dövme işi

$$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0,$$

olup suyun taşıyıp götürdüğü kinetik enerji ihmal edildiğinde W_{total} 'e eşittir.

- 2.3. $\alpha_0 \approx 37.5^\circ$, $W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}$.

- 3.1.1. Kararlı denge; tork, β 'da negatif eğimle sıfırdan geçer.

- 3.1.2. $\Delta\alpha$ radyan cinsinden olmak üzere,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

- 3.1.3. $\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau)$, burada $\tau \approx 3.26 \text{ s}$.

- 3.2. $\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}$.

- 3.3. Sınır genliği $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$ kullanılarak,

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

Denge konumu β 'dir; α_1 , bu tahminde kullanılan alt dönüm noktasıdır.

Çözüm

Hareketi başlatan su miktarını $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ ile gösterelim ve $r = GT$ olsun. Şekil 3'ten,

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

Dönme noktası, kovanın üst kenarının $d = 0.08 \text{ m}$ aşağısındadır. Soruda belirtilmeyen standart $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ve $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ değerlerini kullanıyoruz.

Kullanışlı kısaltmalar şunlardır:

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. Kaldıracın kütle merkezinin konumu

Kovanın düz tabanının uzunluğu

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m}.$$

Bu tabanın üzerindeki başlangıç su derinliği η olsun. Suyun boyuna kesiti bir yamuktur; dolayısıyla

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

Böylece,

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0 / (\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m}.$$

u 'yu kova boyunca, iç düşey duvardan dış ağza doğru ölçelim. Tabandan y yüksekliğindeki yatay bir şerit, $u = 0$ 'dan $u = \ell + qy$ 'ye kadar uzanır. Bu nedenle ağırlık merkezinden

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

$w = \ell + q\eta$ yazılırsa bu ifade

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m}.$$

Tokmağın pirinçle temasını kaybettiği anda, onu destekleyen tepki kuvveti sıfır olur. İki ağırlık torku dengelenir:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

Böylece

$$r = \frac{m_0}{M}(a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

Buna karşılık gelen tork ölçüğünü tanımlayalım:

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m}.$$

1.2. Suyun dökülmeye başlaması ve dökülmenin sona ermesi

Kovaya bağlı koordinatlar kullanalım:

- s , dış ağızdan üst kenar boyunca içeri doğru uzanır;
- z , bu kenarın altındaki derinliği ölçer.

Eğimli uç $z = s \tan \gamma$, düz taban $z = h$ ile verilir ve dönme noktasının koordinatları (R, d) 'dir.

Su dış ağza ulaştığında, yatay yüzeyi $(0, 0)$ 'dan geçer. Kova koordinatlarındaki denklemi

$$z = s \tan \alpha.$$

Bu durumda kovada kalan suyun boyuna kesiti, köşeleri

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

olan bir üçgendir. Dolayısıyla kütlesi

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2} (\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

$m_0 = 1.0 \text{ kg}$ su için dökülme, bu kapasite m_0 'a eşit olduğunda başlar:

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

Buradan

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

Yatay serbest yüzey eğimli uca paralel olduğunda su tamamen boşalır:

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

Üçgen biçimindeki bu kesit boyutlarla tutarlıdır: α_1 'de iç uç noktası $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$ konumundadır.

1.3. Denge açısı ve kalan suyun kütlesi

Taşma durumundaki üçgen kesitin ağırlık merkezi

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

Boyutların şu kullanışlı özelliği vardır:

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

Dolayısıyla TN , kaldıraç doğrultusundadır ve suyun yatay moment kolu

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

Dökülme sırasındaki toplam tork

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

$v = \cot \beta - q$ alalım. Denge koşulu şu hâle gelir:

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

Fiziksel $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ aralığındaki kök

$$v = 0.560329.$$

Dolayısıyla

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

ve

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

Daha sonra gerekecek uzaklık

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m}.$$

2.1. Çalışma çevrimi boyunca tork

Suyun herhangi bir (s_N, z_N) ağırlık merkezi için yatay moment kolu

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

Dolayısıyla dökülmeden önce,

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

Suyun kesiti başlangıçta yamuktur. İç düşey duvara teması kesildiğinde üçgen hâline gelir. Bu durum

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

açısında gerçekleşir.

$\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$ için

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b(\cot \alpha - q)}}.$$

tanımını yapalım. Bu, üçgenin kova tabanına dik ölçülen yüksekliğidir. Ağırlık merkezi

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

Bu ifadeler, (3) ile birlikte, dökülme öncesindeki yükselme kolunu belirler. α_1 ile α_2 arasında (2)'yi kullanın.

Kova boşaldıktan sonra torka katkıda bulunmaz:

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

Grafik aşağıdaki değerlerden çizilebilir:

α	Yükselme hareketindeki tork (N m)	Kova boşken dönüş torku (N m)
0°	Kalkış anında 0	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

Tam çevrim şu özelliklere sahiptir:

1. $\alpha = 0$ 'da dolma süreci, ağırlıklardan kaynaklanan torku $-K$ 'dan sıfıra yükseltir. Bu, tork-açı grafiğinde düşey bir doğru parçasıdır. Havanın tepki kuvveti bu aşamada kaldırıcı hareketsiz tutar.
2. Yükselme sırasında tork, sıfırdan α_1 'deki en büyük değeri olan $+2.687$ N m'ye yükselir.
3. Suyun dökülmesi torkun azalmasına, β 'da sıfırdan geçmesine ve α_2 'de -4.001 N m'ye ulaşmasına neden olur.
4. α_2 'den en büyük açı α_0 'a kadar ve kova boşken gerçekleşen dönüşün tamamında tork, $-K \cos \alpha$ bağıntısına uyar. Bu gidiş ve dönüş eğrileri $\alpha \geq \alpha_2$ için çakışır.

Özellikle, $\mu(0)$ farklı aşamalarda farklı değerler alır: kalkış anında sıfır, kova boşken ise -4.620 N m.

2.2. İş ve geometrik yorumu

Sonsuz küçük dönme işi

$$dW = \mu d\alpha,$$

olup açılar radyan cinsinden ölçülür.

Bir çevrimdeki toplam iş

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

Kollar α_2 'nin üzerinde çakıştığından

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

Geometrik olarak bu, yükselme kolu, kova boşken dönüş kolu ve $\alpha = 0$ 'daki dolma doğru parçası arasında kalan alandır.

Boş kaldıraç, dönüşüne α_0 'da durgun hâlden başlar. Kütleçekimsel potansiyel enerjisindeki azalma, çarpma anında aktarılan kinetik enerjiye dönüşür:

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

Bu, 0'dan α_0 'a kadar kova boşken dönüş eğrisi ile açı eksenini arasındaki pozitif alandır.

Dışarı akan su kinetik enerji taşıyıp götürüyorsa bu enerji, çevrimde yapılan işin pirince aktarılan kısmını azaltır. 2.3'teki bu enerjinin ihmal edilebilir olduğu yaklaşımı altında,

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

Eşdeğer olarak, yükselme hareketinin tamamındaki pozitif ve negatif işaretli alanlar birbirini götürür; çünkü bu hareket durgun hâlde başlar ve durgun hâlde biter:

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. En büyük açı ve dövme işi

Şöyle tanımlayalım:

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

Bu, son su da kovadan ayrıldığında kalan kinetik enerjidir.

Tabloda verilen yükselme kolu noktaları doğru parçalarıyla birleştirildiğinde

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

α_2 'den α_0 'a kadar boş kaldıraç bu enerjiyi kütleçekimsel potansiyel enerjiye dönüştürür:

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

Dolayısıyla kırık çizgi yaklaşımı

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

olup buradan

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

Tork eğrilerinin kollarının integrali daha hassas hesaplandığında

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

Böylece $E_2 = 0.5016 \text{ J}$ olur ve

$$\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}.$$

3.1.1. Sürekli taşma durumunda denge

Sürekli taşma, hareketin her iki yönünde de su kütlesini (1) ile verilen bir açı fonksiyonu hâline getirir.

β yakınında α 'nın artması su kütlesini azaltır ve negatif bir tork oluşturur. α 'nın azalması ise kovada tutulan su kütlesini artırır ve pozitif bir tork oluşturur.

Dolayısıyla grafik $(\beta, 0)$ 'dan negatif eğimle geçer ve

$$\alpha = \beta \text{ kararlı bir denge konumudur.}$$

Belirtilen idealleştirme altında küçük bozuntular sönümsüz salınımlara yol açar.

3.1.2. Doğrusallaştırılmış tork

(2)'yi şu şekilde yazalım:

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

burada

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

Dengede $F(\cot \beta) = 0$ 'dır. Ayrıca,

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3}c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

Dolayısıyla

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

Şöyle tanımlayalım:

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

Radyan cinsinden küçük bir açısal yer değiştirme için,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. Hareket denklemi ve periyot

Birinci mertebede, suyun eylemsizlik momentini denge konumunda hesaplayalım. Küçük olan bu katkısı, suyun kütlesi kütle merkezinde toplanmış gibi yaklaşımlarız:

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

Suyun kendi kütle merkezi etrafındaki eylemsizlik momenti yalnızca yaklaşık 0.0026 kg m^2 olduğundan, uzaysal yayılımını hesaba katmanın verilen periyot üzerindeki etkisi ihmal edilebilir.

Eylemsizlik momentindeki değişimler küçük ivmeler veya hızlarla çarpılır ve doğrusal yaklaşımın ötesinde katkıda bulunur. Dolayısıyla $x = \alpha - \beta$ alındığında,

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Bu, harmonik salınıcı denklemdir ve

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

$x(0) = \Delta\alpha$ ve $\dot{x}(0) = 0$ için,

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

Periyot

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. 1° genlik için gereken debi

Taşan kovanın kapasitesi şu bağıntıya uyar:

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

Salınımın aşağı yönlü kısmında bu kapasite artar. Taşmanın sürmesi için gelen suyun kütleli debisi şu koşulu sağlamalıdır:

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

A genlikli küçük salınımlar için,

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

Birinci mertebede,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

En büyük değeri, denge konumundan aşağı yönde geçiş sırasında alır. Dolayısıyla

$$\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A. \quad (4)$$

Sayısal olarak,

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

$A = 1^\circ = \pi/180$ radyan için,

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

Böylece

$$\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}.$$

3.3. Dövmenin sona ermesi için debi eşliğinin tahmini

Alt dönüm noktası α_1 olan, yukarıda gerçekleşen sınır salınımını kullanalım. Merkezi denge açısı β olduğundan genliği

$$A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}.$$

Bu sınır salınımı yatay konumun üzerinde kalır; dolayısıyla tokmak pirince ulaşmaz.

Aynı taşma koşulu (4) uygulanırsa,

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

Eşdeğer olarak,

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

Böylece

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

Harmonik hareket varsayımı korunarak sonlu genlik düzeltmesi kontrol edilebilir. Hareketin alçalma kolunda,

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

olduğundan kapasitenin tam artış hızı

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

Bunun en büyük değeri yaklaşık 0.69 kg s^{-1} olup şu tahminle tutarlıdır:

$$\boxed{\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}}.$$

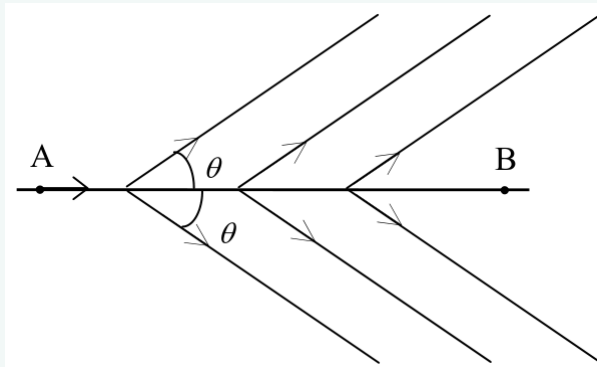
Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Cherenkov Işığ ve Halka Görüntüleme Sayacı

Işık boşlukta c hızıyla yayılır. c 'den daha büyük bir hızla hareket eden hiçbir parçacık yoktur. Bununla birlikte, saydam bir ortamda bir parçacığın, aynı ortamdaki ışık hızı $\frac{c}{n}$ 'den daha büyük bir v hızıyla hareket etmesi mümkündür; burada n , ortamın kırılma indisidir. Deney (Cherenkov, 1934) ve kuram (Tamm ve Frank, 1937), kırılma indisi n olan saydam bir ortamda $v > \frac{c}{n}$ koşulunu sağlayan bir v hızıyla hareket eden yüklü bir parçacığın, yörüngesiyle

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

açısını yapan doğrultularda *Cherenkov ışığı* adı verilen ışık yaydığını göstermiştir; burada $\beta = \frac{v}{c}$ 'dir.



1. Bu sonucu göstermek için, bir doğru üzerinde sabit $v > \frac{c}{n}$ hızıyla hareket eden bir parçacığı ele alın. Parçacık, 0 anında A'dan ve t_1 anında B'den geçmektedir. Problem AB etrafındaki dönmelere göre simetrik olduğundan, AB'yi içeren bir düzlemdeki ışık ışınlarını ele almak yeterlidir.

Parçacık, A ile B arasındaki herhangi bir C noktasında, $\frac{c}{n}$ hızıyla yayılan küresel bir ışık dalgası yayar. Belirli bir t anındaki dalga cephesini, bu andaki tüm bu kürelerin zarfı olarak tanımlıyoruz.

1.1. t_1 anındaki dalga cephesini belirleyin ve parçacığın yörüngesini içeren bir düzlemle kesişimini çizin.

1.2. Bu kesişim ile parçacığın yörüngesi arasındaki φ açısını n ve β cinsinden ifade edin.

2. Bir IS doğrusu boyunca, θ açısı küçük olacak şekilde $v > \frac{c}{n}$ hızıyla hareket eden bir parçacık demetini ele alalım. Demet, odak uzaklığı f ve merkezi C olan çukur bir küresel aynayı S noktasında kesmektedir. SC, SI ile küçük bir α açısı yapmaktadır (Cevap Kâğıdı'ndaki şekle bakın). Parçacık demeti, aynanın odak düzleminde halka biçiminde bir görüntü oluşturur.

Bu durumu gösteren bir çizim yardımıyla nedenini açıklayın. Halka görüntüsünün O merkezinin konumunu ve r yarıçapını verin.

Bu düzenek, *halka görüntülemeli Cherenkov sayaçlarında* (RICH) kullanılır ve parçacığın içinden geçtiği ortama *ışığı* denir.

Not: Bu problemin tüm sorularında, α ve θ 'ya göre ikinci ve daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilecektir.

3. Momentumu $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ olarak bilinen bir parçacık demeti üç tür parçacıktan oluşmaktadır: durgun kütleleri sırasıyla $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$, $M_\kappa = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ ve $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ olan protonlar, kaonlar ve pionlar. pc ve Mc^2 'nin enerji boyutunda olduğunu, 1 eV 'un bir elektronun 1 V 'luk bir gerilimle hızlandırıldıktan sonra kazandığı enerji olduğunu ve $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ olduğunu hatırlayın.

Parçacık demeti, P basıncı altındaki bir hava ortamından (ışığıcıdan) geçmektedir. Havanın kırılma indisi, hava basıncı P 'ye $n = 1 + aP$ bağıntısına göre bağlıdır; burada $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$ 'dir.

3.1. Üç parçacık türünün her biri için, Cherenkov ışığı yaymalarını sağlayan en küçük hava basıncı değerini, $P_{\min}$ 'i hesaplayın.

3.2. Kaonların halka görüntüsünün yarıçapının, pionlarınkine karşılık gelen yarıçapın yarısına eşit olmasını sağlayan $P_{\frac{1}{2}}$ basıncını hesaplayın. Bu durumda θ_κ ve θ_π değerlerini hesaplayın.

Bu basınç altında protonların halka görüntüsünü gözlemlemek mümkün müdür?

4. Şimdi demetin tam olarak monokromatik olmadığını varsayın: parçacıkların momentumları, merkezi $10 \text{ GeV}/c$ olan ve yarı yükseklikteki yarı genişliği Δp olan bir aralığa dağılmıştır. Bu, halka görüntüsünün genişlemesine yol açar; buna karşılık θ dağılımının yarı yükseklikteki yarı genişliği $\Delta\theta$ olur. Işıyıcının basıncı, 3.2'de belirlenen $P_{\frac{1}{2}}$ 'dir.

4.1. $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ 'nin pionlar ve kaonlar için aldığı değerler olan $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ ve $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ 'yi hesaplayın.

4.2. İki halka görüntüsü arasındaki ayrım, $\theta_\pi - \theta_\kappa$, yarı genişlikler toplamı $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ 'nin 10 katından büyük olduğunda, yani $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$ olduğunda, iki halka görüntüsünü iyi bir şekilde ayırt etmek mümkündür. İki halka görüntüsünün hâlâ iyi bir şekilde ayırt edilebilmesini

sağlayan en büyük Δp değerini hesaplayın.

5. Cherenkov, kendi adını taşıyan etkiyi ilk kez radyoaktif bir kaynağın yakınında bulunan bir su şişesini gözlemlerken keşfetmiştir. Şişedeki suyun ışık yaydığını görmüştür.

5.1. Suda hareket eden, durgun kütlesi M olan bir parçacığın Cherenkov ışığı yaymasını sağlayan en küçük kinetik enerjiyi, $T_{\min}$ 'i bulun. Suyun kırılma indisi $n = 1.33$ 'tür.

5.2. Cherenkov'un kullandığı radyoaktif kaynak, durgun kütlesi $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$ olan α parçacıkları (yani helyum çekirdekleri) ya da durgun kütlesi $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ olan β parçacıkları (yani elektronlar) yaymaktadır. α parçacıkları ve β parçacıkları için $T_{\min}$ 'in sayısal değerlerini hesaplayın.

Radyoaktif kaynaklardan yayılan parçacıkların kinetik enerjisinin hiçbir zaman birkaç MeV'u aşmadığını bilerek, Cherenkov'un gözlemlediği ışımaya hangi parçacıkların yol açtığını bulun.

6. Problemin önceki bölümlerinde, Cherenkov etkisinin dalga boyu λ 'ya bağlılığı göz ardı edilmiştir. Şimdi, bir parçacığın Cherenkov ışımasının görünür bölgeyi ($0.4 \mu\text{m}$ ile $0.8 \mu\text{m}$ arasındaki dalga boylarını) de içeren geniş ve sürekli bir tayfa sahip olduğunu dikkate alıyoruz. Ayrıca, λ bu aralık boyunca arttığında, ışıyıcının kırılma indisi n 'nin doğrusal olarak $n - 1$ 'in %2'si kadar azaldığını biliyoruz.

6.1. Basıncı 6 atm olan havada hareket eden, momentumu kesin olarak $10.0 \text{ GeV}/c$ olan bir pion demetini ele alın. Görünür bölgenin iki ucuna karşılık gelen açısal farkı, $\delta\theta$ 'yı bulun.

6.2. Buna dayanarak, momentumları merkezi $p = 10 \text{ GeV}/c$ olan ve yarı yükseklikteki yarı genişliği $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ olan bir aralığa dağılmış pionların halka görüntüsü üzerinde dispersiyonun etkisini nitel olarak inceleyin.

6.2.1. Dispersiyondan (değişen kırılma indisinden) ve demetin akromatikliğinden (değişen momentumdan) kaynaklanan genişlemeleri hesaplayın.

6.2.2. Cevap Kâğıdı'ndaki uygun kutuları işaretleyerek, halkanın iç kenarından dış kenarına doğru gidildiğinde renginin nasıl değiştiğini belirtin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- 1.1.** Ortak teğetlerin oluşturduğu dalga cephesi, tepesi B ve eksen AB olan, yörünge boyunca geriye doğru açılan bir dik dairesel konidir. Eksen kesiti, B'de birleşen iki teğet doğru parçasından oluşur. Işımanın A'da başlaması durumunda, tam dış sınır ilk küresel dalganın açıkta kalan arka küresel başlığını da içerir.
- 1.2.**

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- 2. F, SC'nin orta noktası olsun. O merkezi, F'den geçen odak düzleminde, ISC düzlemi içinde ve SC'nin l'ya göre karşı tarafında yer alır:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

IS boyunca gelen referans ışını, S'de SO boyunca yansır.

- 3.1.

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Eşik basınçları şöyledir:

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

Sıfırdan farklı bir ışıma için basıncın eşik üzerinde olması gerekir.

- 3.2.

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

Protonlar bu basınçta halka oluşturmaz.

- 4.1.

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

- 4.2. Sınır yarı genişlik şöyledir:

$$\Delta p_{\lim} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

Belirtilen kesin ayırım ölçütü, $\Delta p < \Delta p_{\lim}$ olmasını gerektirir.

- 5.1.

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

- 5.2.

$$T_{\min,\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\min,e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Gözlemlenen ışımayı β parçacıkları, yani elektronlar üretir.

- 6.1.

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

- 6.2.1. Dispersiyon, görünür tayfın tamamı için yaklaşık 0.59 mrad'lık bir açısal aralık verir. Momentum yayılımı ise şu sonucu verir:

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (yarı genişlik)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

Karşılık gelen radyal genişlikler, bu açısal genişlikler f ile çarpılarak elde edilir.

- 6.2.2. İç kenar kırmızı, dış kenar ise mavi/mordur. Baskın dalga boyları dışa doğru azalır; momentum yayılımı komşu renkleri bulanıklaştırır ve birbirine karıştırır.

Çözüm

Açılar radyan cinsinden ölçülmektedir. Ayna geometrisi, küçük açılara göre birinci mertebede ele alınmaktadır. Sayısal sonuçlar hesaplanırken görel momentum–hız ve Cherenkov bağıntıları korunmaktadır.

1.1. Dalga cephesinin çizimi

Ortamdaki ışık hızını şöyle yazalım:

$$u = \frac{c}{n}.$$

Parçacığın C'den t_C anında geçtiğini varsayalım. t_1 anında, burada yayılan dalganın yarıçapı

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

olurken parçacık C'den B'ye

$$CB = v(t_1 - t_C).$$

uzaklığını katetmiştir. Dolayısıyla,

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

oranı C'den bağımsızdır.

AB'yi içeren herhangi bir düzlemde, küresel dalgalar çember olarak görünür. Yarıçapları, merkezlerinin B'ye olan uzaklıklarıyla orantılıdır. Bu nedenle, B'den geçen aynı iki teğet doğruya sahiptirler. Bu teğetlerin AB etrafında döndürülmesi, tepesi B'de olan ve geriye doğru açılan bir dik dairesel koni oluşturur.

İstenen çizim şu şekilde oluşturulur:

1. B sağda olacak ve $AB = vt_1$ olacak şekilde AB'yi yatay çizin.
2. Merkezi A ve yarıçapı ut_1 olan en büyük dalga çemberini çizin.
3. Merkezleri aradaki C noktalarında olan, yarıçapları $u(t_1 - t_C)$ olan daha küçük dalga çemberleri çizin.
4. B'den bu çemberlere üst ve alt ortak teğetleri çizin. A merkezli çember üzerindeki bir teğet noktasını T ile işaretleyin ve $AT \perp BT$ olacak şekilde AT'yi çizin.

Sonlu A–B ışınım aralığı için, konik bölüm B'den ilk küre üzerindeki teğet çemberine kadar uzanır. Etkilenen bölgenin tüm dış sınırı gösteriliyorsa, bu sınırın arka kısmı A merkezli, açıkta kalan küresel başlıktır.

1.2. Dalga cephesi açısı ve Cherenkov açısı

ATB dik üçgeninde,

$$AT = \frac{c}{n}t_1, \quad AB = vt_1.$$

BT teğeti ile yörünge doğrusu arasındaki dar açı φ olduğundan,

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

Böylece

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

Işık ışınları dalga cephesine diktir. Bu nedenle, bir ışın ile parçacığın ileri hareket yönü arasındaki θ açısı

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

bağıntısını sağlar ve buradan

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

elde edilir. Böylece (1) denklemini gösterilmiş olur.

2. Halkanın oluşumu, merkezi ve yarıçapı

Burada C, aynanın eğrilik merkezini göstermektedir. Ayna küresel olduğundan,

$$SC = 2f.$$

F, SC'nin orta noktası olsun; paraksiyal odak düzlemi F'de SC'ye diktir.

Önce, parçacık demetinin IS yönünde ilerleyen ve aynaya S'de çarpan bir referans ışık ışını ele alalım. Aynanın S'deki normali SC'dir. Yansıma yasasına göre, yansıyan SO ışını SC ile, SI'nın yaptığı α açısının aynısını karşı tarafta yapar.

Dolayısıyla, bu ışının odak düzlemiyle kesiştiği O noktası için

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

geçerlidir. $CF = SF = f$ olduğundan, aynı geometrik çizim

$$CO \parallel IS.$$

sonucunu verir.

Şimdi parçacık yörüngesi etrafında bir azimut açısı sabitleyelim. Bu azimutta yayılan tüm Cherenkov ışınları, yörüngenin farklı noktalarından yayılırlar bile aynı doğrultudadır. Aynanın odak düzlemindeki bir noktaya odakladığı paralel bir demet oluştururlar.

Azimutun değiştirilmesi, ışının yönünü yarı açısı θ olan bir koni etrafında değiştirir. Paraksiyal bir ayna, açısal bir sapmayı odak düzleminde bu açının f katına eşit bir yer değiştirmeye dönüştürür. Böylece görüntü noktalarının O'ya göre koordinatları

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

biçimindedir; burada ψ azimut açısıdır. Dolayısıyla

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

bağıntısı, yarıçapı

$$r = f\theta.$$

olan bir çemberi ifade eder.

Çizim için S'yi sağa, C'yi onun soluna ve F'yi ikisinin tam ortasına yerleştirin. I'yı SC'nin üstüne koyun. Referans ışını S'de yansıyarak SC'nin altındaki O'ya doğru gider. F'den geçen odak düzlemini çizin ve ISC düzlemindeki iki halka kesişimini, I'ya doğru olan tarafı pozitif alarak F'den itibaren

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta$$

işaretili uzaklıklarında işaretleyin. Bu noktaların arası $2f\theta'$ 'dir ve orta noktaları O'dur. Tüm azimutlara karşılık gelen noktalar halkayı oluşturur.

3.1. Eşik basınçları

Görelî enerji ve momentum şu bağıntıları sağlar:

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

Şu tanımı yapmak kullanışlıdır:

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

Cherenkov koşulu şöyledir:

$$n\beta > 1.$$

Eşikte,

$$n_{\min} = q.$$

$n = 1 + aP$ kullanıldığında,

$$P_{\min} = \frac{q - 1}{a} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Verilen kütleler ve $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ ile:

Parçacık	β	$P_{\min}$
Proton	0.995611	16.3 atm
Kaon	0.998752	4.63 atm
Pion	0.999902	0.363 atm

Eşitlik durumunda Cherenkov açısı sıfırdır; yarıçapı sıfırdan farklı bir halka için basıncın eşiğin üzerinde olması gerekir.

3.2. Kaon halkasının yarıçapının pion halkasınınkinin yarısı olması için gereken basınç

$r = f\theta$ olduğundan, istenen yarıçap oranı, belirtilen optik doğruluk düzeyinde

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}$$

sonucunu verir.

Her bir tür için,

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p}\right)^2}.$$

Çift açı özdeşliği kullanıldığında,

$$\frac{q_{\pi}}{n} = \cos(2\theta_{\kappa}) = 2\left(\frac{q_{\kappa}}{n}\right)^2 - 1.$$

Böylece

$$n^2 + q_{\pi}n - 2q_{\kappa}^2 = 0.$$

Pozitif kök şöyledir:

$$n_* = \frac{\sqrt{q_\pi^2 + 8q_\kappa^2} - q_\pi}{2}.$$

Sayısal olarak,

$$q_\kappa = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_\pi = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

değerleri

$$n_* \simeq 1.00163306.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

Karşılık gelen açılar şöyledir:

$$\theta_\kappa = \arccos \frac{q_\kappa}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_\pi = \arccos \frac{q_\pi}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

Böylece

$$\theta_\kappa \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_\pi \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

Proton eşiği 16.3 atm olup bu basıncın oldukça üzerindedir. Dolayısıyla

$$\text{Proton halkası oluşmaz.}$$

4.1. Momentum yayılımından kaynaklanan açısal genişleme

Sabit basınçta n sabittir. Şu bağıntının türevini alalım:

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

olduğundan,

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

elde edilir. $q = 1/\beta$ ve $q/n = \cos \theta$ kullanılarak bu bağıntı şöyle de yazılabilir:

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

Dar bir momentum dağılımı için dönüşüm yerel olarak doğrusaldır; dolayısıyla

$$\Delta\theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

Türev pozitifdir: momentumun artması Cherenkov açısını artırır.

$p = 10.0 \text{ GeV}/c$ ve 3.2'de bulunan basınç için hesaplandığında,

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_\kappa \simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} \simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. İzin verilen en büyük momentum yarı genişliği

Gerekli ayırım koşulu şöyledir:

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}).$$

Doğrusal genişleme bağıntıları yerine konulduğunda,

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

Yuvarlanmamış değerler kullanıldığında,

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

Böylece

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

Bu, merkez momentumun yaklaşık 3.0%'üdür. Problemde kesin bir eşitsizlik belirtildiğinden, halkaların iyi ayırt edilebildiği bölge şöyledir:

$$\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.$$

5.1. Sudaki kinetik enerji eşiği

Görelî kinetik enerji şöyledir:

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Cherenkov eşiğinde,

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

Dolayısıyla

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

ve

$$T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

Su için,

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\text{min}} \simeq 1.51676,$$

olduğundan,

$$T_{\min} \simeq 0.5168 Mc^2.$$

Sıfırdan farklı bir ışıma için kinetik enerjinin bu eşiğin üzerinde olması gerekir.

5.2. Alfa parçacıkları ve elektronlar

Bir alfa parçacığı için,

$$T_{\min,\alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

Bir elektron için,

$$T_{\min,e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Kinetik enerjisi yalnızca birkaç MeV olan bir alfa parçacığı, yaklaşık 1960 MeV olan eşiğinin çok altındadır. Enerjileri birkaç MeV olan elektronlar ise eşiklerini kolayca aşabilir. Sonuç olarak,

$$\boxed{\text{Gözlemlenen Cherenkov ışımasını elektronlar üretir.}}$$

6.1. Görünür tayf boyunca açısal fark

$P = 6 \text{ atm}$ için,

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

Görünür bölge boyunca kırılma indisindeki azalmanın büyüklüğü şöyledir:

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

10.0 GeV/c momentumlu pionlar için temsili Cherenkov açısı şöyledir:

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad}.$$

Parçacık hızı sabitken,

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

bağıntısının n 'ye göre türevi alındığında,

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

Böylece

$$\boxed{\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}}.$$

İndis değişimine göre birinci mertebede,

$$\delta\theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad.}}$$

Daha kısa dalga boyunda indis ve dolayısıyla açı daha büyüktür:

$$\theta(0.4 \mu\text{m}) > \theta(0.8 \mu\text{m}).$$

6.2.1. Dispersiyon genişlemesi ve momentum genişlemesi

Dispersiyon genişlemesi, görünür bölgenin iki uç noktası arasındaki tam açısal aralıktır:

$$w_{\text{disp}} = \delta\theta \simeq 0.59 \text{ mrad.}$$

Karşılık gelen radyal aralık şöyledir:

$$w_{r,\text{disp}} = f\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.$$

Momentum yayılımı için, 4.1'deki türevi bu kez 6 atm için hesaplayarak kullanalım:

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_\pi^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

$\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ ile,

$$\Delta\theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Dolayısıyla

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}$$

yarı yükseklikteki yarı genişlik iken,

$$w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}$$

yarı maksimumdaki tam genişliktir.

Karşılık gelen radyal yarı genişlik ve FWHM şöyledir:

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,\text{FWHM}} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

Dispersiyondan kaynaklanan görünür tayf aralığı, momentumun yol açtığı FWHM'nin yaklaşık 2.8 katıdır.

Dolayısıyla dispersiyon daha büyük genişleme ölçeğini belirler. Momentum profili ve tayfsal ağırlıklandırma belirtilmeden birleşik FWHM için tek bir değer hesaplanamaz.

6.2.2. Halka boyunca renk sıralaması

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

olduğundan,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

$r = f\theta$ olduğuna göre,

$$\frac{dr}{d\lambda} < 0.$$

Dolayısıyla daha uzun dalga boyları daha küçük yarıçaplar oluşturur. Doğru renk seçimi şöyledir:

- **İç kenar:** daha uzun dalga boylarına karşılık gelen kırmızı.
- **Dışa doğru ilerlerken:** komşu renkler birbiriyle örtüşürken, baskın dalga boyları giderek kısalır.
- **Dış kenar:** en kısa dalga boylarına karşılık gelen mavi/mor.

Momentum yayılımı bu sıralamayı bulanıklaştırır, ancak karakteristik genişliği kromatik aralıktan daha küçük olduğundan, içte kırmızı ve dışta mor örüntüsü korunur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Hava Sıcaklığının Yükseklikle Değişimi, Atmosferik Kararlılık ve Hava Kirliliği

Havanın düşey hareketi, bulut ve yağış oluşumu ile hava kirleticilerinin dağılması gibi birçok atmosferik süreci belirler. Atmosfer *kararlı* ise düşey hareket sınırlanır ve hava kirleticileri dağılıp seyrelmek yerine salım noktasının çevresinde birikme eğilimi gösterir. Buna karşılık, *kararsız* bir atmosferde havanın düşey hareketi, hava kirleticilerinin düşey yönde dağılmasını kolaylaştırır. Dolayısıyla kirleticilerin derişimleri, yalnızca salım kaynaklarının şiddetine değil, atmosferin *kararlılığına* da bağlıdır.

Meteorolojideki *hava parseli* kavramını kullanarak atmosferik kararlılığı belirleyecek ve atmosferde adyabatik olarak yükselen ya da alçalan hava parselinin sıcaklığını çevresindeki havanın sıcaklığıyla karşılaştıracğıız. Birçok durumda, hava kirleticileri içeren ve yerden yükselen bir hava parselinin, *karışım yüksekliği* adı verilen belirli bir yükseklikte durduğunu göreceğiz. Karışım yüksekliği ne kadar büyükse hava kirleticilerinin derişimi o kadar düşük olur. Hanoi metropol alanında motosikletlerin saldığı karbonmonoksitin derişimini ve karışım yüksekliğini, 119 m'nin üzerindeki yüksekliklerde görülen sıcaklık terselmesi (hava sıcaklığının yükseklikle artması) nedeniyle düşey karışımın sınırlı olduğu bir sabah yoğun trafik saati senaryosu için değerlendireceğiz.

Havayı, molar kütlesi $\mu = 29 \text{ g/mol}$ olan ideal iki atomlu bir gaz olarak ele alalım.

Yarı dengeli adyabatik dönüşümler $pV^\gamma = \text{const}$ denklemine uyar; burada $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, gazın sabit basınçtaki ve sabit hacimdeki ısı kapasitelerinin oranıdır.

Öğrenci, gerekirse aşağıdaki verileri kullanabilir:

Evrensel gaz sabiti $R = 8.31 \text{ J/(mol. K)}$ 'dir.

Yer seviyesindeki atmosfer basıncı $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ 'dır.

Yerçekimi ivmesi sabittir ve $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 'dir.

Havanın sabit basınçtaki molar ısı kapasitesi $c_p = \frac{7}{2}R$ 'dir.

Havanın sabit hacimdeki molar ısı kapasitesi $c_v = \frac{5}{2}R$ 'dir.

Matematiksel ipuçları

a.

$$\int \frac{dx}{A + Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A + Bx)}{A + Bx} = \frac{1}{B} \ln(A + Bx)$$

b. $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ diferansiyel denkleminin (A ve B sabit olmak üzere) çözümü

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

şeklindedir; burada $x_1(t)$, $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ diferansiyel denkleminin çözümüdür.

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. Basıncın yükseklikle değişimi.

1.1. Atmosferin sıcaklığının her yerde aynı ve T_0 'a eşit olduğunu varsayın. Atmosfer basıncı p 'yi, yükseklik z 'nin fonksiyonu olarak veren ifadeyi yazın.

1.2. Atmosferin sıcaklığının yükseklikle

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

bağıntısına göre değiştiğini varsayın; burada Λ , atmosferin *sıcaklık azalma oranı* olarak adlandırılan bir sabittir (sıcaklığın düşey gradyanı $-\Lambda$ 'dır).

1.2.1. Atmosfer basıncı p 'yi, yükseklik z 'nin fonksiyonu olarak veren ifadeyi yazın.

1.2.2. Hava yoğunluğu yükseklikle arttığında serbest konveksiyon adı verilen bir süreç ortaya çıkar. Λ 'nın hangi değerlerinde serbest konveksiyon oluşur?

2. Düşey hareket eden bir hava parselinin sıcaklığının değişimi

Atmosferde yukarı ve aşağı hareket eden bir hava parselini ele alın. Hava parseli, bağımsız bir termodinamik sistem olarak ele alınabilecek kadar büyük, birkaç metre genişliğinde, ancak sıcaklığının her yerde aynı kabul edilebileceği kadar küçük bir hava kütesidir. Bir hava parselinin düşey hareketi yaklaşık olarak adyabatik bir süreç olarak ele alınabilir; yani çevresindeki havayla ısı alışverişi ihmal edilebilir. Hava parseli atmosferde yükselirse genişler ve soğur. Tersine, aşağı doğru hareket ederse artan dış basınç, parselin içindeki havayı sıkıştırır ve sıcaklığı artar.

Parselin boyutu büyük olmadığından, parsel sınırının farklı noktalarındaki atmosfer basıncının aynı $p(z)$ değerine sahip olduğu kabul edilebilir; burada z , parsel merkezinin yüksekliğidir. Parselin içindeki sıcaklık her yerde aynıdır ve $T_{\text{parcel}}(z)$ 'ye eşittir; bu sıcaklık genellikle çevredeki havanın $T(z)$ sıcaklığından farklıdır. 2.1 ve 2.2 kısımlarında $T(z)$ 'nin biçimi hakkında herhangi bir varsayım yapmıyoruz.

2.1. Parsel sıcaklığının T_{parcel} yükseklikle değişimi

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

ile tanımlanır. $G(T, T_{\text{parcel}})$ ifadesini türetin.

2.2. Herhangi bir z yüksekliğinde atmosferin T sıcaklığının parselin T_{parcel} sıcaklığına eşit olduğu, $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$, özel bir atmosfer koşulunu ele alın. $T = T_{\text{parcel}}$ olduğunda G 'nin değerini Γ ile gösteriyoruz; yani

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

($T = T_{\text{parcel}}$ olmak üzere). Γ , *kuru adyabatik sıcaklık azalma oranı* olarak adlandırılır.

2.2.1. Γ ifadesini türetin.

2.2.2. Γ 'nin sayısal değerini hesaplayın.

2.2.3. Atmosfer sıcaklığı $T(z)$ 'yi yüksekliğin fonksiyonu olarak veren ifadeyi türetin.

2.3. Atmosfer sıcaklığının yüksekliğe $T(z) = T(0) - \Lambda z$ bağıntısına göre bağlı olduğunu varsayın; burada Λ bir sabittir. Parsel sıcaklığı $T_{\text{parcel}}(z)$ 'nin yükseklik z 'ye bağımlılığını bulun.

2.4. $|\Lambda z| \ll T(0)$ ve $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$ olduğunda $T_{\text{parcel}}(z)$ 'nin yaklaşık ifadesini yazın.

3. Atmosferik kararlılık.

Bu bölümde T 'nin yükseklikle doğrusal olarak değiştiğini varsayıyoruz.

3.1. Başlangıçta z_0 yüksekliğinde çevresindeki havayla dengede olan, yani çevresindeki havayla aynı $T(z_0)$ sıcaklığına sahip bir hava parselini ele alın. Parsel biraz yukarı ya da aşağı hareket ettirilirse (örneğin atmosferik türbülans nedeniyle), aşağıdaki üç durumdan biri ortaya çıkabilir:

- Hava parseli başlangıçtaki z_0 yüksekliğine geri döner; parselin dengesi karardır. Atmosferin kararlı olduğu söylenir.
- Parsel başlangıçtaki hareket yönünde ilerlemeye devam eder; parselin dengesi kararsızdır. Atmosfer kararsızdır.
- Hava parseli yeni konumunda kalır; parselin dengesi nötrdür. Atmosferin nötr olduğu söylenir.

Atmosferin kararlı, kararsız veya nötr olması için Λ 'nın sağlaması gereken koşul nedir?

3.2. Bir parselin yer seviyesindeki $T_{\text{parcel}}(0)$ sıcaklığı, çevresindeki havanın $T(0)$ sıcaklığından yüksektir. Kaldırma kuvveti parselin yükselmesini sağlar. Kararlı bir atmosfer durumunda parselin ulaşabileceği en büyük yüksekliğin ifadesini Λ ve Γ cinsinden türetin.

4. Karışım yüksekliği

4.1. Tablo 1, Hanoi'de bir kasım günü sabah saat 7:00'de bir radyosonda balonuyla kaydedilen hava sıcaklıklarını göstermektedir. Sıcaklığın yükseklikle değişimi, $0 < z < 96 \text{ m}$, $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$ ve $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$ şeklindeki üç tabakada farklı Λ azalma oranlarıyla, yaklaşık olarak $T(z) = T(0) - \Lambda z$ formülüyle betimlenebilir.

Yer seviyesinden yükselen, sıcaklığı $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$ olan bir hava parselini ele alın. Tablo 1'de verilen verilere dayanarak ve yukarıdaki doğrusal yaklaşımı kullanarak parselin 96 m ve 119 m yüksekliklerdeki sıcaklığını hesaplayın.

4.2. Parselin ulaşabileceği en büyük H yüksekliğini ve parselin $T_{\text{parcel}}(H)$ sıcaklığını belirleyin.

H , karışım yüksekliği olarak adlandırılır. Yer seviyesinden salınan hava kirleticileri, atmosferdeki havayla karışabilir (örneğin rüzgâr, türbülans ve dağılma yoluyla) ve bu tabaka içinde seyrelebilir.

Tablo 1

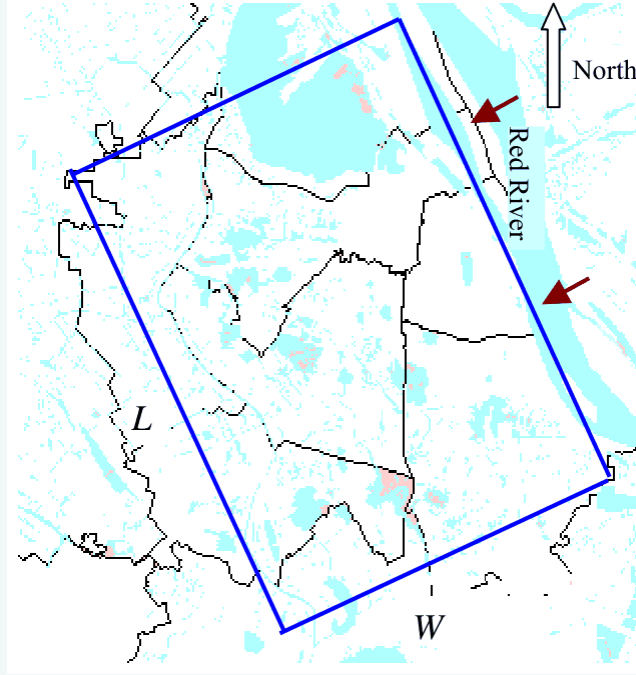
Hanoi'de bir kasım günü sabah saat 7:00'de bir radyosonda balonuyla kaydedilen veriler.

Yükseklik, m	Sıcaklık, °C
5	21.5
60	20.6

Yükseklik, m	Sıcaklık, °C
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. Hanoi'de sabah motosiklet trafiğinin yoğun olduğu bir saatte karbonmonoksit (CO) kirliliğinin tahmini.

Hanoi metropol alanı, şekilde gösterildiği gibi taban boyutları L ve W olan, bir kenarı Kızıl Nehir'in güneybatı kıyısı boyunca uzanan bir dikdörtgenle yaklaşık olarak temsil edilebilir.



Sabah saat 7:00 ile 8:00 arasındaki yoğun trafik saatinde yollarda 8×10^5 motosiklet bulunduğu, her birinin ortalama 5 km yol katettiği ve kilometre başına 12 g CO saldıgı tahmin edilmektedir. CO kirleticisinin, yoğun trafik saati boyunca yaklaşık olarak zamana göre düzgün biçimde, sabit bir M hızında salındığı kabul edilir. Aynı zamanda temiz kuzeydoğu rüzgârı, Kızıl Nehir'e dik (yani dikdörtgenin L kenarlarına dik) yönde u hızıyla eser, şehri aynı hızla geçer ve CO ile kirlenmiş havanın bir bölümünü şehir atmosferinin dışına taşır.

Ayrıca aşağıdaki kaba yaklaşık modeli kullanıyoruz:

- CO, Hanoi metropol alanı üzerindeki karışım tabakasının tüm hacmine hızla yayılır; böylece t anındaki CO derişimi $C(t)$ 'nin, boyutları L , W ve H olan bu dikdörtgenler prizmasının her yerinde aynı olduğu varsayılabilir.
- Rüzgârın geldiği yönden kutuya giren hava temizdir ve rüzgâra paralel yan yüzeylerden kutu dışına kirlenici kaybı olmadığı varsayılır.
- Sabah saat 7:00'den önce atmosferdeki CO derişimi ihmal edilebilir düzeydedir.

5.1. CO kirleticisinin derişimi $C(t)$ 'yi zamanın fonksiyonu olarak belirleyen diferansiyel denklemi türetin.

5.2. Bu denklemin $C(t)$ için çözümünü yazın.

5.3. Sabah saat 8:00'deki $C(t)$ derişiminin sayısal değerini hesaplayın.

Verilenler: $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$T_0 = T(0)$, $T_p = T_{\text{parcel}}$ ve $T_{p0} = T_p(0)$ olarak yazalım. Sıcaklık oranlarında kelvin kullanılır. Bölüm 5'te t , sabah saat 7:00'den itibaren geçen süredir.

- 1.1.

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

- 1.2.1. $\Lambda \neq 0$ ve $T_0 - \Lambda z > 0$ için,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}$$

$\Lambda = 0$ limiti, 1.1'in sonucunu verir.

- 1.2.2. Bu kısımda belirtilen yoğunluk artışı ölçütü kullanıldığında,

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.1.

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

- 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

- 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

- 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

- 2.4. Yüksekliğe göre birinci mertebede,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

- 3.1.

$$\begin{aligned} \Lambda < \Gamma &: \text{kararlı,} \\ \Lambda > \Gamma &: \text{kararsız,} \\ \Lambda = \Gamma &: \text{nötr.} \end{aligned}$$

- **3.2.** Amaçlanan karışım yüksekliği yaklaşımında, eylemsizlik nedeniyle denge düzeyinin aşılması ihmal edilirse,

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

Parsel sıcaklığı doğrusallaştırılmadan elde edilen karşılık gelen ifade çözümde verilmiştir.

- **4.1.**

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

- **4.2.**

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}$$

- **5.1.**

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

- **5.2.** Yoğun trafik saati boyunca,

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)$$

- **5.3.**

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

Ara hesaplamalardaki basamaklar korunduğunda 2.24 mg m^{-3} elde edilir.

Çözüm

1.1. İzotermal atmosfer

Yatay bir atmosfer tabakasının hidrostatik dengesi

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

koşulunu gerektirir. İdeal hava için kütle yoğunluğu

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

şeklindedir. Böylece $T = T_0$ olduğunda,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

$p = p_0$ olan yer seviyesinden z yüksekliğine kadar integral alınırsa,

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

Dolayısıyla,

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. Sıcaklık azalma oranı sabit olan atmosfer

$T(z) = T_0 - \Lambda z$ için hidrostatik denge

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

biçimini alır. $\Lambda \neq 0$ için integral alındığında,

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

Böylece

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\mu g / (R\Lambda)}.$$

Bu formül, mutlak sıcaklığın pozitif kaldığı bölgede geçerlidir.

$\Lambda \rightarrow 0$ iken,

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{RT_0},$$

ve izotermal sonuç yeniden elde edilir.

1.2.2. Yoğunluğun yükseklikle artması

$\rho = \mu p / (RT)$ kullanılarak,

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R} \right).$$

$\rho, T > 0$ olduğundan, yoğunluk ancak ve ancak

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

koşulunda yukarı doğru artar. Sayısal olarak,

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

dolayısıyla istenen koşul

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

şeklindedir.

Bu, sorunun bu kısmında belirtilen yoğunluk terselmesi ölçütüdür. Bölüm 3'teki adyabatik parsel kararsızlığı ölçütü daha az kısıtlayıcıdır.

2.1. Adyabatik bir parselin sıcaklık değişimi

Parsel sabit miktarda gaz içerir, çevresiyle basınç dengesinde kalır ve çevresiyle ısı alışverişi ihmal edilebilir düzeydedir. Adyabatik ve ideal gaz bağıntıları

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

şeklindedir. V elenirse,

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

veya

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

Logaritmik türevler alındığında,

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Basınç gradyanı, sıcaklığı T olan çevre atmosfer tarafından belirlenir:

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

Sonuç olarak,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

$c_p - c_V = R$ ve $\gamma = c_p/c_V$ olduğundan,

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

Böylece

$$\boxed{G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}}.$$

T_p/T çarpanı önemlidir: parselin sıcaklığı çevresinin sıcaklığından farklı olduğunda, parselin soğuma oranı tam olarak sabit değildir.

2.2.1. Kuru adyabatik sıcaklık azalma oranı

$T_p = T$ olduğunda, önceki ifadedeki sıcaklık oranı bire eşittir:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}}.$$

Belirtilen iki atomlu gaz için,

$$c_p = \frac{7}{2}R,$$

dolayısıyla

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}}.$$

2.2.2. Sayısal değer

Değerler yerine konulduğunda,

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}}.$$

2.2.3. Atmosferin sıcaklık profili

$T(z) = T_p(z)$ özel koşulu altında,

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

Γ sabit olduğundan,

$$\boxed{T(z) = T(0) - \Gamma z}.$$

2.3. Λ 'nın sabit olduğu bir atmosferde parsel sıcaklığı

Bölüm 2.1'den,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

Değişkenler ayrılırsa,

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

İntegral alınırsa,

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Böylece, $\Lambda \neq 0$ için,

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}}.$$

$\Lambda = 0$ ise çevre atmosfer izotermaldir. Bu durumda doğrudan integral alınması

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}}.$$

sonucunu verir.

z_i yüksekliğinde başlayan bir tabaka için aynı sonuç

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

biçiminde yazılabilir; bu, ardışık tabakaların sürekli biçimde birleştirilmesini sağlar.

2.4. Doğrusal yaklaşım

Bölüm 2.3'ün sonucu $z = 0$ çevresinde açılırsa,

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

Birinci mertebede,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

$T_{p0} \approx T_0$ için,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z.$$

Kesin olarak ifade etmek gerekirse, bu küçük yükseklikler için bir açılımdır. Λ çok küçükse, belirtilen $|\Lambda z| \ll T_0$ koşulu tek başına doğrusallığı sağlamaz; ayrıca $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$ olması gerekir. Bölüm 4'te her iki sıcaklık değişimi de mutlak sıcaklığa göre küçüktür.

3.1. Yer değiştiren bir parselin kararlılığı

Parsel başlangıçta z_0 yüksekliğinde olsun ve

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

olsun. Parseli yukarı yönde küçük, işaretli bir ξ uzaklığı kadar yer değiştirelim. Başlangıç dengesinde adyabatik sıcaklık gradyanı $-\Gamma$ olduğundan,

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma\xi + O(\xi^2).$$

Çevre sıcaklığı

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda\xi.$$

şeklindedir. Dolayısıyla parselin sıcaklık fazlalığı

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

olur.

Eşit basınçta yoğunluk, mutlak sıcaklıkla ters orantılıdır. Parselin kaldırma kuvveti ve yerçekimi nedeniyle yukarı yöndeki ivmesi

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma)\xi.$$

şeklindedir.

Buna göre:

- $\Lambda < \Gamma$ ise ivme yer değiştirmeye zıt yöndedir: atmosfer **kararlıdır**.
- $\Lambda > \Gamma$ ise ivme yer değiştirmeyi pekiştirir: atmosfer **kararsızdır**.
- $\Lambda = \Gamma$ ise parsel, çevresiyle aynı sıcaklık ve yoğunlukta kalır: atmosfer **nötrdür**.

Böylece

$$\boxed{\text{kararlı: } \Lambda < \Gamma, \quad \text{kararsız: } \Lambda > \Gamma, \quad \text{nötr: } \Lambda = \Gamma.}$$

3.2. Başlangıçta daha sıcak olan bir parselin ulaştığı yükseklik

Doğrusal yaklaşımda,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

Dolayısıyla,

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

Kararlı bir atmosferde $\Gamma - \Lambda > 0$ olduğundan, parselin başlangıçtaki sıcaklık fazlalığı yükseklikle azalır. Nötr yüzebilirlik düzeyi, bu fark sıfıra eşitlenerek bulunur:

$$\boxed{z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}.$$

Buradaki $z_{\max}$ gösterimi, soruda amaçlanan ve eylemsizlik nedeniyle denge düzeyinin aşılmasını ihmal eden karışım yüksekliği modeline uygundur.

Tamlık açısından, nötr yüzebilirlik yüksekliği Bölüm 2.4'teki yaklaşım kullanılmadan da bulunabilir. Parsel sıcaklığının tam ifadesi atmosfer sıcaklığına eşitlenirse,

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right).$$

Böylece, $\Lambda \neq 0$ için,

$$z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}} \right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)} \right].$$

$\Lambda = 0$ için bunun limiti

$$z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}.$$

şeklindedir. $T_{p0} - T_0 \ll T_0$ olduğunda her ikisi de belirtilen doğrusal sonuca indirgenir.

Dinamik açıdan bir açıklama gereklidir: nötr yüzebilirlik, ivmenin sıfır olduğu anlamına gelir; hızın da mutlaka sıfır olması gerekmez. Serbestçe hareket eden bir parsel bu düzeyi aşabilir. Örneğin, aynı doğrusal yaklaşımda, durgun hâlden bırakılan ve sönüme uğramayan bir parsel

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

denkleminde uyar ve ilk geri dönüş noktası $2z_n$ 'dir. Sonraki kısımlarda, amaçlanan nötr yüzebilirlik karışım yüksekliği kullanılır.

4.1. 96 m ve 119 m'deki parsel sıcaklıkları

Belirtilen her tabakanın ölçülmüş uç noktalarından geçen doğruları kullanalım. Bunların sıcaklık azalma oranları

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

ve

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

şeklindedir.

İlk doğru yer seviyesine uzatıldığında,

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

sıcaklığı elde edilir; bu değer parselin başlangıçtaki 22°C sıcaklığına yakındır. İlgili tüm sıcaklık değişimleri, yaklaşık 294 K olan mutlak sıcaklığa göre küçüktür; dolayısıyla Bölüm 2.4 uygulanabilir.

Kelvin cinsinden bir sıcaklık farkı, Celsius cinsinden sıcaklık farkına eşit olduğundan,

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

Sonuç olarak,

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

ve

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

Sıcaklık verilerinin hassasiyetine göre,

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

Bir kontrol olarak, Bölüm 2.3'teki tam formül birinci tabakaya ve izotermal ikinci tabakaya ayrı ayrı uygulandığında sırasıyla 21.059°C ve 20.833°C elde edilir. Bunlar yuvarlandığında aynı cevapları verir.

4.2. Karışım yüksekliği

Hem 96 m'de hem de 119 m'de çevre sıcaklığı 20.1°C 'dir. Parsel her iki yükseklikte de daha sıcaktır; dolayısıyla 119 m'nin üzerindeki terselme tabakasına doğru ilerlemeye devam eder.

Buradaki pozitif sıcaklık gradyanını

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

olarak yazalım. Bu tabakadaki çevre sıcaklığı

$$T(z) = 20.1^\circ\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

şeklindedir.

Karışım yüksekliğinde parsel ve atmosfer aynı sıcaklıktadır:

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

burada H metre, gösterilen sıcaklıklar ise Celsius derece cinsindendir. Çözülürse,

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m}.$$

Bu değer, gerektiği gibi, varsayılan terselme tabakasının içinde yer alır.

Parselin buradaki sıcaklığı

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^\circ\text{C}.$$

olur. Dolayısıyla,

$$\boxed{H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}}.$$

Sıcaklığın doğrusal değiştiği üç atmosfer tabakasının tamamında parsel sıcaklığının tam değişimi kullanıldığında $H = 143.78 \text{ m}$ elde edilir; bu da parsel için doğrusal yaklaşımın yeterli olduğunu doğrular.

5.1. CO için korunum denklemi

Düzgün biçimde karışmış hava hacmi

$$V = LWH.$$

şeklindedir. $C(t)$, CO'nun kütle derişimi ise kutunun içindeki toplam CO kütlesi

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

olur.

Rüzgâr, genişliği L ve yüksekliği H olan bir yüzeyden geçtiğinden hacimsel debisi

$$Q = uLH.$$

olur. Giren hava temiz olduğundan, içeri giren CO akışı sıfırdır. Dışarı çıkan CO'nun kütleli debisi

$$QC = uLH C.$$

şeklindedir. Dolayısıyla CO'nun korunumu

$$\frac{d}{dt}(LWH C) = M - uLH C.$$

denklemini verir. Kutunun boyutları sabittir; böylece

$$\boxed{\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}}, \quad \boxed{C(0) = 0}.$$

5.2. Zamanın fonksiyonu olarak derişim

Sabit bir özel çözüm

$$C_{ss} = \frac{M}{uLH}.$$

şeklindedir. Homojen çözüm $e^{-ut/W}$ ile orantılıdır; dolayısıyla

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

$C(0) = 0$ kullanılırsa,

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

Böylece

$$\boxed{C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s.}$$

Havalandırmanın karakteristik süresi W/u 'dur. Rüzgârın olmadığı limitte bu ifade, beklendiği gibi $C(t) = Mt/(LWH)$ 'ye indirgenir.

5.3. Sabah saat 8:00'deki CO derişimi

Bir saat boyunca salınan toplam CO miktarı

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg.}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

değerleri kullanıldığında, geçen boyutsuz süre

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

olur. Böylece

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

ve buradan

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

elde edilir.

Kaba girdi verilerine uygun bir hassasiyetle,

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.