

IPhO 2008

Теоретические задачи и решения · Ханой, Вьетнам · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphO/2008/

Задача 1: Водяная рисотолчая

А. Введение

Рис — основной продукт питания большинства жителей Вьетнама. Чтобы получить белый рис из необрушенного риса, необходимо отделить шелуху (этот процесс называется «шелушением») и удалить отрубевую оболочку («шлифование»). Холмистые районы северного Вьетнама изобилуют ручьями, и местные жители используют для удаления отрубевой оболочки *водяные рисотолчеи*. На рисунке 1 показана одна из таких рисотолчей, а на рисунке 2 — принцип её работы.

В. Устройство и принцип работы

1. Устройство.

Рисотолчая, показанная на рисунке 1, состоит из следующих частей:

Ступа — по существу, деревянная ёмкость для риса.

Рычаг — ствол дерева с одним толстым и одним тонким концом. Он может вращаться вокруг горизонтальной оси. К тонкому концу рычага перпендикулярно ему прикреплён *пест*. Длина песта такова, что при горизонтальном положении рычага он касается риса в ступе. В толстом конце рычага выдолблено углубление, образующее ковш. Форма ковша имеет решающее значение для работы рисотолчеи.

2. Режимы работы

У рисотолчеи есть два режима.

Рабочий режим. В этом режиме рисотолчая совершает рабочий цикл, показанный на рисунке 2.

Толчение риса происходит за счёт работы, которую пест совершает над рисом на стадии f) рисунка 2. Если по какой-либо причине пест никогда не касается риса, будем говорить, что рисотолчая не работает.

Режим покоя с поднятым рычагом. На стадии c) рабочего цикла (рисунок 2) по мере увеличения угла наклона α количество воды в ковше уменьшается. В некоторый момент воды остаётся ровно столько, сколько нужно для уравнивания силы тяжести рычага. Обозначим угол наклона в этот момент через β . Если установить рычаг под углом β с нулевой начальной угловой скоростью, то он будет оставаться в этом положении сколь

угодно долго. Это режим покоя с поднятым рычагом. Устойчивость этого положения зависит от расхода воды, поступающей в ковш, Φ . Если Φ превышает некоторое значение Φ_2 , то этот режим покоя устойчив и рисотолчея не может находиться в рабочем режиме.

Иными словами, Φ_2 — минимальный расход воды, при котором рисотолчея не работает.



Рисунок 1
Водяная рисотолчея

РАБОЧИЙ ЦИКЛ ВОДЯНОЙ РИСОТОЛЧЕИ

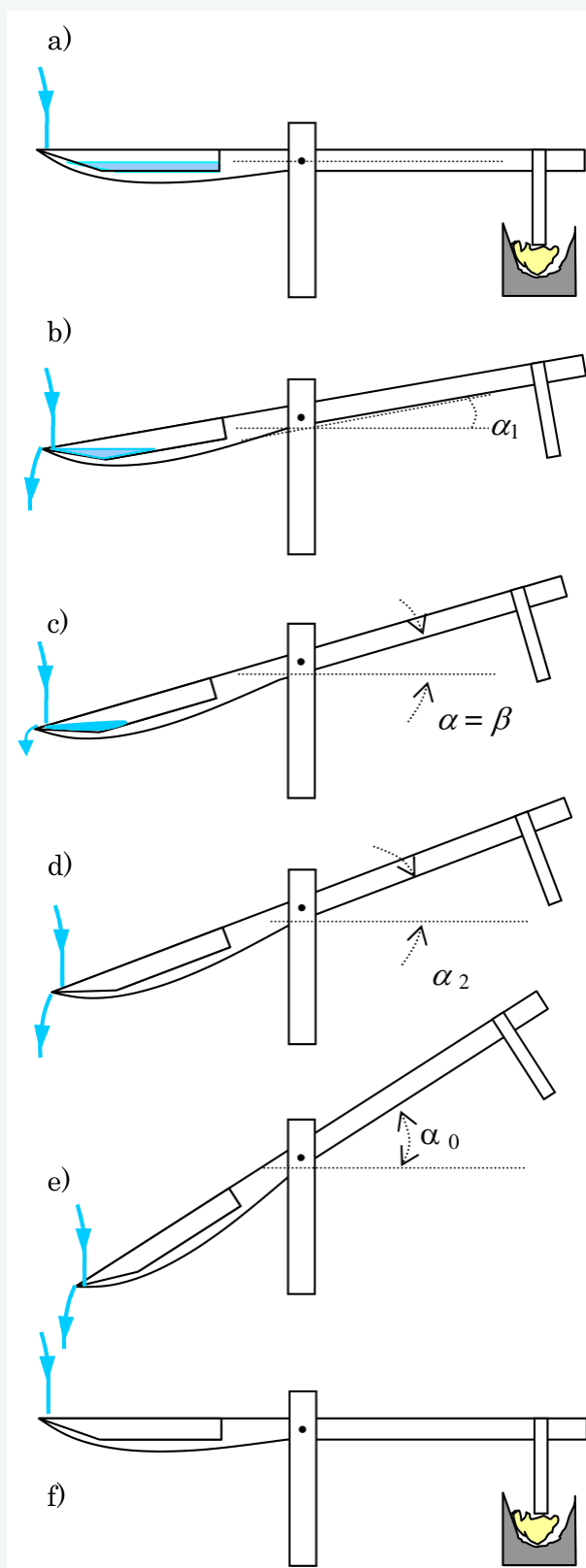


Рисунок 2

а) Вначале воды в ковше нет, пест опирается на ступу. Вода поступает в ковш с небольшим расходом, но некоторое время рычаг остаётся в горизонтальном положении.

б) В некоторый момент воды становится достаточно, чтобы поднять рычаг. Из-за наклона вода устремляется к дальнему краю ковша, ускоряя наклон рычага.

Вода начинает выливаться при $\alpha = \alpha_1$.

с) По мере увеличения угла α вода начинает выливаться. При некотором угле наклона $\alpha = \beta$ суммарный момент сил равен нулю.

д) α продолжает увеличиваться, вода продолжает выливаться, пока ковш не опустеет.

е) α продолжает увеличиваться по инерции. Из-за формы ковша поступающая в него вода сразу же выливается. Движение рычага по инерции продолжается до тех пор, пока α не достигнет максимального значения α_0 .

ф) Когда воды в ковше нет, сила тяжести рычага возвращает его в исходное горизонтальное положение. Пест ударяет по ступе с находящимся в ней рисом, и начинается новый цикл.

С. Задача

Рассмотрим водяную рисотолчею со следующими параметрами (рисунок 3).

Масса рычага (включая пест, но без воды) равна $M = 30 \text{ kg}$.

Центр масс рычага находится в точке G. Рычаг вращается вокруг оси T (проецирующей в точку T на рисунке).

Момент инерции рычага относительно T равен $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Когда в ковше есть вода, её массу обозначим через m , а центр масс объёма воды — через N.

Угол наклона рычага относительно горизонтальной оси равен α .

Основные линейные размеры рисотолчеи и ковша указаны на рисунке 3.

Пренебрегите трением в оси вращения и силой, обусловленной падением воды в ковш. В этой задаче примем приближение, согласно которому поверхность воды всегда горизонтальна.

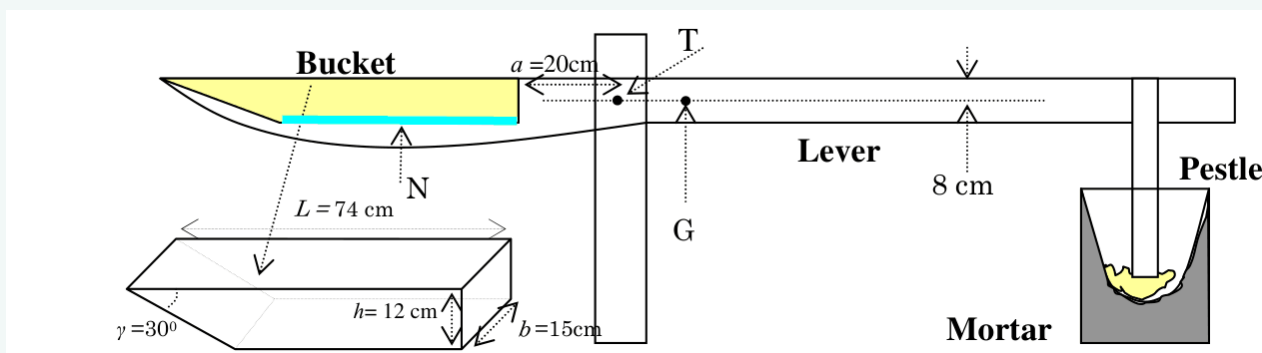


Рисунок 3 Устройство и размеры рисотолчеи

1. Устройство рисотолчеи

Вначале ковш пуст, а рычаг расположен горизонтально. Затем вода поступает в ковш до тех пор, пока рычаг не начнёт вращаться. Масса воды в ковше в этот момент равна $m = 1.0 \text{ kg}$.

1.1. Определите расстояние от центра масс G рычага до оси вращения T. Известно, что при пустом ковше отрезок GT горизонтален.

1.2. Вода начинает выливаться из ковша, когда угол между рычагом и горизонтальной осью достигает α_1 . Ковш полностью опустошается, когда этот угол равен α_2 .

Определите α_1 и α_2 .

1.3. Пусть $\mu(\alpha)$ — суммарный момент сил тяжести рычага и воды в ковше относительно оси T . $\mu(\alpha)$ равен нулю при $\alpha = \beta$. Определите β и массу m_1 воды в ковше в этот момент.

2. Параметры рабочего режима

Пусть вода поступает в ковш с постоянным малым расходом Φ . Количеством воды, поступающей в ковш во время движения рычага, можно пренебречь. В этой части задачи пренебрегите изменением момента инерции в течение рабочего цикла.

2.1. Изобразите схематически график зависимости момента сил μ от угла α , $\mu(\alpha)$, в течение одного рабочего цикла. Явно укажите значения $\mu(\alpha)$ при углах α_1 , α_2 и $\alpha = 0$.

2.2. Используя график, полученный в пункте 2.1., обсудите и дайте геометрическую интерпретацию величины полной энергии W_{total} , сообщаемой моментом сил $\mu(\alpha)$, и работы W_{pounding} , которую пест совершает над рисом.

2.3. По графику зависимости μ от α оцените α_0 и W_{pounding} (считайте, что кинетической энергией воды, поступающей в ковш и вытекающей из него, можно пренебречь). Если это упрощает расчёт, можно заменить кривые ломаными линиями.

3. Режим покоя

Пусть вода поступает в ковш с постоянным расходом Φ , но количеством воды, поступающей в ковш во время движения рычага, пренебрегать нельзя.

3.1. Считая, что ковш всегда наполнен водой до перелива,

3.1.1. Изобразите схематически график зависимости момента сил μ от угла α в окрестности $\alpha = \beta$. К какому виду равновесия относится положение рычага $\alpha = \beta$?

3.1.2. Найдите аналитическое выражение момента сил $\mu(\alpha)$ как функции $\Delta\alpha$, если $\alpha = \beta + \Delta\alpha$, а $\Delta\alpha$ мало.

3.1.3. Запишите уравнение движения рычага, начинающего движение с нулевой начальной скоростью из положения $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ мало). Покажите, что это движение с хорошей точностью представляет собой гармонические колебания. Вычислите период τ .

3.2. При заданном Φ ковш постоянно наполнен водой до перелива только в том случае, если рычаг движется достаточно медленно. Существует верхний предел амплитуды гармонических колебаний, зависящий от Φ . Определите минимальное значение Φ_1 расхода Φ (в кг/с), при котором рычаг может совершать гармонические колебания с амплитудой 1° .

3.3. Предположим, что Φ достаточно велик, чтобы при свободном движении рычага, когда угол наклона уменьшается от α_2 до α_1 , ковш всегда оставался наполненным водой до перелива. Однако при слишком большом Φ рисотолчея не может работать. Считая движение рычага гармоническим колебанием, оцените минимальный расход Φ_2 , при котором рисотолчея не работает.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Положительный момент сил соответствует увеличению α . В численных результатах использованы $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ и $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

- 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$.
- 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ, \quad \alpha_2 = 30^\circ$.
- 1.3. $\beta = 23.57^\circ, \quad m_1 = 0.605 \text{ kg}$.
- 2.1. При подъёме

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}, \quad \mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}.$$

Ветвь возврата с пустым ковшом задаётся выражением $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ и заканчивается значением -4.62 N m . Наполнение при $\alpha = 0$ соединяет это значение с нулём.

- 2.2. $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$ — площадь, ограниченная циклом. Работа при толчении равна

$$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0,$$

и совпадает с W_{total} , если пренебречь кинетической энергией, уносимой водой.

- 2.3. $\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}$.
- 3.1.1. Устойчивое равновесие; график момента сил пересекает нулевой уровень при β с отрицательным наклоном.
- 3.1.2. Если $\Delta\alpha$ выражено в радианах,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

- 3.1.3. $\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau)$, где $\tau \approx 3.26 \text{ s}$.
- 3.2. $\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}$.
- 3.3. Используя предельную амплитуду $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$, получаем

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

Положение равновесия соответствует β ; α_1 — нижняя точка поворота, используемая в этой оценке.

Решение

Обозначим через $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ массу воды, при которой начинается движение, и положим $r = GT$. Из рисунка 3:

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

Ось вращения находится на $d = 0.08 \text{ m}$ ниже верхнего края ковша. Используем стандартные значения $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ и $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, которые не указаны в условии задачи.

Введём удобные обозначения:

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. Положение центра масс рычага

Длина плоского дна ковша равна

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m.}$$

Пусть η — начальная глубина воды над этим дном. Продольное сечение воды представляет собой трапецию, поэтому

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0 / (\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m.}$$

Будем отсчитывать u вдоль ковша от его внутренней вертикальной стенки к наружному краю. Горизонтальная полоска на высоте y над дном простирается от $u = 0$ до $u = \ell + qy$. Поэтому по положению её центра масс получаем

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

Обозначая $w = \ell + q\eta$, получаем

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m.}$$

В момент отрыва песта от риса реакция опоры обращается в нуль. Моменты двух сил тяжести уравниваются:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

Таким образом,

$$r = \frac{m_0}{M} (a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

Введём соответствующий масштаб момента сил:

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m.}$$

1.2. Начало и конец выливания воды

Воспользуемся системой координат, связанной с ковшом:

- s отсчитывается вдоль его верхнего края от наружного края внутрь;
- z задаёт глубину ниже этого края.

Наклонная торцевая стенка задаётся уравнением $z = s \tan \gamma$, плоское дно — уравнением $z = h$, а ось вращения имеет координаты (R, d) .

Когда вода достигает наружного края, её горизонтальная поверхность проходит через $(0, 0)$. В системе координат ковша её уравнение имеет вид

$$z = s \tan \alpha.$$

Продольное сечение оставшейся воды при этом представляет собой треугольник с вершинами

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

Поэтому её масса равна

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2} (\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

При массе воды $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ выливание начинается, когда эта вместимость становится равной m_0 :

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

Вода полностью выливается, когда горизонтальная свободная поверхность становится параллельной наклонной торцевой стенке:

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

Треугольная форма сечения согласуется с размерами: при α_1 его внутренняя крайняя точка находится на расстоянии $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$.

1.3. Угол равновесия и масса оставшейся воды

Центр масс треугольного сечения воды при переливе имеет координаты

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

Заданные размеры обладают полезным свойством:

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

Таким образом, TN направлен вдоль рычага, а горизонтальное плечо силы тяжести воды равно

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

Суммарный момент сил при выливании равен

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

Положим $v = \cot \beta - q$. Условие равновесия принимает вид

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

Корень в физически допустимом диапазоне $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ равен

$$v = 0.560329.$$

Следовательно,

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

и

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

Расстояние, которое понадобится далее, равно

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m.}$$

2.1. Момент сил в течение рабочего цикла

При произвольных координатах центра масс воды (s_N, z_N) горизонтальное плечо её силы тяжести равно

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

Поэтому до начала выливания

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

Первоначально сечение воды имеет форму трапеции. Оно становится треугольным, когда вода перестаёт касаться внутренней вертикальной стенки. Это происходит при

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

Для $\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$ введём

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b (\cot \alpha - q)}}.$$

Это высота треугольника, измеренная перпендикулярно дну ковша. Его центр масс имеет координаты

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

Эти выражения вместе с (3) определяют ветвь подъёма до начала выливания. Между α_1 и α_2 используем (2).

После опустошения ковша вода больше не создаёт момента сил:

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

График можно построить по следующим значениям:

α	Момент сил при подъёме (N m)	Момент сил при возврате с пустым ковшом (N m)
0°	0 в момент отрыва	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

Полный цикл имеет следующие особенности:

1. При $\alpha = 0$ наполнение увеличивает момент сил тяжести от $-K$ до нуля. На графике зависимости момента сил от угла это вертикальный отрезок. На этой стадии реакция ступы удерживает рычаг неподвижным.
2. При подъёме момент сил возрастает от нуля до максимума $+2.687 \text{ N m}$ при α_1 .
3. Из-за выливания воды момент сил уменьшается, проходит через нуль при β и достигает -4.001 N m при α_2 .
4. От α_2 до максимального угла α_0 , а также на всём обратном пути с пустым ковшем момент сил равен $-K \cos \alpha$. Эти кривые прямого и обратного движения совпадают при $\alpha \geq \alpha_2$.

В частности, $\mu(0)$ имеет разные значения на разных стадиях: нуль в момент отрыва и -4.620 N m при пустом ковше.

2.2. Работа и её геометрическая интерпретация

Элементарная работа при вращении равна

$$dW = \mu d\alpha,$$

где углы измеряются в радианах.

Полная работа за цикл равна

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

При углах больше α_2 ветви совпадают, поэтому

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

Геометрически это площадь, ограниченная ветвью подъёма, ветвью возврата с пустым ковшем и отрезком наполнения при $\alpha = 0$.

Рычаг с пустым ковшем начинает обратное движение из состояния покоя при α_0 . Уменьшение его потенциальной энергии в поле тяжести превращается в кинетическую энергию, передаваемую при ударе:

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

Это положительная площадь между кривой возврата с пустым ковшем и осью угла на участке от 0 до α_0 .

Если вытекающая вода уносит кинетическую энергию, эта энергия уменьшает долю работы за цикл, передаваемую рису. В приближении пункта 2.3, согласно которому этой энергией можно пренебречь,

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

Эквивалентно, положительные и отрицательные площади с учётом знака на всём участке подъёма взаимно компенсируются, поскольку подъём начинается и заканчивается в состоянии покоя:

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. Максимальный угол и работа при толчении

Пусть

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

Это кинетическая энергия, остающаяся в момент, когда выливается последняя вода.

Соединяя приведённые в таблице точки ветви подъёма отрезками прямых, получаем

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

При движении от α_2 до α_0 рычаг с пустым ковшом преобразует эту энергию в потенциальную энергию в поле тяжести:

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

Таким образом, оценка по ломаной даёт

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

откуда

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

Более точное интегрирование криволинейных ветвей момента сил даёт

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

Следовательно, $E_2 = 0.5016 \text{ J}$, откуда

$$\boxed{\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}}.$$

3.1.1. Равновесие при непрерывном переливе

При непрерывном переливе масса воды является функцией угла, задаваемой выражением (1), при обоих направлениях движения.

Вблизи β увеличение α уменьшает массу воды и создаёт отрицательный момент сил.

Уменьшение α увеличивает массу удерживаемой воды и создаёт положительный момент сил.

Таким образом, график проходит через $(\beta, 0)$ с отрицательным наклоном, и

$$\boxed{\alpha = \beta - \text{положение устойчивого равновесия.}}$$

В принятой идеализации малые возмущения вызывают незатухающие колебания.

3.1.2. Линеаризованный момент сил

Запишем (2) в виде

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

где

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

В равновесии $F(\cot \beta) = 0$. Кроме того,

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3} c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

Поэтому

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

Введём

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

Для малого углового отклонения, выраженного в радианах,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. Уравнение движения и период

В первом порядке приближения вычислим момент инерции воды в положении равновесия. Приближённо считая, что её небольшой вклад соответствует массе, сосредоточенной в центре масс, получаем

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

Момент инерции воды относительно её собственного центра масс составляет всего около 0.0026 kg m^2 , поэтому учёт её пространственной протяжённости пренебрежимо мало влияет на приведённое значение периода.

Изменения момента инерции умножаются на малые ускорения или скорости и дают вклад, выходящий за пределы линейного приближения. Поэтому, полагая $x = \alpha - \beta$, получаем

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Это уравнение гармонического осциллятора, причём

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

При $x(0) = \Delta\alpha$ и $\dot{x}(0) = 0$

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

Период равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. Расход, необходимый для амплитуды 1°

Вместимость ковша, наполненного до перелива, подчиняется соотношению

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

На нисходящем участке колебания эта вместимость увеличивается. Для поддержания перелива входящий массовый расход должен удовлетворять условию

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

Для малых колебаний с амплитудой A

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

В первом порядке

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

Максимум достигается при прохождении положения равновесия вниз. Поэтому

$$\boxed{\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A.} \quad (4)$$

Численно

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

При $A = 1^\circ = \pi/180$ радиан

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

Отсюда

$$\boxed{\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}}.$$

3.3. Оценка порогового расхода для прекращения толчения

Рассмотрим предельное колебание поднятого рычага, нижняя точка поворота которого соответствует α_1 . Его центр находится при угле равновесия β , поэтому амплитуда равна

$$\boxed{A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}}.$$

При этом предельном колебании рычаг остаётся выше горизонтального положения, поэтому пест не достигает риса.

Применяя то же условие перелива (4), получаем

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

Эквивалентно,

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

Таким образом,

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

Поправку, связанную с конечной амплитудой, можно проверить, сохраняя гармонический закон движения. На нисходящей ветви

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

поэтому точная скорость увеличения вместимости равна

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

Её максимум составляет приблизительно 0.69 kg s^{-1} , что согласуется с оценкой

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

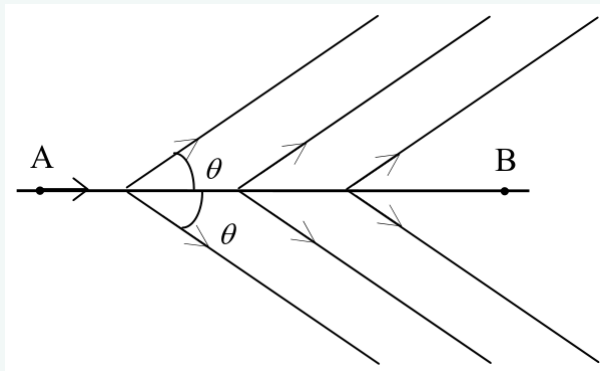
Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Черенковское излучение и кольцевой черенковский счётчик

Свет распространяется в вакууме со скоростью c . Ни одна частица не может двигаться со скоростью, превышающей c . Однако в прозрачной среде частица может двигаться со скоростью v , превышающей скорость света в этой же среде $\frac{c}{n}$, где n — показатель преломления среды. Эксперимент (Черенков, 1934) и теория (Тамм и Франк, 1937) показали, что заряженная частица, движущаяся со скоростью v в прозрачной среде с показателем преломления n при условии $v > \frac{c}{n}$, испускает свет, называемый *черенковским излучением*, в направлениях, образующих с траекторией угол

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.



1. Чтобы установить этот факт, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью $v > \frac{c}{n}$ по прямой. Она проходит точку A в момент времени 0 и точку B в момент времени t_1 . Поскольку задача симметрична относительно вращений вокруг AB, достаточно рассмотреть световые лучи в плоскости, содержащей AB.

В любой точке C между A и B частица испускает сферическую световую волну, распространяющуюся со скоростью $\frac{c}{n}$. Определим волновой фронт в данный момент времени t как огибающую всех этих сфер в этот момент.

1.1. Определите волновой фронт в момент времени t_1 и изобразите его пересечение с плоскостью, содержащей траекторию частицы.

1.2. Выразите угол φ между этим пересечением и траекторией частицы через n и β .

2. Рассмотрим пучок частиц, движущихся со скоростью $v > \frac{c}{n}$, при которой угол θ мал, вдоль прямой IS. Пучок пересекает вогнутое сферическое зеркало с фокусным расстоянием f и центром С в точке S. SC образует с SI малый угол α (см. рисунок на листе ответов). Пучок частиц создаёт кольцевое изображение в фокальной плоскости зеркала.

Объясните, почему это происходит, с помощью схематического рисунка. Укажите положение центра О и радиус r кольцевого изображения.

Такая схема используется в *кольцевых черенковских счётчиках* (RICH), а среда, через которую проходит частица, называется *радиатором*.

Примечание: во всех вопросах этой задачи следует пренебрегать членами второго и более высоких порядков по α и θ .

3. Пучок частиц с известным импульсом $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ состоит из частиц трёх типов: протонов, каонов и пионов с массами покоя $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$, $M_\kappa = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ и $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ соответственно. Напомним, что pc и Mc^2 имеют размерность энергии, а 1 эВ — это энергия, приобретаемая электроном при ускорении разностью потенциалов 1 В, причём $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

Пучок частиц проходит через воздух (радиатор), находящийся под давлением P .

Показатель преломления воздуха зависит от давления воздуха P согласно соотношению $n = 1 + aP$, где $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$

3.1. Для каждого из трёх типов частиц вычислите минимальное значение $P_{\min}$ давления воздуха, при котором возникает черенковское излучение.

3.2. Вычислите давление $P_{\frac{1}{2}}$, при котором радиус кольцевого изображения каонов равен половине радиуса кольцевого изображения пионов. Вычислите значения θ_κ и θ_π в этом случае.

Можно ли при этом давлении наблюдать кольцевое изображение протонов?

4. Теперь предположим, что пучок не является строго монохроматическим: импульсы частиц распределены в интервале с центром в $10 \text{ GeV}/c$, причём полуширина распределения на половине высоты равна Δp . Это приводит к уширению кольцевого изображения; соответственно, распределение θ имеет полуширину на половине высоты $\Delta\theta$. Давление в радиаторе равно $P_{\frac{1}{2}}$, определённому в 3.2.

4.1. Вычислите $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ и $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ — значения отношения $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ для пионов и каонов.

4.2. Если расстояние между двумя кольцевыми изображениями, $\theta_\pi - \theta_\kappa$, превышает в 10 раз сумму полуширин $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$, то есть $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$, два кольцевых изображения можно хорошо различить. Вычислите максимальное значение Δp , при котором два кольцевых изображения ещё можно хорошо различить.

5. Черенков впервые обнаружил эффект, названный его именем, наблюдая за бутылкой с водой, находившейся рядом с радиоактивным источником. Он увидел, что вода в бутылке испускает свет.

5.1. Найдите минимальную кинетическую энергию $T_{\min}$ частицы с массой покоя M , движущейся в воде, при которой она испускает черенковское излучение. Показатель преломления воды равен $n = 1.33$.

5.2. Радиоактивный источник, использованный Черенковым, испускает либо α -частицы (то есть ядра гелия) с массой покоя $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$, либо β -частицы (то есть электроны) с массой покоя $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$. Вычислите численные значения $T_{\min}$ для α -частиц и β -частиц.

Зная, что кинетическая энергия частиц, испускаемых радиоактивными источниками, никогда не превышает нескольких МэВ, определите, какие частицы вызывают излучение, наблюдавшееся Черенковым.

6. В предыдущих разделах задачи зависимость эффекта Черенкова от длины волны λ не учитывалась. Теперь учтём тот факт, что черенковское излучение частицы имеет широкий непрерывный спектр, включающий видимый диапазон (длины волн от $0.4 \mu\text{m}$ до $0.8 \mu\text{m}$). Известно также, что показатель преломления n радиатора линейно уменьшается на 2% от $n - 1$ при увеличении λ в пределах этого диапазона.

6.1. Рассмотрим пучок пионов с определённым импульсом $10.0 \text{ GeV}/c$, движущихся в воздухе при давлении 6 атм. Найдите разность углов $\delta\theta$, соответствующих двум границам видимого диапазона.

6.2. На этой основе качественно исследуйте влияние дисперсии на кольцевое изображение пионов, импульсы которых распределены в интервале с центром в $p = 10 \text{ GeV}/c$ и полушириной на половине высоты $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$.

6.2.1. Вычислите уширение, обусловленное дисперсией (изменением показателя преломления), и уширение, обусловленное некогерентностью пучка (разбросом импульсов).

6.2.2. Опишите, как меняется цвет кольца при переходе от его внутреннего края к внешнему, отметив соответствующие клетки на листе ответов.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 1.1.** Волновой фронт, образованный общими касательными, представляет собой прямой круговой конус с вершиной В и осью АВ, раскрывающийся назад вдоль траектории. Его осевое сечение состоит из двух отрезков касательных, сходящихся в В. Если излучение начинается в А, полная внешняя граница включает также открытую заднюю часть первой сферической волны.
- 1.2.**

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- 2. Пусть F — середина SC. Центр O лежит в фокальной плоскости, проходящей через F, в плоскости ISC, по другую сторону от SC относительно I:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

Опорный луч, идущий вдоль IS, отражается в S вдоль SO.

- 3.1.

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Пороговые давления равны

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

Для ненулевого излучения давление должно превышать пороговое.

- 3.2.

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

При этом давлении протоны не создают кольца.

- 4.1.

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

- 4.2. Предельная полуширина равна

$$\Delta p_{\lim} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

Указанный строгий критерий разделения требует $\Delta p < \Delta p_{\lim}$.

- 5.1.

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

- 5.2.

$$T_{\min,\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\min,e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Наблюдаемое излучение создают β -частицы, то есть электроны.

- 6.1.

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

- 6.2.1. Дисперсия даёт полный угловой размах по видимому спектру приблизительно 0.59 mrad. Разброс импульсов даёт

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (полуширина)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

Соответствующие радиальные ширины получаются умножением этих угловых ширин на f .

- 6.2.2. Внутренний край красный, а внешний — синий/фиолетовый. Преобладающие длины волн уменьшаются по направлению наружу; разброс импульсов размывает и смешивает соседние цвета.

Решение

Углы измеряются в радианах. Геометрия зеркала рассматривается в первом порядке по малым углам. При вычислении численных результатов сохраняются релятивистское соотношение между импульсом и скоростью и соотношение для черенковского излучения.

1.1. Построение волнового фронта

Обозначим скорость света в среде через

$$u = \frac{c}{n}.$$

Пусть частица проходит С в момент времени t_C . В момент времени t_1 волна, испущенная в этой точке, имеет радиус

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

а частица за это время проходит от С до В расстояние

$$CB = v(t_1 - t_C).$$

Следовательно,

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

независимо от С.

В любой плоскости, содержащей АВ, сечения сферических волн представляют собой окружности. Их радиусы пропорциональны расстояниям от их центров до В. Поэтому они имеют две общие касательные, проходящие через В. При вращении этих касательных вокруг АВ получается прямой круговой конус с вершиной в В, раскрывающийся назад.

Требуемый рисунок строится следующим образом:

1. Изобразите АВ горизонтально, расположив В справа, причём $AB = vt_1$.
2. Изобразите наибольшую волновую окружность с центром в А и радиусом ut_1 .
3. Изобразите меньшие волновые окружности с центрами в промежуточных точках С и радиусами $u(t_1 - t_C)$.
4. Проведите из В верхнюю и нижнюю общие касательные к этим окружностям. Отметьте точку касания Т на окружности с центром в А и проведите $AT \perp BT$.

Для конечного участка излучения А–В коническая часть простирается от В до окружности касания на первой сфере. Если изображать всю внешнюю границу возмущённой области, её задняя часть представляет собой открытую сферическую шапочку с центром в А.

1.2. Угол волнового фронта и черенковский угол

В прямоугольном треугольнике АТВ

$$AT = \frac{c}{n}t_1, \quad AB = vt_1.$$

Острый угол между касательной ВТ и прямой траектории равен φ , поэтому

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

Таким образом,

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

Световые лучи перпендикулярны волновому фронту. Поэтому угол θ между лучом и направлением движения частицы удовлетворяет соотношению

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

Тем самым установлено уравнение (1).

2. Образование, центр и радиус кольца

Здесь C обозначает центр кривизны зеркала. Поскольку зеркало сферическое,

$$SC = 2f.$$

Пусть F — середина SC ; параксиальная фокальная плоскость перпендикулярна SC в точке F .

Сначала рассмотрим опорный световой луч, распространяющийся вдоль направления пучка частиц IS и падающий на зеркало в точке S . Нормаль к зеркалу в S направлена вдоль SC . По закону отражения отражённый луч SO образует с SC тот же угол α , что и SI , но с противоположной стороны.

Следовательно, для точки O его пересечения с фокальной плоскостью выполняется

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

Поскольку $CF = SF = f$, из того же построения следует

$$CO \parallel IS.$$

Теперь зафиксируем азимут вокруг траектории частицы. Все черенковские лучи, испущенные при этом азимуте, имеют одно и то же направление, даже если они испущены в разных точках траектории. Они образуют параллельный пучок, который зеркало фокусирует в одну точку своей фокальной плоскости.

При изменении азимута направление луча описывает конус с полууглом θ . В параксиальном приближении зеркало преобразует угловое отклонение в смещение в фокальной плоскости, равное произведению f на этот угол. Поэтому координаты точек изображения относительно O имеют вид

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

где ψ — азимут. Следовательно,

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

что представляет собой окружность:

$$r = f\theta.$$

На рисунке расположите S справа, C слева от неё, а F посередине между ними. Поместите I выше SC. Опорный луч отражается в S по направлению к O, лежащей ниже SC. Проведите фокальную плоскость через F и отметьте две точки пересечения кольца с плоскостью ISC на расстояниях с учётом знака

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta$$

от F, считая положительным направление в сторону I. Эти точки разделены расстоянием $2f\theta$, а середина отрезка между ними находится в O. Соответствующие точки для всех азимутов образуют кольцо.

3.1. Пороговые давления

Релятивистские энергия и импульс удовлетворяют соотношениям

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

Удобно ввести обозначение

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

Условие возникновения черенковского излучения имеет вид

$$n\beta > 1.$$

На пороге

$$n_{\min} = q.$$

Используя $n = 1 + aP$, получаем

$$P_{\min} = \frac{q - 1}{a} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

При заданных массах и $p = 10.0 \text{ GeV}/c$:

Частица	β	$P_{\min}$
Протон	0.995611	16.3 atm
Каон	0.998752	4.63 atm
Пион	0.999902	0.363 atm

При равенстве черенковский угол равен нулю; для кольца ненулевого радиуса давление должно превышать пороговое.

3.2. Давление, при котором радиус каонного кольца равен половине радиуса пионного

Поскольку $r = f\theta$, требуемое отношение радиусов даёт

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}$$

в пределах принятой точности оптического приближения.

Для каждого типа частиц

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p}\right)^2}.$$

Используя формулу двойного угла, получаем

$$\frac{q_\pi}{n} = \cos(2\theta_\kappa) = 2\left(\frac{q_\kappa}{n}\right)^2 - 1.$$

Таким образом,

$$n^2 + q_\pi n - 2q_\kappa^2 = 0.$$

Положительный корень равен

$$n_* = \frac{\sqrt{q_\pi^2 + 8q_\kappa^2} - q_\pi}{2}.$$

Численно

$$q_\kappa = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_\pi = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

откуда

$$n_* \simeq 1.00163306.$$

Следовательно,

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

Соответствующие углы равны

$$\theta_\kappa = \arccos \frac{q_\kappa}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_\pi = \arccos \frac{q_\pi}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

Таким образом,

$$\theta_\kappa \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_\pi \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

Пороговое давление для протонов равно 16.3 atm, что существенно выше этого давления.

Следовательно,

$$\text{Протонное кольцо не образуется.}$$

4.1. Угловое уширение из-за разброса импульсов

При фиксированном давлении n постоянно. Продифференцируем

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

Поскольку

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

получаем

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

Используя $q = 1/\beta$ и $q/n = \cos \theta$, это можно также записать в виде

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

Для узкого распределения импульсов преобразование локально линейно, поэтому

$$\Delta\theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

Производная положительна: при увеличении импульса черенковский угол увеличивается.

Вычисление при $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ и давлении из 3.2 даёт

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\kappa} \simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} \simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. Наибольшая допустимая полуширина распределения импульсов

Требуемое условие разделения имеет вид

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}).$$

Подстановка линейных соотношений для уширения даёт

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

Используя неокруглённые значения, получаем

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

Это составляет приблизительно 3.0% центрального значения импульса. Поскольку в условии задачи задано строгое неравенство, кольца хорошо различимы при

$$\boxed{\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

5.1. Пороговая кинетическая энергия в воде

Релятивистская кинетическая энергия равна

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

На пороге черенковского излучения

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

и

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

Для воды

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\min} \simeq 1.51676,$$

поэтому

$$T_{\min} \simeq 0.5168 Mc^2.$$

Для ненулевого излучения кинетическая энергия должна превышать этот порог.

5.2. Альфа-частицы и электроны

Для альфа-частицы

$$T_{\min, \alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

Для электрона

$$T_{\min, e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Кинетическая энергия альфа-частицы, составляющая всего несколько МэВ, намного ниже её порогового значения, равного приблизительно 1960 MeV. Электроны с энергиями в несколько МэВ легко могут превысить свой порог. Следовательно,

Наблюдаемое черенковское излучение создаётся электронами.

6.1. Разность углов на границах видимого спектра

При $P = 6 \text{ atm}$

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

Величина уменьшения показателя преломления в пределах видимого диапазона равна

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

Для пионов с импульсом 10.0 GeV/c характерное значение черенковского угла равно

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad}.$$

При фиксированной скорости частицы дифференцирование

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

по n даёт

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

Отсюда

$$\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}.$$

В первом порядке по изменению показателя преломления

$$\delta\theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Таким образом,

$$\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad.}$$

Меньшей длине волны соответствует больший показатель преломления и, следовательно, больший угол:

$$\theta(0.4 \mu\text{m}) > \theta(0.8 \mu\text{m}).$$

6.2.1. Уширение из-за дисперсии и разброса импульсов

Уширение из-за дисперсии представляет собой полный угловой размах между двумя границами видимого диапазона:

$$w_{\text{disp}} = \delta\theta \simeq 0.59 \text{ mrad.}$$

Соответствующий радиальный размах равен

$$w_{r,\text{disp}} = f\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.$$

Для разброса импульсов используем производную из 4.1, теперь вычисленную при 6 atm:

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_\pi^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

При $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$

$$\Delta\theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Следовательно,

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}$$

— это **полуширина на половине высоты**, тогда как

$$w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}$$

— это **полная ширина на половине максимума**.

Соответствующие радиальные полуширина и полная ширина на половине максимума (FWHM) равны

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,\text{FWHM}} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

Размах по видимому спектру, обусловленный дисперсией, примерно в 2.8 раза больше полной ширины на половине максимума, обусловленной разбросом импульсов. Поэтому дисперсия задаёт больший масштаб уширения. Однозначно вычислить суммарную полную ширину на половине максимума нельзя без задания формы распределения импульсов и спектральных весов.

6.2.2. Порядок цветов поперёк кольца

Поскольку

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

имеем

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

Так как $r = f\theta$,

$$\boxed{\frac{dr}{d\lambda} < 0.}$$

Следовательно, большим длинам волн соответствуют меньшие радиусы. Правильный выбор цветов:

- **Внутренний край:** красный, соответствующий большим длинам волн.
- **При движении наружу:** преобладающие длины волн постепенно уменьшаются, а соседние цвета перекрываются.
- **Внешний край:** синий/фиолетовый, соответствующий наименьшим длинам волн.

Разброс импульсов размывает этот порядок, но его характерная ширина меньше хроматического размаха, поэтому картина с красным внутренним и фиолетовым внешним краем сохраняется.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Изменение температуры воздуха с высотой, устойчивость атмосферы и загрязнение воздуха

Вертикальное движение воздуха определяет многие атмосферные процессы, такие как образование облаков и осадков и рассеивание загрязняющих воздух веществ. Если атмосфера *устойчива*, вертикальное движение ограничено и загрязняющие вещества имеют тенденцию накапливаться вблизи места выброса, а не рассеиваться и разбавляться. В то же время в *неустойчивой* атмосфере вертикальное движение воздуха способствует рассеиванию загрязняющих веществ по вертикали. Поэтому концентрации загрязняющих веществ зависят не только от интенсивности источников выбросов, но и от *устойчивости* атмосферы.

Мы будем определять устойчивость атмосферы, используя метеорологическое понятие *воздушной частицы* и сравнивая температуру воздушной частицы, адиабатически поднимающейся или опускающейся в атмосфере, с температурой окружающего воздуха. Мы увидим, что во многих случаях воздушная частица, содержащая загрязняющие вещества и поднимающаяся от поверхности земли, остановится на некоторой высоте, называемой *высотой перемешивания*. Чем больше высота перемешивания, тем ниже концентрация загрязняющих воздух веществ. Мы оценим высоту перемешивания и концентрацию монооксида углерода, выбрасываемого мотоциклами в Ханойской агломерации, для утреннего часа пик, когда вертикальное перемешивание ограничено температурной инверсией (температура воздуха растёт с высотой) на высотах более 119 м.

Будем рассматривать воздух как идеальный двухатомный газ с молярной массой $\mu = 29 \text{ g/mol}$.

Квазиравновесное адиабатическое превращение подчиняется уравнению $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ — отношение изобарной и изохорной теплоёмкостей газа.

При необходимости участник может использовать следующие данные:

Универсальная газовая постоянная равна $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

Атмосферное давление у поверхности земли равно $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Ускорение свободного падения постоянно, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Молярная изобарная теплоёмкость воздуха равна $c_p = \frac{7}{2}R$.

Молярная изохорная теплоёмкость воздуха равна $c_V = \frac{5}{2}R$.

Математические подсказки

а.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

б. Решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (где A и B — постоянные) имеет вид

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

где $x_1(t)$ — решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

с.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. Изменение давления с высотой.

1.1. Предположим, что температура атмосферы всюду одинакова и равна T_0 . Запишите выражение для атмосферного давления p как функции высоты z .

1.2. Предположим, что температура атмосферы изменяется с высотой согласно соотношению

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

где Λ — постоянная, называемая *вертикальным градиентом убывания температуры* атмосферы (вертикальная производная температуры равна $-\Lambda$).

1.2.1. Запишите выражение для атмосферного давления p как функции высоты z .

1.2.2. Процесс, называемый свободной конвекцией, возникает, когда плотность воздуха увеличивается с высотой. При каких значениях Λ возникает свободная конвекция?

2. Изменение температуры воздушной частицы при вертикальном движении

Рассмотрим воздушную частицу, движущуюся вверх и вниз в атмосфере. Воздушная частица — это объём воздуха достаточно большого размера, порядка нескольких метров в поперечнике, чтобы его можно было рассматривать как самостоятельную термодинамическую систему, но при этом достаточно малого, чтобы его температуру можно было считать однородной. Вертикальное движение воздушной частицы можно рассматривать как квазиadiaбатический процесс, то есть теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь. Если воздушная частица поднимается в атмосфере, она расширяется и охлаждается. И наоборот, если она движется вниз, возрастающее внешнее давление сжимает воздух внутри частицы и её температура повышается.

Поскольку размер частицы невелик, атмосферное давление в различных точках её границы можно считать одинаковым и равным $p(z)$, где z — высота центра частицы. Температура внутри частицы однородна и равна $T_{\text{parcel}}(z)$, что в общем случае отличается от температуры окружающего воздуха $T(z)$. В пунктах 2.1 и 2.2 мы не делаем никаких предположений о виде зависимости $T(z)$.

2.1. Изменение температуры частицы T_{parcel} с высотой определяется соотношением

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

Выведите выражение для $G(T, T_{\text{parcel}})$.

2.2. Рассмотрим особое состояние атмосферы, при котором на любой высоте z температура T атмосферы равна температуре частицы T_{parcel} , $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$.

Обозначим через Γ значение G при $T = T_{\text{parcel}}$, то есть

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

(при $T = T_{\text{parcel}}$). Величина Γ называется *сухоadiaбатическим градиентом температуры*.

2.2.1. Выведите выражение для Γ

2.2.2. Вычислите численное значение Γ .

2.2.3. Выведите выражение для температуры атмосферы $T(z)$ как функции высоты.

2.3. Предположим, что температура атмосферы зависит от высоты согласно соотношению $T(z) = T(0) - \Lambda z$, где Λ — постоянная. Найдите зависимость температуры частицы $T_{\text{parcel}}(z)$ от высоты z .

2.4. Запишите приближённое выражение для $T_{\text{parcel}}(z)$ при $|\Lambda z| \ll T(0)$ и $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$.

3. Устойчивость атмосферы.

В этой части мы предполагаем, что T изменяется линейно с высотой.

3.1. Рассмотрим воздушную частицу, первоначально находящуюся в равновесии с окружающим воздухом на высоте z_0 , то есть имеющую ту же температуру $T(z_0)$, что и окружающий воздух. Если частицу немного сместить вверх или вниз (например, вследствие атмосферной турбулентности), возможен один из следующих трёх случаев:

- Воздушная частица возвращается на исходную высоту z_0 ; равновесие частицы устойчиво. Атмосферу называют устойчивой.
- Частица продолжает двигаться в первоначальном направлении; равновесие частицы неустойчиво. Атмосфера неустойчива.
- Воздушная частица остаётся в новом положении; равновесие частицы безразлично. Атмосферу называют нейтральной.

Какому условию должна удовлетворять Λ , чтобы атмосфера была устойчивой, неустойчивой или нейтральной?

3.2. Температура частицы у поверхности земли $T_{\text{parcel}}(0)$ выше температуры окружающего воздуха $T(0)$. Под действием выталкивающей силы частица будет подниматься. Выведите выражение для максимальной высоты, которой может достичь частица в устойчивой атмосфере, через Λ и Γ .

4. Высота перемешивания

4.1. В таблице 1 приведены температуры воздуха, зарегистрированные радиозондом в 7:00 утра в один из ноябрьских дней в Ханое. Изменение температуры с высотой можно приближённо описать формулой $T(z) = T(0) - \Lambda z$ с различными градиентами убывания температуры Λ в трёх слоях $0 < z < 96 \text{ m}$, $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$ и $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$.

Рассмотрим воздушную частицу с температурой $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$, поднимающуюся от поверхности земли. На основе данных таблицы 1 и с использованием приведённого выше линейного приближения вычислите температуру частицы на высотах 96 м и 119 м.

4.2. Определите максимальную высоту H , которой может достичь частица, и температуру частицы $T_{\text{parcel}}(H)$.

Величина H называется высотой перемешивания. Загрязняющие вещества, выбрасываемые у поверхности земли, могут смешиваться с атмосферным воздухом (например, благодаря ветру, турбулентности и рассеиванию) и разбавляться в пределах этого слоя.

Таблица 1

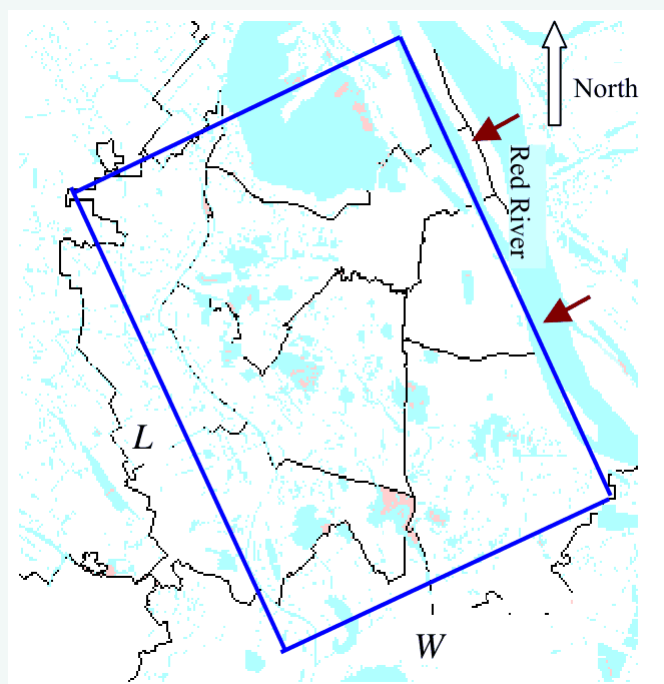
Данные, зарегистрированные радиозондом в 7:00 утра в один из ноябрьских дней в Ханое.

Высота, м	Температура, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1

Высота, м	Температура, °C
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. Оценка загрязнения монооксидом углерода (CO) в утренний час пик движения мотоциклов в Ханое.

Ханойскую агломерацию можно приближённо представить прямоугольником с размерами основания L и W , как показано на рисунке, причём одна из его сторон проходит вдоль юго-западного берега Красной реки.



По оценкам, в утренний час пик, с 7:00 до 8:00, на дорогах находятся 8×10^5 мотоциклов, каждый из которых проезжает в среднем 5 км и выбрасывает 12 г CO на километр пути. Будем приближённо считать, что CO выбрасывается равномерно во времени, с постоянной

интенсивностью M в течение часа пик. Одновременно чистый северо-восточный ветер дует перпендикулярно Красной реке (то есть перпендикулярно сторонам L прямоугольника) со скоростью u , проходит через город с той же скоростью и выносит часть загрязнённого СО воздуха из атмосферы города.

Кроме того, мы используем следующую грубую приближённую модель:

- СО быстро распространяется по всему объёму слоя перемешивания над Ханойской агломерацией, так что концентрацию $C(t)$ СО в момент времени t можно считать одинаковой во всём этом прямоугольном параллелепипеде с размерами L , W и H .
- Воздух, поступающий в параллелепипед с наветренной стороны, чистый; предполагается, что загрязняющие вещества не выходят из параллелепипеда через грани, параллельные ветру.
- До 7:00 утра концентрацией СО в атмосфере можно пренебречь.

5.1. Выведите дифференциальное уравнение, определяющее концентрацию загрязняющего вещества СО $C(t)$ как функцию времени.

5.2. Запишите решение этого уравнения для $C(t)$.

5.3. Вычислите численное значение концентрации $C(t)$ в 8:00 утра.

Дано: $L = 15 \text{ km}$, $W = 8 \text{ km}$, $u = 1 \text{ m/s}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Обозначим $T_0 = T(0)$, $T_p = T_{\text{parcel}}$ и $T_{p0} = T_p(0)$. В отношениях температур используются значения в кельвинах. В части 5 t — время, прошедшее с 7:00 утра.

- **1.1.**

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

- **1.2.1.** При $\Lambda \neq 0$ и $T_0 - \Lambda z > 0$,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}$$

Предел при $\Lambda = 0$ даёт результат пункта 1.1.

- **1.2.2.** Используя указанный в этом пункте критерий увеличения плотности, получаем

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

- **2.1.**

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

- 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

- 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

- 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

- 2.4. В первом порядке по высоте,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

- 3.1.

$$\begin{aligned} \Lambda < \Gamma &: \text{устойчивая,} \\ \Lambda > \Gamma &: \text{неустойчивая,} \\ \Lambda = \Gamma &: \text{нейтральная.} \end{aligned}$$

- 3.2. В подразумеваемом приближении для высоты перемешивания, пренебрегая подъёмом по инерции выше уровня равновесия,

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

Соответствующее выражение без линеаризации температуры частицы приведено в решении.

- 4.1.

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

- 4.2.

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}$$

- 5.1.

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

- 5.2. В течение часа пик,

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)$$

- 5.3.

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

При сохранении промежуточных разрезов получается 2.24 mg m^{-3} .

Решение

1.1. Изотермическая атмосфера

Условие гидростатического равновесия горизонтального слоя атмосферы имеет вид

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Для воздуха, рассматриваемого как идеальный газ, массовая плотность равна

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Таким образом, при $T = T_0$,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

Интегрируя от поверхности земли, где $p = p_0$, до высоты z , получаем

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

Следовательно,

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. Атмосфера с постоянным градиентом убывания температуры

При $T(z) = T_0 - \Lambda z$ условие гидростатического равновесия принимает вид

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

При $\Lambda \neq 0$ интегрирование даёт

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

Отсюда

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}.$$

Эта формула применима там, где абсолютная температура остаётся положительной.

При $\Lambda \rightarrow 0$,

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{RT_0},$$

что воспроизводит результат для изотермической атмосферы.

1.2.2. Плотность, возрастающая с высотой

Используя $\rho = \mu p / (RT)$, получаем

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R} \right).$$

Поскольку $\rho, T > 0$, плотность возрастает с высотой тогда и только тогда, когда

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

Численно,

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

поэтому искомое условие имеет вид

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

Это критерий инверсии плотности, сформулированный в данном вопросе. Критерий неустойчивости адиабатической частицы в части 3 менее строгий.

2.1. Изменение температуры адиабатической частицы

Частица содержит фиксированное количество газа, остаётся в равновесии по давлению с окружающей средой и обменивается с ней пренебрежимо малым количеством теплоты. Для неё уравнение адиабаты и уравнение состояния идеального газа имеют вид

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

Исключая V , получаем

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

или

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

Логарифмическое дифференцирование даёт

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Градиент давления определяется окружающей атмосферой, температура которой равна T :

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

Следовательно,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

Поскольку $c_p - c_V = R$ и $\gamma = c_p/c_V$,

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

Таким образом,

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}.$$

Множитель T_p/T существенен: темп охлаждения частицы с высотой не является строго постоянным, когда её температура отличается от температуры окружающей среды.

2.2.1. Сухадиабатический градиент температуры

При $T_p = T$ отношение температур в предыдущем выражении равно единице:

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}.$$

Для указанного двухатомного газа

$$c_p = \frac{7}{2}R,$$

поэтому

$$\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}.$$

2.2.2. Численное значение

Подстановка даёт

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}.$$

2.2.3. Профиль температуры атмосферы

При особом условии $T(z) = T_p(z)$,

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

Поскольку Γ постоянна,

$$T(z) = T(0) - \Gamma z.$$

2.3. Температура частицы в атмосфере с постоянной Λ

Из пункта 2.1,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Отсюда при $\Lambda \neq 0$,

$$T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}.$$

Если $\Lambda = 0$, окружающая атмосфера изотермическая. Непосредственное интегрирование в этом случае даёт

$$T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}.$$

Для слоя, начинающегося на высоте z_i , тот же результат можно записать в виде

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

что позволяет непрерывно сопрягать последовательные слои.

2.4. Линейное приближение

Разлагая результат пункта 2.3 в окрестности $z = 0$, получаем

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

В первом порядке,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

При $T_{p0} \approx T_0$,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z.$$

Строго говоря, это разложение по малой высоте. Если Λ очень мала, одного указанного условия $|\Lambda z| \ll T_0$ недостаточно для обеспечения линейности; необходимо также $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$. В части 4 оба изменения температуры малы по сравнению с абсолютной температурой.

3.1. Устойчивость смещённой частицы

Пусть частица первоначально находится на высоте z_0 , причём

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

Сместим её вверх на малое расстояние ξ , учитываемое со знаком. В исходном равновесном состоянии её адиабатический градиент температуры равен $-\Gamma$, поэтому

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma \xi + O(\xi^2).$$

Температура окружающей среды равна

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda \xi.$$

Следовательно, превышение температуры частицы над температурой окружающей среды составляет

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

При одинаковом давлении плотность обратно пропорциональна абсолютной температуре. Направленное вверх ускорение частицы под действием выталкивающей силы и силы тяжести равно

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma) \xi.$$

Таким образом:

- Если $\Lambda < \Gamma$, ускорение направлено против смещения: атмосфера **устойчива**.
- Если $\Lambda > \Gamma$, ускорение усиливает смещение: атмосфера **неустойчива**.
- Если $\Lambda = \Gamma$, температура и плотность частицы остаются такими же, как у окружающей среды: атмосфера **нейтральна**.

Отсюда

устойчивая: $\Lambda < \Gamma$,	неустойчивая: $\Lambda > \Gamma$,	нейтральная: $\Lambda = \Gamma$.
----------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------

3.2. Высота, достигаемая первоначально более тёплой частицей

В линейном приближении,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

Следовательно,

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

В устойчивой атмосфере $\Gamma - \Lambda > 0$, поэтому первоначальное превышение температуры частицы уменьшается с высотой. Уровень нейтральной плавучести находится приравниванием этой разности к нулю:

$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}.$
--

Здесь обозначение $z_{\max}$ соответствует подразумеваемой в задаче модели высоты перемешивания, в которой пренебрегают подъёмом по инерции выше уровня равновесия.

Для полноты высоту нейтральной плавучести можно найти и без приближения пункта 2.4.

Приравнивание точного выражения для температуры частицы к температуре атмосферы даёт

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Таким образом, при $\Lambda \neq 0$,

$z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}} \right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)} \right].$
--

При $\Lambda = 0$ предел этого выражения равен

$$z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}.$$

Оба выражения сводятся к указанному линейному результату при $T_{p0} - T_0 \ll T_0$.

Необходимо уточнение с точки зрения динамики: нейтральная плавучесть означает нулевое ускорение, но не обязательно нулевую скорость. Свободно движущаяся частица может по инерции подняться выше этого уровня. Например, в том же линейном приближении движение частицы, отпущенной из состояния покоя при отсутствии затухания, подчиняется уравнению

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

а её первая точка поворота находится на высоте $2z_n$. В следующих частях используется подразумеваемая высота перемешивания, соответствующая нейтральной плавучести.

4.1. Температуры частицы на высотах 96 м и 119 м

Проведём прямые через измеренные значения на границах каждого указанного слоя. Их градиенты убывания температуры равны

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

и

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

Экстраполяция первой прямой к поверхности земли даёт температуру

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

близкую к начальной температуре частицы 22°C . Все рассматриваемые изменения температуры малы по сравнению с величиной около 294 К, поэтому применим результат пункта 2.4.

Поскольку разность температур в кельвинах равна разности температур в градусах Цельсия,

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

Следовательно,

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

и

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

С точностью исходных температурных данных,

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

Для проверки применение точной формулы пункта 2.3 отдельно к первому слою и к изотермическому второму слою даёт соответственно 21.059°C и 20.833°C . После округления получаются те же ответы.

4.2. Высота перемешивания

Как на высоте 96 м, так и на высоте 119 м температура окружающего воздуха равна 20.1°C . На обеих высотах частица теплее, поэтому она продолжает подниматься в инверсионный слой выше 119 м.

Обозначим положительный градиент температуры в этом слое как

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

Температура окружающей среды в этом слое равна

$$T(z) = 20.1^{\circ}\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

На высоте перемешивания температуры частицы и атмосферы равны:

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

где H выражена в метрах, а приведённые температуры — в градусах Цельсия. Решая уравнение, получаем

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m}.$$

Как и требуется, эта высота находится внутри предполагаемого инверсионного слоя.

Температура частицы на этой высоте равна

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^{\circ}\text{C}.$$

Следовательно,

$$\boxed{H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^{\circ}\text{C}}.$$

Использование точной зависимости температуры частицы при прохождении всех трёх атмосферных слоёв с линейным профилем температуры даёт $H = 143.78 \text{ m}$, подтверждая достаточную точность линейного приближения для частицы.

5.1. Уравнение сохранения CO

Объём воздуха с однородным перемешиванием равен

$$V = LWH.$$

Если $C(t)$ — массовая концентрация CO, то полная масса CO внутри параллелепипеда равна

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

Ветер проходит через грань шириной L и высотой H , поэтому объёмный расход воздуха равен

$$Q = uLH.$$

Поскольку поступающий воздух чистый, входящий поток CO равен нулю. Массовый расход CO на выходе равен

$$QC = uLH C.$$

Поэтому закон сохранения CO даёт

$$\frac{d}{dt}(LWH C) = M - uLH C.$$

Размеры параллелепипеда постоянны, следовательно,

$$\boxed{\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}}, \quad \boxed{C(0) = 0}.$$

5.2. Концентрация как функция времени

Постоянное частное решение имеет вид

$$C_{ss} = \frac{M}{uLH}.$$

Решение однородного уравнения пропорционально $e^{-ut/W}$, поэтому

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

Используя $C(0) = 0$, получаем

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

Таким образом,

$$\boxed{C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s}.$$

Характерное время вентиляции равно W/u . В пределе отсутствия ветра это выражение корректно переходит в $C(t) = Mt/(LWH)$.

5.3. Концентрация CO в 8:00 утра

Полная масса CO, выброшенного за час, равна

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg}.$$

Следовательно,

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

При значениях

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

безразмерное прошедшее время равно

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

Отсюда

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

что даёт

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

С точностью, соответствующей грубым исходным данным,

$$\boxed{C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}}.$$

Решение проверено по официальному решению.