

IPhO 2008

Problemas teóricos y soluciones · Hanói, Vietnam · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2008/

Problema 1: Mortero para pilar arroz accionado por agua

A. Introducción

El arroz es el principal alimento básico de la mayoría de la población de Vietnam. Para obtener arroz blanco a partir del arroz con cáscara, es necesario separar la cáscara (un proceso llamado «descascarillado») y eliminar la capa de salvado («blanqueado»). En las zonas montañosas del norte de Vietnam abundan los arroyos, y sus habitantes utilizan un *mortero para pilar arroz accionado por agua* para eliminar la capa de salvado. La Figura 1 muestra uno de estos morteros. La Figura 2 muestra su funcionamiento.

B. Diseño y funcionamiento

1. Diseño.

El mortero para pilar arroz que se muestra en la Figura 1 consta de las siguientes partes:

El mortero, que es básicamente un recipiente de madera para el arroz.

La palanca, que es un tronco de árbol con un extremo más grueso y otro más delgado. Puede girar alrededor de un eje horizontal. En el extremo más delgado se fija un *pisón* perpendicular a la palanca. La longitud del pisón es tal que toca el arroz del mortero cuando la palanca está horizontal. El extremo más grueso de la palanca se ahueca para formar una cubeta. La forma de la cubeta es fundamental para el funcionamiento del mortero.

2. Modos de funcionamiento

El mortero tiene dos modos.

Modo de trabajo. En este modo, el mortero realiza un ciclo de funcionamiento que se ilustra en la Figura 2.

La acción de pilar el arroz se debe al trabajo que el pisón transfiere al arroz durante la etapa f) de la Figura 2. Si, por algún motivo, el pisón nunca toca el arroz, decimos que el mortero no está trabajando.

Modo de reposo con la palanca elevada. Durante la etapa c) del ciclo de funcionamiento (Figura 2), a medida que aumenta el ángulo de inclinación α , disminuye la cantidad de agua en la cubeta. En un instante determinado, la cantidad de agua es justo la necesaria para contrarrestar el peso de la palanca. Denotemos por β el ángulo de inclinación en ese instante. Si la palanca se mantiene en el ángulo β y su velocidad angular inicial es cero, permanecerá en esta posición

indefinidamente. Este es el modo de reposo con la palanca elevada. La estabilidad de esta posición depende del caudal de agua que entra en la cubeta, Φ . Si Φ supera cierto valor Φ_2 , este modo de reposo es estable y el mortero no puede estar en el modo de trabajo.

En otras palabras, Φ_2 es el caudal mínimo para que el mortero no trabaje.



Figura 1
Un mortero para pilar arroz accionado por agua

CICLO DE FUNCIONAMIENTO DE UN MORTERO PARA PILAR ARROZ ACCIONADO POR AGUA

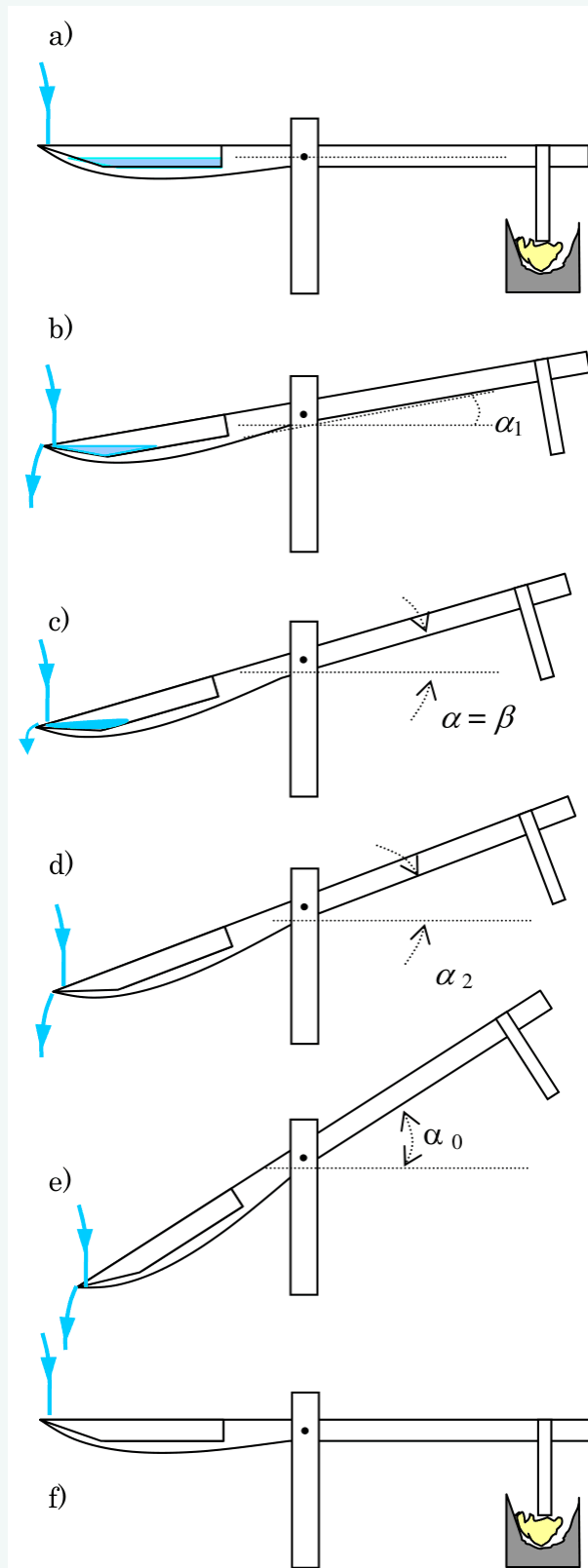


Figura 2

a) Al principio no hay agua en la cubeta y el pisón descansa sobre el mortero. El agua entra en la cubeta con un caudal pequeño, pero durante cierto tiempo la palanca permanece en posición horizontal.

b) En cierto instante, la cantidad de agua es suficiente para elevar la palanca. Debido a la inclinación, el agua se precipita hacia el lado más alejado de la cubeta, haciendo que la palanca se incline más rápidamente.

El agua empieza a salir cuando $\alpha = \alpha_1$.

c) A medida que aumenta el ángulo α , el agua empieza a salir. Para cierto ángulo de inclinación, $\alpha = \beta$, el momento total de las fuerzas es cero.

d) α sigue aumentando y el agua continúa saliendo hasta que no queda agua en la cubeta.

e) α sigue aumentando por inercia. Debido a la forma de la cubeta, el agua cae en ella, pero sale inmediatamente. El movimiento por inercia de la palanca continúa hasta que α alcanza el valor máximo α_0 .

f) Sin agua en la cubeta, el peso de la palanca la hace volver a la posición horizontal inicial. El pisón golpea el mortero (con el arroz en su interior) y comienza un nuevo ciclo.

C. El problema

Considérese un mortero para pilar arroz accionado por agua con los siguientes parámetros (Figura 3)

La masa de la palanca (incluido el pisón, pero sin agua) es $M = 30 \text{ kg}$,

El centro de masas de la palanca es G. La palanca gira alrededor del eje T (cuya proyección es el punto T de la figura).

El momento de inercia de la palanca respecto a T es $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Cuando hay agua en la cubeta, su masa se denota por m y el centro de masas del agua se denota por N.

El ángulo de inclinación de la palanca respecto al eje horizontal es α .

Las principales dimensiones del mortero y de la cubeta son las indicadas en la Figura 3.

Despréciense el rozamiento en el eje de giro y la fuerza debida al agua que cae sobre la cubeta.

En este problema, adoptamos la aproximación de que la superficie del agua es siempre horizontal.

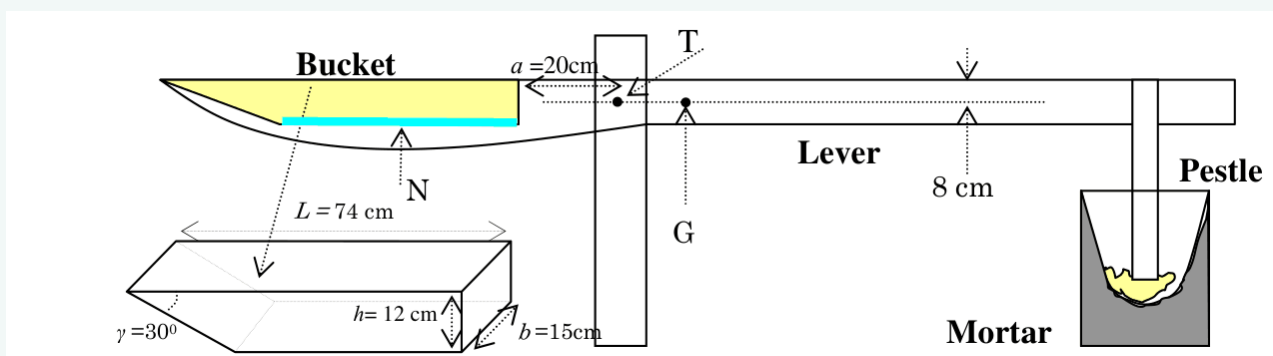


Figura 3 Diseño y dimensiones del mortero para pilar arroz

1. La estructura del mortero

Al principio, la cubeta está vacía y la palanca está horizontal. A continuación, entra agua en la cubeta hasta que la palanca empieza a girar. La cantidad de agua en la cubeta en ese instante es $m = 1.0 \text{ kg}$.

1.1. Determine la distancia entre el centro de masas G de la palanca y el eje de giro T . Se sabe que GT es horizontal cuando la cubeta está vacía.

1.2. El agua empieza a salir de la cubeta cuando el ángulo entre la palanca y el eje horizontal alcanza α_1 . La cubeta queda completamente vacía cuando este ángulo es α_2 .

Determine α_1 y α_2 .

1.3. Sea $\mu(\alpha)$ el momento total de las fuerzas (respecto al eje T) debido al peso de la palanca y al del agua de la cubeta. $\mu(\alpha)$ es cero cuando $\alpha = \beta$. Determine β y la masa m_1 de agua en la cubeta en ese instante.

2. Parámetros del modo de trabajo

Suponga que el agua entra en la cubeta con un caudal Φ constante y pequeño. La cantidad de agua que entra en la cubeta mientras la palanca está en movimiento es despreciable. En esta parte, desprecie la variación del momento de inercia durante el ciclo de trabajo.

2.1. Esboce una gráfica del momento de las fuerzas μ en función del ángulo α , $\mu(\alpha)$, durante un ciclo de funcionamiento. Escriba explícitamente los valores de $\mu(\alpha)$ para los ángulos α_1 , α_2 y $\alpha = 0$.

2.2. A partir de la gráfica obtenida en el apartado 2.1., analice y dé la interpretación geométrica del valor de la energía total W_{total} producida por $\mu(\alpha)$ y del trabajo W_{pounding} que el pisón transfiere al arroz.

2.3. A partir de la gráfica de μ frente a α , estime α_0 y W_{pounding} (suponga que la energía cinética del agua que entra y sale de la cubeta es despreciable). Puede sustituir las curvas por líneas poligonales si esto simplifica el cálculo.

3. El modo de reposo

Suponga que el agua entra en la cubeta con un caudal constante Φ , pero que no se puede despreciar la cantidad de agua que entra en ella durante el movimiento de la palanca.

3.1. Suponiendo que el agua rebosa siempre de la cubeta,

3.1.1. Esboce una gráfica del momento de las fuerzas μ en función del ángulo α en las proximidades de $\alpha = \beta$. ¿A qué tipo de equilibrio corresponde la posición $\alpha = \beta$ de la palanca?

3.1.2. Halle la expresión analítica del momento de las fuerzas $\mu(\alpha)$ en función de $\Delta\alpha$ cuando $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ y $\Delta\alpha$ es pequeño.

3.1.3. Escriba la ecuación de movimiento de la palanca, que parte con velocidad inicial nula de la posición $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ es pequeño). Demuestre que el movimiento es, con buena aproximación, una oscilación armónica. Calcule el período τ .

3.2. Para un valor dado de Φ , el agua rebosa de la cubeta en todo momento solo si la palanca se mueve lo suficientemente despacio. Existe un límite superior para la amplitud de la oscilación armónica, que depende de Φ . Determine el valor mínimo Φ_1 de Φ (en kg/s) para que la palanca pueda realizar un movimiento armónico de amplitud 1° .

3.3. Suponga que Φ es lo suficientemente grande como para que, durante el movimiento libre de la palanca en el que el ángulo de inclinación disminuye de α_2 a α_1 , el agua rebose siempre de la cubeta. Sin embargo, si Φ es demasiado grande, el mortero no puede trabajar. Suponiendo que el

movimiento de la palanca es el de un oscilador armónico, estime el caudal mínimo Φ_2 para que el mortero para pilar arroz no trabaje.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Un momento de las fuerzas positivo corresponde a un aumento de α . Para los resultados numéricos se utilizan $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

- 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$.
- 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ, \quad \alpha_2 = 30^\circ$.
- 1.3. $\beta = 23.57^\circ, \quad m_1 = 0.605 \text{ kg}$.
- 2.1. Durante el ascenso,

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}, \quad \mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}.$$

La rama de retorno con la cubeta vacía es $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ y termina en -4.62 N m . El llenado en $\alpha = 0$ conecta este valor con cero.

- 2.2. $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$ es el área encerrada por el ciclo. El trabajo de pilado es

$$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0,$$

igual a W_{total} cuando se desprecia la energía cinética que se lleva el agua.

- 2.3. $\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}$.
- 3.1.1. Equilibrio estable; el momento de las fuerzas pasa por cero con pendiente negativa en β .
- 3.1.2. Con $\Delta\alpha$ en radianes,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

- 3.1.3. $\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau)$, con $\tau \approx 3.26 \text{ s}$.
- 3.2. $\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}$.
- 3.3. Utilizando la amplitud límite $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$,

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

El equilibrio se encuentra en β ; α_1 es el punto de retorno inferior utilizado en esta estimación.

Solución

Denotemos por $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ la carga de agua que inicia el movimiento, y por $r = GT$. De la Figura 3,

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

El pivote se encuentra a $d = 0.08 \text{ m}$ por debajo del borde superior de la cubeta. Utilizamos los valores habituales $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, que el enunciado no especifica.

Resultan útiles las siguientes abreviaturas:

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. Posición del centro de masas de la palanca

El fondo plano de la cubeta tiene una longitud

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m}.$$

Sea η la profundidad inicial del agua sobre este fondo. La sección longitudinal del agua es un trapecio, por lo que

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

Por consiguiente,

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0 / (\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m}.$$

Midamos u a lo largo de la cubeta desde su pared vertical interior hacia el borde exterior de vertido. Una franja horizontal a una altura y sobre el fondo se extiende desde $u = 0$ hasta $u = \ell + qy$. Por tanto, su centroide permite obtener

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

Escribiendo $w = \ell + q\eta$, esto se convierte en

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m}.$$

En el instante en que el pisón pierde el contacto con el arroz, la reacción de apoyo se anula. Los dos momentos de las fuerzas gravitatorias se equilibran:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

Así,

$$r = \frac{m_0}{M}(a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

Definamos la correspondiente escala de momento de las fuerzas

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m}.$$

1.2. Inicio y fin del vertido

Utilicemos coordenadas fijas en la cubeta:

- s se mide hacia el interior a lo largo de su borde superior, desde el borde exterior de vertido;
- z mide la profundidad por debajo de ese borde.

El extremo inclinado es $z = s \tan \gamma$, el fondo plano es $z = h$ y el pivote tiene coordenadas (R, d) .

Cuando el agua alcanza el borde exterior de vertido, su superficie horizontal pasa por $(0, 0)$. En las coordenadas de la cubeta, su ecuación es

$$z = s \tan \alpha.$$

El agua retenida tiene entonces una sección longitudinal triangular con vértices

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

Por tanto, su masa es

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2} (\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

Para la carga $m_0 = 1.0$ kg, el vertido comienza cuando esta capacidad es igual a m_0 :

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

De ahí,

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

El agua desaparece cuando la superficie libre horizontal se vuelve paralela al extremo inclinado:

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

La construcción triangular es compatible con las dimensiones: en α_1 , su extremo interior está en $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$.

1.3. Ángulo de equilibrio y masa de agua restante

El centroide de la sección triangular del agua que rebosa es

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

Las dimensiones presentan la propiedad útil

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

Por tanto, TN está orientado a lo largo de la palanca, y el brazo de palanca horizontal del peso del agua es

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

El momento total de las fuerzas durante el vertido es

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

Hagamos $v = \cot \beta - q$. La condición de equilibrio se convierte en

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

La raíz en el intervalo físico $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ es

$$v = 0.560329.$$

Por tanto,

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

y

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

La distancia que necesitaremos más adelante es

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m}.$$

2.1. Momento de las fuerzas durante todo el ciclo de trabajo

Para cualquier centroide del agua (s_N, z_N) , el brazo de palanca horizontal de su peso es

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

Por tanto, antes del vertido,

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

Inicialmente, el agua tiene una sección trapezoidal. Esta se vuelve triangular cuando deja de tocar la pared vertical interior. Esto ocurre en

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

Para $\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$, definamos

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b (\cot \alpha - q)}}.$$

Esta es la altura del triángulo medida perpendicularmente al fondo de la cubeta. Su centroide es

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

Estas expresiones, junto con (3), determinan la rama de ascenso antes del vertido. Entre α_1 y α_2 , se utiliza (2).

Una vez vacía, la cubeta no aporta ningún momento de las fuerzas:

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

La gráfica puede trazarse a partir de los siguientes valores:

α	Momento de las fuerzas durante el ascenso (N m)	Momento de las fuerzas durante el retorno en vacío (N m)
0°	0 al despegar	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

El ciclo completo presenta estas características:

1. En $\alpha = 0$, el llenado aumenta el momento de las fuerzas gravitatorias desde $-K$ hasta cero. Esto corresponde a un segmento vertical en la gráfica del momento de las fuerzas frente al ángulo. La reacción del mortero mantiene la palanca inmóvil durante esta etapa.
2. Durante la elevación, el momento de las fuerzas aumenta desde cero hasta su máximo $+2.687 \text{ N m}$ en α_1 .
3. El vertido hace que el momento de las fuerzas disminuya, pase por cero en β y alcance -4.001 N m en α_2 .
4. Desde α_2 hasta el ángulo máximo α_0 , y durante todo el retorno en vacío, el momento de las fuerzas sigue $-K \cos \alpha$. Estas curvas de ida y retorno coinciden para $\alpha \geq \alpha_2$.

En particular, $\mu(0)$ tiene distintos valores en distintas etapas: cero al despegar y -4.620 N m con la cubeta vacía.

2.2. Trabajo y su interpretación geométrica

Un trabajo infinitesimal de rotación es

$$dW = \mu d\alpha,$$

con los ángulos medidos en radianes.

El trabajo total durante un ciclo es

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

Las ramas coinciden por encima de α_2 , por lo que

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

Geométricamente, esta es el área encerrada entre la rama de ascenso, la rama de retorno en vacío y el segmento de llenado en $\alpha = 0$.

La palanca con la cubeta vacía inicia su retorno desde el reposo en α_0 . Su pérdida de energía potencial gravitatoria se convierte en la energía cinética transferida en el impacto:

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

Es el área positiva entre la curva de retorno en vacío y el eje de los ángulos, desde 0 hasta α_0 .

Si el agua que sale se lleva energía cinética, esa energía reduce la fracción del trabajo del ciclo que se transfiere al arroz. Con la aproximación de 2.3 de que esta energía es despreciable,

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

De manera equivalente, las áreas con signo positivo y negativo durante todo el ascenso se cancelan, puesto que este comienza y termina en reposo:

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. Ángulo máximo y trabajo de pilado

Sea

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

Esta es la energía cinética restante cuando sale la última porción de agua.

Al unir mediante segmentos rectos los puntos tabulados de la rama de ascenso se obtiene

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

Desde α_2 hasta α_0 , la palanca con la cubeta vacía convierte esta energía en energía potencial gravitatoria:

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

Por tanto, la estimación poligonal es

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

lo que da

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

Al integrar con mayor precisión las ramas curvas del momento de las fuerzas se obtiene

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

Así, $E_2 = 0.5016 \text{ J}$, lo que da

$$\boxed{\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}}.$$

3.1.1. Equilibrio con rebose continuo

El rebose continuo hace que la masa de agua sea una función del ángulo dada por (1), en ambos sentidos del movimiento.

Cerca de β , un aumento de α reduce la masa de agua y produce un momento de las fuerzas negativo. Una disminución de α aumenta la masa de agua retenida y produce un momento de las fuerzas positivo.

Por tanto, la gráfica pasa por $(\beta, 0)$ con pendiente negativa, y

$$\boxed{\alpha = \beta \text{ es un equilibrio estable.}}$$

En la idealización indicada, las pequeñas perturbaciones producen oscilaciones no amortiguadas.

3.1.2. Momento de las fuerzas linealizado

Escribamos (2) como

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

donde

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

En el equilibrio, $F(\cot \beta) = 0$. Además,

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3}c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

Por tanto,

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

Definamos

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

Para un pequeño desplazamiento angular en radianes,

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. Ecuación de movimiento y período

A primer orden, evaluamos la inercia del agua en el equilibrio. Aproximando su pequeña contribución por una masa situada en su centroide se obtiene

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

El momento de inercia del agua respecto a su propio centroide es de solo unos 0.0026 kg m^2 , por lo que tener en cuenta su extensión espacial tiene un efecto despreciable sobre el período indicado.

Las variaciones de la inercia multiplican aceleraciones o velocidades pequeñas y contribuyen más allá de la aproximación lineal. Por tanto, haciendo $x = \alpha - \beta$,

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico, con

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

Para $x(0) = \Delta\alpha$ y $\dot{x}(0) = 0$,

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

El período es

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. Caudal necesario para una amplitud de 1°

La capacidad de la cubeta en condiciones de rebose satisface

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

Durante la parte descendente de la oscilación, esta capacidad aumenta. Para mantener el rebose, el caudal másico entrante debe satisfacer

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

Para pequeñas oscilaciones de amplitud A ,

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

A primer orden,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

Su máximo se alcanza al pasar por el equilibrio en sentido descendente. Por tanto,

$$\boxed{\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A.} \quad (4)$$

Numéricamente,

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

Para $A = 1^\circ = \pi/180$ radianes,

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

De ahí,

$$\boxed{\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}}.$$

3.3. Estimación del caudal umbral para que cese el pilado

Utilicemos la oscilación límite en posición elevada cuyo punto de retorno inferior es α_1 . Su centro es el ángulo de equilibrio β , por lo que su amplitud es

$$\boxed{A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}.}$$

Esta oscilación límite permanece por encima de la posición horizontal, de modo que el pistón no alcanza el arroz.

Aplicando la misma condición de rebose (4),

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

De manera equivalente,

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

Así,

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

La corrección por amplitud finita puede comprobarse manteniendo una trayectoria armónica. En su rama descendente,

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

por lo que la tasa exacta de aumento de la capacidad es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

Su máximo es aproximadamente 0.69 kg s^{-1} , en concordancia con la estimación

$$\boxed{\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}}.$$

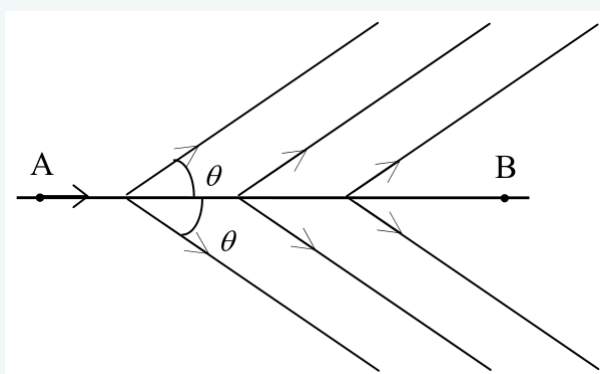
La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Luz Cherenkov y contador de imágenes anulares

La luz se propaga en el vacío con la velocidad c . No hay ninguna partícula que se mueva con una velocidad superior a c . Sin embargo, es posible que en un medio transparente una partícula se mueva con una velocidad v superior a la velocidad de la luz en ese mismo medio $\frac{c}{n}$, donde n es el índice de refracción del medio. La experimentación (Cherenkov, 1934) y la teoría (Tamm y Frank, 1937) mostraron que una partícula cargada que se mueve con una velocidad v en un medio transparente de índice de refracción n , de modo que $v > \frac{c}{n}$, emite luz, denominada *luz Cherenkov*, en direcciones que forman con la trayectoria un ángulo

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$.



1. Para demostrar este hecho, considere una partícula que se mueve con velocidad constante $v > \frac{c}{n}$ en línea recta. Pasa por A en el instante 0 y por B en el instante t_1 . Como el problema es simétrico respecto a las rotaciones alrededor de AB, basta con considerar los rayos luminosos en un plano que contenga AB.

En cualquier punto C entre A y B, la partícula emite una onda luminosa esférica que se propaga con velocidad $\frac{c}{n}$. Definimos el frente de onda en un instante dado t como la envolvente de todas estas esferas en ese instante.

1.1. Determine el frente de onda en el instante t_1 y dibuje su intersección con un plano que contenga la trayectoria de la partícula.

1.2. Expresé el ángulo φ entre esta intersección y la trayectoria de la partícula en función de n y β .

2. Consideremos un haz de partículas que se mueven con velocidad $v > \frac{c}{n}$, de modo que el ángulo θ sea pequeño, a lo largo de una recta IS. El haz atraviesa un espejo esférico cóncavo de distancia focal f y centro C en el punto S. SC forma con SI un ángulo pequeño α (véase la figura de la hoja de respuestas). El haz de partículas crea una imagen anular en el plano focal del espejo.

Explique por qué, con ayuda de un esquema que ilustre este hecho. Indique la posición del centro O y el radio r de la imagen anular.

Este montaje se utiliza en los *contadores Cherenkov de imágenes anulares* (RICH), y el medio que atraviesa la partícula se denomina *radiador*.

Nota: en todas las preguntas de este problema se despreciarán los términos de segundo orden y superiores en α y θ .

3. Un haz de partículas de momento conocido $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ está formado por tres tipos de partículas: protones, kaones y piones, con masas en reposo $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$, $M_\kappa = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ y $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$, respectivamente. Recuerde que pc y Mc^2 tienen dimensiones de energía, que 1 eV es la energía adquirida por un electrón tras ser acelerado mediante una diferencia de potencial de 1 V , y que $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

El haz de partículas atraviesa un medio de aire (el radiador) a la presión P . El índice de refracción del aire depende de la presión del aire P según la relación $n = 1 + aP$, donde $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$

3.1. Calcule, para cada uno de los tres tipos de partículas, el valor mínimo $P_{\min}$ de la presión del aire para que emitan luz Cherenkov.

3.2. Calcule la presión $P_{\frac{1}{2}}$ para la cual la imagen anular de los kaones tiene un radio igual a la mitad del correspondiente a los piones. Calcule los valores de θ_κ y θ_π en este caso.

¿Es posible observar la imagen anular de los protones a esta presión?

4. Suponga ahora que el haz no es perfectamente monocromático: los momentos de las partículas están distribuidos en un intervalo centrado en $10 \text{ GeV}/c$, con una semianchura a media altura Δp . Esto hace que la imagen anular se ensanche; en consecuencia, la distribución de θ tiene una semianchura a media altura $\Delta\theta$. La presión del radiador es $P_{\frac{1}{2}}$, determinada en 3.2.

4.1. Calcule $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ y $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$, los valores que toma $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ en los casos de los piones y los kaones.

4.2. Cuando la separación entre las dos imágenes anulares, $\theta_\pi - \theta_\kappa$, es mayor que 10 veces la suma de las semianchuras $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$, es decir, $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$, es posible distinguir bien las dos imágenes anulares. Calcule el valor máximo de Δp para el cual todavía pueden distinguirse bien las dos imágenes anulares.

5. Cherenkov descubrió por primera vez el efecto que lleva su nombre mientras observaba una botella de agua situada cerca de una fuente radiactiva. Vio que el agua de la botella emitía luz.

5.1. Determine la energía cinética mínima $T_{\min}$ de una partícula de masa en reposo M que se mueve en agua para que emita luz Cherenkov. El índice de refracción del agua es $n = 1.33$.

5.2. La fuente radiactiva utilizada por Cherenkov emite partículas α (es decir, núcleos de helio), de masa en reposo $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$, o partículas β (es decir, electrones), de masa en reposo $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$. Calcule los valores numéricos de $T_{\min}$ para las partículas α y las partículas β .

Sabiendo que la energía cinética de las partículas emitidas por fuentes radiactivas nunca supera unos pocos MeV, determine qué partículas originan la radiación observada por Cherenkov.

6. En los apartados anteriores del problema se ha ignorado la dependencia del efecto Cherenkov con la longitud de onda λ . Ahora tendremos en cuenta que la radiación Cherenkov de una partícula tiene un espectro continuo amplio que incluye el intervalo visible (longitudes de onda de $0.4 \mu\text{m}$ a $0.8 \mu\text{m}$). Sabemos también que el índice de refracción n del radiador disminuye linealmente en un 2% de $n - 1$ cuando λ aumenta a lo largo de este intervalo.

6.1. Considere un haz de piones con un momento definido de $10.0 \text{ GeV}/c$ que se mueven en aire a una presión de 6 atm. Determine la diferencia angular $\delta\theta$ asociada a los dos extremos del intervalo visible.

6.2. A partir de este resultado, estudie cualitativamente el efecto de la dispersión sobre la imagen anular de piones cuyo momento está distribuido en un intervalo centrado en $p = 10 \text{ GeV}/c$, con una semianchura a media altura $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$.

6.2.1. Calcule el ensanchamiento debido a la dispersión (variación del índice de refracción) y el debido a la falta de monocromaticidad del haz (variación del momento).

6.2.2. Describa cómo cambia el color del anillo al pasar de su borde interior al exterior marcando las casillas correspondientes en la hoja de respuestas.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 1.1.** El frente de onda formado por las tangentes comunes es un cono circular recto con vértice B y eje AB, que se abre hacia atrás a lo largo de la trayectoria. Su sección axial consta de dos segmentos tangentes que se unen en B. Para una emisión que comienza en A, la frontera exterior completa también incluye el casquete posterior expuesto de la primera onda esférica.

- 1.2.**

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- 2.** Sea F el punto medio de SC. El centro O se encuentra en el plano focal que pasa por F, en el plano ISC, al lado opuesto de SC respecto a I:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

El rayo de referencia que sigue IS se refleja en S a lo largo de SO.

- 3.1.**

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Las presiones umbral son

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

Para que la emisión sea distinta de cero, la presión debe superar el umbral.

- 3.2.**

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

Los protones no producen ningún anillo a esta presión.

• 4.1.

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

• 4.2. La semianchura límite es

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

El criterio estricto de separación indicado exige $\Delta p < \Delta p_{\text{lim}}$.

• 5.1.

$$T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

• 5.2.

$$T_{\text{min},\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\text{min},e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

La radiación observada es producida por las partículas β , es decir, los electrones.

• 6.1.

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

- 6.2.1. La dispersión da lugar a una extensión angular total del espectro visible de aproximadamente 0.59 mrad. La dispersión de momentos da

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (semianchura)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

Las anchuras radiales correspondientes se obtienen multiplicando estas anchuras angulares por f .

- 6.2.2. El borde interior es rojo y el exterior es azul/violeta. Las longitudes de onda dominantes disminuyen hacia el exterior; la dispersión de momentos difumina y mezcla los colores vecinos.

Solución

Los ángulos se miden en radianes. La geometría del espejo se trata a primer orden en los ángulos pequeños. Al evaluar los resultados numéricos se conservan las relaciones relativistas entre momento y velocidad y las relaciones de Cherenkov.

1.1. Construcción del frente de onda

Escribamos la velocidad de la luz en el medio como

$$u = \frac{c}{n}.$$

Supongamos que la partícula pasa por C en el instante t_C . En el instante t_1 , la onda emitida allí tiene un radio

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

mientras que la partícula se ha desplazado de C a B recorriendo la distancia

$$CB = v(t_1 - t_C).$$

Por consiguiente,

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

independientemente de C.

En cualquier plano que contenga AB, las ondas esféricas aparecen como circunferencias. Sus radios son proporcionales a las distancias de sus centros a B. Por tanto, tienen las mismas dos rectas tangentes que pasan por B. Al girar estas tangentes alrededor de AB se obtiene un cono circular recto con vértice en B, que se abre hacia atrás.

El esquema solicitado se construye del siguiente modo:

1. Dibuje AB horizontalmente, con B a la derecha y $AB = vt_1$.
2. Dibuje la mayor circunferencia de onda, centrada en A, con radio ut_1 .
3. Dibuje circunferencias de onda más pequeñas, centradas en puntos intermedios C, con radios $u(t_1 - t_C)$.
4. Dibuje las tangentes comunes superior e inferior desde B a estas circunferencias. Marque un punto de tangencia T en la circunferencia centrada en A y dibuje $AT \perp BT$.

Para el intervalo finito de emisión A–B, la porción cónica se extiende desde B hasta la circunferencia de tangencia sobre la primera esfera. Si se representa toda la frontera exterior de la región perturbada, su porción posterior es el casquete esférico expuesto centrado en A.

1.2. Ángulo del frente de onda y ángulo de Cherenkov

En el triángulo rectángulo ATB,

$$AT = \frac{c}{n}t_1, \quad AB = vt_1.$$

El ángulo agudo entre la tangente BT y la recta de la trayectoria es φ , de modo que

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

Así,

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

Los rayos luminosos son normales al frente de onda. Por tanto, el ángulo θ entre un rayo y la dirección de avance de la partícula satisface

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

y, en consecuencia,

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

Esto demuestra la ecuación (1).

2. Formación, centro y radio del anillo

Aquí C representa el centro de curvatura del espejo. Como el espejo es esférico,

$$SC = 2f.$$

Sea F el punto medio de SC; el plano focal paraxial es perpendicular a SC en F.

Consideremos primero un rayo luminoso de referencia que viaja en la dirección IS del haz de partículas e incide en el espejo en S. La normal al espejo en S es SC. Por la ley de la reflexión, el rayo reflejado SO forma con SC el mismo ángulo α que SI, al lado opuesto.

Por consiguiente, su intersección O con el plano focal satisface

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

Como $CF = SF = f$, la misma construcción da

$$CO \parallel IS.$$

Fijemos ahora un acimut alrededor de la trayectoria de la partícula. Todos los rayos Cherenkov emitidos con ese acimut tienen la misma dirección, incluso cuando se emiten en distintos puntos de la trayectoria. Forman un haz paralelo que el espejo enfoca en un punto de su plano focal.

Al cambiar el acimut, la dirección del rayo recorre un cono de semiángulo θ . Un espejo paraxial convierte un desplazamiento angular en un desplazamiento en el plano focal igual a f multiplicado por ese ángulo. Así, los puntos de la imagen tienen coordenadas respecto a O de la forma

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

donde ψ es el acimut. Por tanto,

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

que corresponde a una circunferencia:

$$\boxed{r = f\theta.}$$

Para el esquema, dibuje S a la derecha, C a su izquierda y F a mitad de camino entre ambos. Sitúe I por encima de SC. El rayo de referencia se refleja en S hacia O, situado por debajo de SC. Dibuje el plano focal que pasa por F y marque las dos intersecciones del anillo en el plano ISC a distancias con signo

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta$$

de F, tomando como positivo el lado dirigido hacia I. Estos puntos están separados por $2f\theta$ y tienen O como punto medio. Los puntos correspondientes a todos los acimuts forman el anillo.

3.1. Presiones umbral

La energía y el momento relativistas cumplen

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

Conviene definir

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

La condición de Cherenkov es

$$n\beta > 1.$$

En el umbral,

$$n_{\min} = q.$$

Usando $n = 1 + aP$,

$$P_{\min} = \frac{q-1}{a} = \frac{\sqrt{1+(Mc/p)^2}-1}{a}.$$

Con las masas proporcionadas y $p = 10.0 \text{ GeV}/c$:

Partícula	β	$P_{\min}$
Protón	0.995611	16.3 atm
Kaón	0.998752	4.63 atm
Pión	0.999902	0.363 atm

En la igualdad, el ángulo de Cherenkov es cero; para que el anillo tenga un radio distinto de cero, la presión debe superar el umbral.

3.2. Presión para que el anillo de kaones tenga la mitad del radio del de piones

Como $r = f\theta$, la razón de radios requerida da

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}$$

con la precisión óptica indicada.

Para cada especie,

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p}\right)^2}.$$

Usando la identidad del ángulo doble,

$$\frac{q_{\pi}}{n} = \cos(2\theta_{\kappa}) = 2\left(\frac{q_{\kappa}}{n}\right)^2 - 1.$$

Así,

$$n^2 + q_{\pi}n - 2q_{\kappa}^2 = 0.$$

La raíz positiva es

$$n_* = \frac{\sqrt{q_{\pi}^2 + 8q_{\kappa}^2} - q_{\pi}}{2}.$$

Numéricamente,

$$q_{\kappa} = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_{\pi} = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

lo que da

$$n_* \simeq 1.00163306.$$

Por tanto,

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

Los ángulos correspondientes son

$$\theta_{\kappa} = \arccos \frac{q_{\kappa}}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_{\pi} = \arccos \frac{q_{\pi}}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

En consecuencia,

$$\theta_{\kappa} \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

El umbral de los protones es 16.3 atm, considerablemente superior a esta presión. Así,

$$\text{No se produce ningún anillo de protones.}$$

4.1. Ensanchamiento angular debido a la dispersión de momentos

A presión fija, n es constante. Derivamos

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

Como

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

obtenemos

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

Usando $q = 1/\beta$ y $q/n = \cos \theta$, también puede escribirse

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

Para una distribución estrecha de momentos, su transformación es localmente lineal, de modo que

$$\Delta\theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

La derivada es positiva: al aumentar el momento, aumenta el ángulo de Cherenkov.

Evaluando para $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ y la presión de 3.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\kappa} &\simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \\ \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} &\simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. Máxima semianchura permitida del momento

La condición de separación requerida es

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}).$$

Al sustituir las relaciones lineales de ensanchamiento se obtiene

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

Usando los valores sin redondear,

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

Así,

$$\boxed{\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

Esto equivale aproximadamente al 3.0% del momento central. Como el problema establece una desigualdad estricta, el régimen en el que se distinguen bien las imágenes es

$$\boxed{\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.}$$

5.1. Umbral de energía cinética en agua

La energía cinética relativista es

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

En el umbral de Cherenkov,

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

Por tanto,

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

y

$$\boxed{T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).}$$

Para el agua,

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\text{min}} \simeq 1.51676,$$

de modo que

$$\boxed{T_{\text{min}} \simeq 0.5168 Mc^2.}$$

Para que la radiación sea distinta de cero, la energía cinética debe superar este umbral.

5.2. Partículas alfa y electrones

Para una partícula alfa,

$$T_{\text{min},\alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

Para un electrón,

$$T_{\text{min},e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Una partícula alfa con una energía cinética de solo unos pocos MeV está muy por debajo de su umbral, de aproximadamente 1960 MeV. Los electrones con energías de unos pocos MeV pueden superar fácilmente su umbral. Por consiguiente,

La radiación Cherenkov observada es producida por electrones.

6.1. Diferencia angular a lo largo del espectro visible

A $P = 6$ atm,

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

La magnitud de la disminución del índice de refracción a lo largo del intervalo visible es

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

Para piones de $10.0 \text{ GeV}/c$, el ángulo de Cherenkov representativo es

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad.}$$

Manteniendo fija la velocidad de la partícula, al derivar

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

respecto a n se obtiene

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}}.$$

A primer orden en la variación del índice,

$$\delta\theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Así,

$$\boxed{\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad.}}$$

La longitud de onda más corta tiene el índice mayor y, por tanto, el ángulo mayor:

$$\theta(0.4 \mu\text{m}) > \theta(0.8 \mu\text{m}).$$

6.2.1. Ensanchamiento por dispersión y ensanchamiento por la distribución de momentos

El ensanchamiento por dispersión es la extensión angular total entre los dos extremos del visible:

$$\boxed{w_{\text{disp}} = \delta\theta \simeq 0.59 \text{ mrad.}}$$

La extensión radial correspondiente es

$$\boxed{w_{r,\text{disp}} = f\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.}$$

Para la dispersión de momentos, usamos la derivada de 4.1, evaluada ahora a 6 atm:

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_\pi^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

Con $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$,

$$\Delta\theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

Por tanto,

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}$$

es la **semianchura a media altura**, mientras que

$$w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}$$

es la **anchura total a media altura**.

La semianchura radial y la FWHM correspondientes son

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,\text{FWHM}} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

La extensión del espectro visible debida a la dispersión es aproximadamente 2.8 veces la FWHM inducida por la distribución de momentos. Por tanto, la dispersión proporciona la mayor escala de ensanchamiento. No puede calcularse una FWHM combinada única sin especificar el perfil de la distribución de momentos y la ponderación espectral.

6.2.2. Orden de los colores a través del anillo

Como

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

tenemos

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

Como $r = f\theta$,

$$\frac{dr}{d\lambda} < 0.$$

Por tanto, las longitudes de onda más largas producen radios menores. La elección correcta de los colores es:

- **Borde interior:** rojo, correspondiente a las longitudes de onda más largas.
- **Hacia el exterior:** longitudes de onda dominantes progresivamente más cortas, con solapamiento de los colores vecinos.
- **Borde exterior:** azul/violeta, correspondiente a las longitudes de onda más cortas.

La dispersión de momentos difumina este orden, pero su anchura característica es menor que la extensión cromática, por lo que se mantiene el patrón de rojo en el interior y violeta en el exterior.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Variación de la temperatura del aire con la altitud, estabilidad atmosférica y contaminación del aire

El movimiento vertical del aire determina muchos procesos atmosféricos, como la formación de nubes y precipitaciones y la dispersión de los contaminantes atmosféricos. Si la atmósfera es *estable*, el movimiento vertical está limitado y los contaminantes atmosféricos tienden a acumularse alrededor del lugar de emisión en vez de dispersarse y diluirse. En cambio, en una

atmósfera *inestable*, el movimiento vertical del aire favorece la dispersión vertical de los contaminantes atmosféricos. Por tanto, las concentraciones de contaminantes no dependen solo de la intensidad de las fuentes de emisión, sino también de la *estabilidad* de la atmósfera.

Determinaremos la estabilidad atmosférica utilizando el concepto meteorológico de *parcela de aire* y comparando la temperatura de una parcela de aire que asciende o desciende adiabáticamente en la atmósfera con la del aire circundante. Veremos que, en muchos casos, una parcela de aire que contiene contaminantes atmosféricos y asciende desde el suelo se detiene a cierta altitud, denominada *altura de mezcla*. Cuanto mayor sea la altura de mezcla, menor será la concentración de contaminantes atmosféricos. Evaluaremos la altura de mezcla y la concentración de monóxido de carbono emitido por las motocicletas en el área metropolitana de Hanoi durante la hora punta de la mañana, en una situación en la que la mezcla vertical está limitada por una inversión térmica (la temperatura del aire aumenta con la altitud) por encima de los 119 m.

Consideremos el aire como un gas ideal diatómico, de masa molar $\mu = 29 \text{ g/mol}$.

Las transformaciones adiabáticas cuasiestáticas obedecen la ecuación $pV^\gamma = \text{const}$, donde $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ es el cociente entre las capacidades caloríficas isobárica e isocórica del gas.

El estudiante puede utilizar los siguientes datos si es necesario:

La constante universal de los gases es $R = 8.31 \text{ J/(mol. K)}$.

La presión atmosférica a nivel del suelo es $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

La aceleración de la gravedad es constante, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

La capacidad calorífica molar isobárica del aire es $c_p = \frac{7}{2}R$.

La capacidad calorífica molar isocórica del aire es $c_V = \frac{5}{2}R$.

Indicaciones matemáticas

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. La solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (con A y B constantes) es

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

donde $x_1(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. Variación de la presión con la altitud.

1.1. Suponga que la temperatura de la atmósfera es uniforme e igual a T_0 . Escriba la expresión de la presión atmosférica p en función de la altitud z .

1.2. Suponga que la temperatura de la atmósfera varía con la altitud según la relación

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

donde Λ es una constante, denominada *tasa de descenso de la temperatura* de la atmósfera (el gradiente vertical de temperatura es $-\Lambda$).

1.2.1. Escriba la expresión de la presión atmosférica p en función de la altitud z .

1.2.2. Cuando la densidad del aire aumenta con la altitud, se produce un proceso denominado convección libre. ¿Para qué valores de Λ se produce la convección libre?

2. Variación de la temperatura de una parcela de aire en movimiento vertical

Considere una parcela de aire que asciende y desciende en la atmósfera. Una parcela de aire es una porción de aire de dimensiones suficientes, de varios metros de extensión, para tratarla como una entidad termodinámica independiente, pero lo bastante pequeña como para considerar uniforme su temperatura. El movimiento vertical de una parcela de aire puede tratarse como un proceso cuasiadiabático, es decir, el intercambio de calor con el aire circundante es despreciable. Si la parcela de aire asciende en la atmósfera, se expande y se enfría. Por el contrario, si desciende, el aumento de la presión exterior comprime el aire de la parcela y su temperatura aumenta.

Como el tamaño de la parcela no es grande, puede considerarse que la presión atmosférica en los distintos puntos de su superficie tiene el mismo valor $p(z)$, donde z es la altitud del centro de la parcela. La temperatura de la parcela es uniforme e igual a $T_{\text{parcel}}(z)$, que en general difiere de la temperatura del aire circundante $T(z)$. En las partes 2.1 y 2.2 no hacemos ninguna suposición sobre la forma de $T(z)$.

2.1. La variación de la temperatura de la parcela T_{parcel} con la altitud se define mediante

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

Deduzca la expresión de $G(T, T_{\text{parcel}})$.

2.2. Considere una condición atmosférica especial en la que, a cualquier altitud z , la temperatura T de la atmósfera es igual a la de la parcela T_{parcel} , $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$. Utilizamos Γ para denotar el valor de G cuando $T = T_{\text{parcel}}$, es decir,

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

(con $T = T_{\text{parcel}}$). Γ se denomina *gradiente adiabático seco*.

2.2.1. Deduzca la expresión de Γ

2.2.2. Calcule el valor numérico de Γ .

2.2.3. Deduzca la expresión de la temperatura atmosférica $T(z)$ en función de la altitud.

2.3. Suponga que la temperatura atmosférica depende de la altitud según la relación $T(z) = T(0) - \Lambda z$, donde Λ es una constante. Determine la dependencia de la temperatura de la parcela $T_{\text{parcel}}(z)$ con la altitud z .

2.4. Escriba la expresión aproximada de $T_{\text{parcel}}(z)$ cuando $|\Lambda z| \ll T(0)$ y $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$.

3. La estabilidad atmosférica.

En esta parte, suponemos que T varía linealmente con la altitud.

3.1. Considere una parcela de aire inicialmente en equilibrio con el aire circundante a una altitud z_0 , es decir, tiene la misma temperatura $T(z_0)$ que el aire circundante. Si la parcela se desplaza ligeramente hacia arriba o hacia abajo (por ejemplo, debido a la turbulencia atmosférica), puede darse uno de los tres casos siguientes:

- La parcela de aire regresa a la altitud original z_0 ; el equilibrio de la parcela es estable. Se dice que la atmósfera es estable.
- La parcela sigue moviéndose en el sentido inicial; el equilibrio de la parcela es inestable. La atmósfera es inestable.
- La parcela de aire permanece en su nueva posición; el equilibrio de la parcela es indiferente. Se dice que la atmósfera es neutra.

¿Qué condición debe cumplir Λ para que la atmósfera sea estable, inestable o neutra?

3.2. Una parcela tiene a nivel del suelo una temperatura $T_{\text{parcel}}(0)$ superior a la temperatura $T(0)$ del aire circundante. La fuerza de empuje hará que la parcela ascienda. Deduzca la expresión de la altitud máxima que puede alcanzar la parcela en una atmósfera estable en términos de Λ y Γ .

4. La altura de mezcla

4.1. La tabla 1 muestra las temperaturas del aire registradas por un globo de radiosondeo a las 7:00 de la mañana de un día de noviembre en Hanoi. La variación de la temperatura con la altitud puede describirse aproximadamente mediante la fórmula $T(z) = T(0) - \Lambda z$, con distintas tasas de descenso Λ en las tres capas $0 < z < 96 \text{ m}$, $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$ y $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$.

Considere una parcela de aire con temperatura $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$ que asciende desde el suelo. A partir de los datos de la tabla 1 y utilizando la aproximación lineal anterior, calcule la temperatura de la parcela a las altitudes de 96 m y 119 m.

4.2. Determine la altura máxima H que puede alcanzar la parcela y su temperatura $T_{\text{parcel}}(H)$.

H se denomina altura de mezcla. Los contaminantes atmosféricos emitidos desde el suelo pueden mezclarse con el aire de la atmósfera (por ejemplo, mediante el viento, la turbulencia y la dispersión) y diluirse dentro de esta capa.

Tabla 1

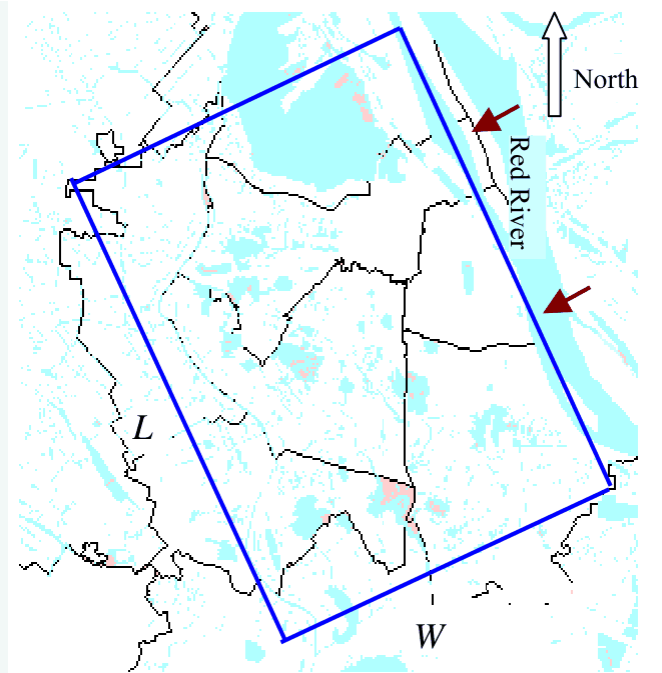
Datos registrados por un globo de radiosondeo a las 7:00 de la mañana de un día de noviembre en Hanoi.

Altitud, m	Temperatura, °C
5	21.5
60	20.6

Altitud, m	Temperatura, °C
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. Estimación de la contaminación por monóxido de carbono (CO) durante una hora punta matutina de tráfico de motocicletas en Hanoi.

El área metropolitana de Hanoi puede aproximarse mediante un rectángulo de dimensiones L y W , como se muestra en la figura, con uno de sus lados situado a lo largo de la orilla suroeste del río Rojo.



Se estima que durante la hora punta de la mañana, de las 7:00 a las 8:00, circulan 8×10^5 motocicletas, cada una de las cuales recorre una media de 5 km y emite 12 g de CO por kilómetro. Se considera, de forma aproximada, que el CO contaminante se emite uniformemente en el tiempo, a una tasa constante M durante la hora punta. Al mismo tiempo, un viento limpio del noreste sopla perpendicularmente al río Rojo (es decir, perpendicularmente a los lados L del rectángulo) con velocidad u , atraviesa la ciudad con la misma velocidad y arrastra parte del aire contaminado con CO fuera de la atmósfera de la ciudad.

Además, utilizamos el siguiente modelo de aproximación:

- El CO se dispersa rápidamente por todo el volumen de la capa de mezcla situada sobre el área metropolitana de Hanoi, de modo que puede suponerse que la concentración $C(t)$ de CO en el instante t es constante en todo ese paralelepípedo rectangular de dimensiones L , W y H .
- El aire que entra en el paralelepípedo por barlovento está limpio y se supone que no se pierde contaminación por las caras paralelas al viento.
- Antes de las 7:00 de la mañana, la concentración de CO en la atmósfera es despreciable.

5.1. Deduzca la ecuación diferencial que determina la concentración $C(t)$ del contaminante CO en función del tiempo.

5.2. Escriba la solución de esa ecuación para $C(t)$.

5.3. Calcule el valor numérico de la concentración $C(t)$ a las 8:00 de la mañana.

Datos: $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Escribamos $T_0 = T(0)$, $T_p = T_{\text{parcel}}$ y $T_{p0} = T_p(0)$. En los cocientes de temperaturas se utilizan kelvin. En la Parte 5, t es el tiempo transcurrido desde las 7:00 de la mañana.

- 1.1.

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

- 1.2.1. Para $\Lambda \neq 0$ y $T_0 - \Lambda z > 0$,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}$$

El límite $\Lambda = 0$ da el resultado de 1.1.

- 1.2.2. Utilizando el criterio de aumento de la densidad especificado en esta parte,

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.1.

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

- 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

- 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

- 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

- 2.4. A primer orden en la altura,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

- 3.1.

$$\begin{aligned}\Lambda < \Gamma &: \text{estable,} \\ \Lambda > \Gamma &: \text{inestable,} \\ \Lambda = \Gamma &: \text{neutra.}\end{aligned}$$

- 3.2. En la aproximación de altura de mezcla prevista, despreciando el sobrepaso por inercia,

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

La expresión correspondiente sin linealizar la temperatura de la parcela se da en la solución.

- 4.1.

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

- 4.2.

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}$$

- 5.1.

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

- 5.2. Durante la hora punta,

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W} \right)$$

- 5.3.

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

Conservando las cifras intermedias se obtiene 2.24 mg m^{-3} .

Solución

1.1. Atmósfera isotérmica

El equilibrio hidrostático de una capa atmosférica horizontal exige

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Para el aire ideal, la densidad de masa es

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Por tanto, cuando $T = T_0$,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

Integrando desde el suelo, donde $p = p_0$, hasta la altitud z ,

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

Por tanto,

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. Atmósfera con una tasa de descenso de la temperatura constante

Con $T(z) = T_0 - \Lambda z$, el equilibrio hidrostático se expresa como

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

Para $\Lambda \neq 0$, la integración da

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

Por tanto,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}.$$

Esta fórmula es aplicable donde la temperatura absoluta siga siendo positiva.

Cuando $\Lambda \rightarrow 0$,

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{RT_0},$$

con lo que se recupera el resultado isotérmico.

1.2.2. Densidad creciente con la altura

Utilizando $\rho = \mu p / (RT)$,

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

Por tanto,

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R}\right).$$

Como $\rho, T > 0$, la densidad aumenta hacia arriba precisamente cuando

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

Numéricamente,

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

por lo que la condición solicitada es

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

Este es el criterio de inversión de densidad establecido en esta pregunta. El criterio de inestabilidad de una parcela adiabática de la Parte 3 es menos restrictivo.

2.1. Variación de temperatura de una parcela adiabática

La parcela contiene una cantidad fija de gas, permanece en equilibrio de presión con su entorno e intercambia una cantidad despreciable de calor con él. Sus relaciones adiabática y de gas ideal son

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

Eliminando V ,

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

o bien

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

Tomando derivadas logarítmicas,

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

El gradiente de presión viene determinado por la atmósfera circundante, cuya temperatura es T :

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

Como $c_p - c_V = R$ y $\gamma = c_p/c_V$,

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

Así,

$$\boxed{G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}}.$$

El factor T_p/T es relevante: la tasa de enfriamiento de la parcela no es exactamente constante cuando su temperatura difiere de la de su entorno.

2.2.1. Gradiente adiabático seco

Cuando $T_p = T$, el cociente de temperaturas de la expresión anterior es igual a uno:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}}.$$

Para el gas diatómico especificado,

$$c_p = \frac{7}{2}R,$$

de modo que

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}}.$$

2.2.2. Valor numérico

La sustitución da

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}}.$$

2.2.3. Perfil de temperatura atmosférica

Bajo la condición especial $T(z) = T_p(z)$,

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

Como Γ es constante,

$$\boxed{T(z) = T(0) - \Gamma z}.$$

2.3. Temperatura de la parcela en una atmósfera con Λ constante

De la Parte 2.1,

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

Separando variables,

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

Integrando,

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Por tanto, para $\Lambda \neq 0$,

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}}.$$

Si $\Lambda = 0$, la atmósfera circundante es isotérmica. En ese caso, la integración directa da

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}}.$$

Para una capa que comienza a la altitud z_i , el mismo resultado puede escribirse como

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

lo que permite enlazar de forma continua las capas sucesivas.

2.4. Aproximación lineal

Desarrollando el resultado de la Parte 2.3 en torno a $z = 0$,

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

A primer orden,

—

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

Con $T_{p0} \approx T_0$,

$$\boxed{T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z}.$$

Estrictamente, este es un desarrollo para alturas pequeñas. Si Λ es muy pequeño, la condición indicada $|\Lambda z| \ll T_0$ no garantiza por sí sola la linealidad; también se necesita $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$. En la Parte 4, ambas variaciones de temperatura son pequeñas en comparación con la temperatura absoluta.

3.1. Estabilidad de una parcela desplazada

Sea una parcela situada inicialmente en z_0 , con

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

Desplacémosla hacia arriba una pequeña distancia con signo ξ . En su equilibrio inicial, su gradiente adiabático de temperatura es $-\Gamma$, por lo que

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma\xi + O(\xi^2).$$

La temperatura del entorno es

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda\xi.$$

Por tanto, el exceso de temperatura de la parcela es

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

A igual presión, la densidad es inversamente proporcional a la temperatura absoluta. La aceleración de la parcela hacia arriba debida al empuje y a la gravedad es

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma)\xi.$$

Así:

- Si $\Lambda < \Gamma$, la aceleración se opone al desplazamiento: la atmósfera es **estable**.
- Si $\Lambda > \Gamma$, la aceleración refuerza el desplazamiento: la atmósfera es **inestable**.
- Si $\Lambda = \Gamma$, la parcela mantiene la misma temperatura y densidad que su entorno: la atmósfera es **neutra**.

Por tanto,

$$\boxed{\text{estable: } \Lambda < \Gamma, \quad \text{inestable: } \Lambda > \Gamma, \quad \text{neutra: } \Lambda = \Gamma.}$$

3.2. Altura alcanzada por una parcela inicialmente más caliente

En la aproximación lineal,

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

Por tanto,

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

En una atmósfera estable, $\Gamma - \Lambda > 0$, por lo que el exceso inicial de temperatura de la parcela disminuye con la altura. El nivel de flotabilidad neutra se obtiene igualando esta diferencia a cero:

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}.$$

Aquí, la notación $z_{\max}$ corresponde al modelo de altura de mezcla previsto en el problema, que desprecia el sobrepaso por inercia.

Para completar el análisis, la altura de flotabilidad neutra también puede hallarse sin la aproximación de la Parte 2.4. Al igualar la temperatura exacta de la parcela a la temperatura atmosférica se obtiene

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right).$$

Así, para $\Lambda \neq 0$,

$$z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}}\right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)}\right].$$

Para $\Lambda = 0$, su límite es

$$z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}.$$

Ambas expresiones se reducen al resultado lineal indicado cuando $T_{p0} - T_0 \ll T_0$.

Es necesaria una precisión dinámica: una flotabilidad nula implica una aceleración nula, pero no necesariamente una velocidad nula. Una parcela que se mueve libremente puede sobrepasar este nivel. Por ejemplo, en la misma aproximación lineal, una parcela sin amortiguamiento que se libera desde el reposo obedece

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

y su primer punto de retorno es $2z_n$. Las partes siguientes utilizan la altura de mezcla de flotabilidad neutra prevista en el problema.

4.1. Temperaturas de la parcela a 96 m y 119 m

Utilicemos rectas que pasen por los extremos medidos de cada capa especificada. Sus tasas de descenso de la temperatura son

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

y

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

Al extrapolar la primera recta se obtiene una temperatura a nivel del suelo de

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

cercana a los 22°C iniciales de la parcela. Todas las variaciones de temperatura relevantes son pequeñas en comparación con unos 294 K, por lo que es aplicable la Parte 2.4.

Como una diferencia de temperatura en kelvin es igual a una diferencia de temperatura en grados Celsius,

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

En consecuencia,

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

y

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

Con la precisión de los datos de temperatura,

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

Como comprobación, al aplicar la fórmula exacta de la Parte 2.3 por separado a la primera capa y a la segunda capa isotérmica se obtienen 21.059°C y 20.833°C , respectivamente. Al redondearlos se obtienen las mismas respuestas.

4.2. Altura de mezcla

Tanto a 96 m como a 119 m, la temperatura del entorno es 20.1°C . La parcela está más caliente a ambas alturas, por lo que continúa ascendiendo hacia la capa de inversión situada por encima de los 119 m.

Escribamos el gradiente positivo de temperatura en esa capa como

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

La temperatura del entorno en esa capa es

$$T(z) = 20.1^\circ\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

A la altura de mezcla, la parcela y la atmósfera tienen la misma temperatura:

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

con H en metros y las temperaturas de la expresión en grados Celsius. Resolviendo,

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m}.$$

Este valor se encuentra dentro de la capa de inversión supuesta, como debe ser.

La temperatura de la parcela a esa altura es

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^\circ\text{C}.$$

Por tanto,

$$\boxed{H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}}.$$

Utilizando la evolución exacta de la temperatura de la parcela a través de las tres capas atmosféricas de perfil lineal se obtiene $H = 143.78 \text{ m}$, lo que confirma que la aproximación lineal para la parcela es adecuada.

5.1. Ecuación de conservación del CO

El volumen de aire uniformemente mezclado es

$$V = LWH.$$

Si $C(t)$ es la concentración másica de CO, la masa total de CO dentro del paralelepípedo es

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

El viento atraviesa una cara de anchura L y altura H , por lo que su caudal volumétrico es

$$Q = uLH.$$

Como el aire entrante está limpio, el flujo entrante de CO es cero. El caudal másico saliente de CO es

$$QC = uLH C.$$

Por tanto, la conservación del CO da

$$\frac{d}{dt}(LWH C) = M - uLH C.$$

Las dimensiones del paralelepípedo son constantes, de modo que

$$\boxed{\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}}, \quad \boxed{C(0) = 0}.$$

5.2. Concentración en función del tiempo

Una solución particular constante es

$$C_{ss} = \frac{M}{uLH}.$$

La solución homogénea es proporcional a $e^{-ut/W}$, por lo que

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

Utilizando $C(0) = 0$,

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

Así,

$$\boxed{C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s.}$$

La escala temporal de ventilación es W/u . En el límite de ausencia de viento, esta expresión se reduce correctamente a $C(t) = Mt/(LWH)$.

5.3. Concentración de CO a las 8:00 de la mañana

La cantidad total de CO emitida durante esa hora es

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg}.$$

Por tanto,

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

Utilizando

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

el tiempo transcurrido adimensional es

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

Por tanto,

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

lo que da

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

Con una precisión adecuada a los datos aproximados de partida,

$$\boxed{C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.