

IPhO 2008

Theorieaufgaben und Lösungen · Hanoi, Vietnam · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2008/

Aufgabe 1: Wasserbetriebener Reisstampfmörser

A. Einführung

Reis ist das wichtigste Grundnahrungsmittel für die meisten Menschen in Vietnam. Um aus Rohreis weißen Reis zu gewinnen, müssen die Spelzen entfernt werden (ein als „Entspelzen“ bezeichneter Vorgang) und die Kleieschicht abgetragen werden („Schleifen“). Die hügeligen Regionen Nordvietnams sind reich an Wasserläufen, und die dort lebenden Menschen verwenden *wasserbetriebene Reisstampfmörser*, um die Kleieschicht zu entfernen. Abbildung 1 zeigt einen solchen Mörser. Abbildung 2 zeigt seine Funktionsweise.

B. Aufbau und Betrieb

1. Aufbau.

Der in Abbildung 1 gezeigte Reisstampfmörser besteht aus folgenden Teilen:

Dem Mörser, im Wesentlichen einem hölzernen Behälter für Reis.

Dem Hebel, einem Baumstamm mit einem dickeren und einem dünneren Ende. Er kann sich um eine horizontale Achse drehen. Am dünneren Ende ist ein *Stößel* senkrecht zum Hebel befestigt. Die Länge des Stößels ist so gewählt, dass er den Reis im Mörser berührt, wenn der Hebel horizontal liegt. Das dickere Ende des Hebels ist ausgehöhlt und bildet einen Schöpfbehälter. Die Form dieses Behälters ist für den Betrieb des Mörsers entscheidend.

2. Betriebszustände

Der Mörser hat zwei Betriebszustände.

Arbeitszustand. In diesem Zustand durchläuft der Mörser einen in Abbildung 2 dargestellten Arbeitszyklus.

Das Stampfen des Reises beruht auf der Arbeit, die während der Phase f) in Abbildung 2 vom Stößel auf den Reis übertragen wird. Wenn der Stößel aus irgendeinem Grund den Reis niemals berührt, sagen wir, dass der Mörser nicht arbeitet.

Ruhezustand mit angehobenem Hebel. Während der Phase c) des Arbeitszyklus (Abbildung 2) nimmt mit zunehmendem Neigungswinkel α die Wassermenge im Schöpfbehälter ab. Zu einem bestimmten Zeitpunkt reicht die Wassermenge gerade aus, um die Gewichtskraft des Hebels auszugleichen. Der Neigungswinkel in diesem Augenblick sei β . Wird der Hebel beim Winkel β gehalten und ist seine Anfangswinkelgeschwindigkeit null, so bleibt er für immer in dieser Stellung.

Dies ist der Ruhezustand mit angehobenem Hebel. Die Stabilität dieser Stellung hängt vom Wasserzufluss in den Behälter, Φ , ab. Überschreitet Φ einen bestimmten Wert Φ_2 , so ist dieser Ruhezustand stabil, und der Mörser kann sich nicht im Arbeitszustand befinden.

Mit anderen Worten ist Φ_2 der kleinste Zufluss, bei dem der Mörser nicht arbeitet.



Abbildung 1
Ein wasserbetriebener Reisstampfmörser

ARBEITSZYKLUS EINES WASSERBETRIEBENEN REISSTAMPFMÖRSERS

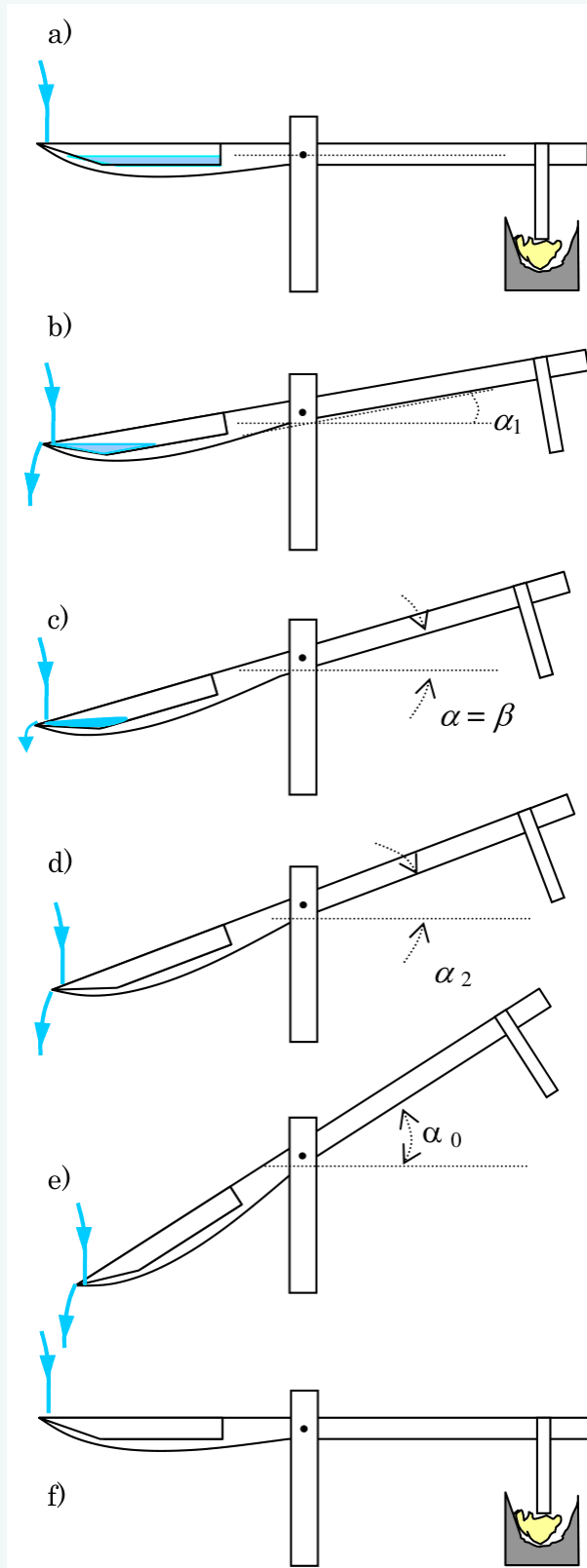


Abbildung 2

a) Zu Beginn befindet sich kein Wasser im Schöpfbehälter, und der Stößel ruht auf dem Mörser. Wasser fließt mit geringer Rate in den Behälter, doch der Hebel bleibt zunächst eine Zeit lang in der horizontalen Stellung.

b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt reicht die Wassermenge aus, um den Hebel anzuheben. Durch die Neigung strömt das Wasser zur weiter außen liegenden Seite des Behälters, wodurch sich der Hebel schneller neigt.

Bei $\alpha = \alpha_1$ beginnt Wasser auszufließen.

c) Mit zunehmendem Winkel α beginnt Wasser auszufließen. Bei einem bestimmten Neigungswinkel, $\alpha = \beta$, ist das Gesamtdrehmoment null.

d) α nimmt weiter zu, und Wasser fließt weiter aus, bis sich kein Wasser mehr im Behälter befindet.

e) Aufgrund der Trägheit nimmt α weiter zu. Wegen der Form des Behälters fällt Wasser zwar hinein, fließt aber sofort wieder heraus. Die Trägheitsbewegung des Hebels setzt sich fort, bis α den Maximalwert α_0 erreicht.

f) Da sich kein Wasser im Behälter befindet, zieht die Gewichtskraft des Hebels ihn in die ursprüngliche horizontale Stellung zurück. Der Stößel versetzt dem Mörser (mit dem darin befindlichen Reis) einen Schlag, und ein neuer Zyklus beginnt.

C. Die Aufgabe

Betrachten Sie einen wasserbetriebenen Reisstampfmörser mit den folgenden Parametern (Abbildung 3).

Die Masse des Hebels (einschließlich des Stößels, aber ohne Wasser) beträgt $M = 30 \text{ kg}$.

Der Schwerpunkt des Hebels ist G. Der Hebel dreht sich um die Achse T (in der Abbildung auf den Punkt T projiziert).

Das Trägheitsmoment des Hebels bezüglich T beträgt $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Wenn sich Wasser im Behälter befindet, wird seine Masse mit m und der Schwerpunkt des Wasserkörpers mit N bezeichnet.

Der Neigungswinkel des Hebels gegenüber der Horizontalen ist α .

Die wichtigsten Längenmaße des Mörsers und des Schöpfbehälters sind in Abbildung 3 angegeben.

Vernachlässigen Sie die Reibung an der Drehachse und die Kraft durch das auf den Behälter fallende Wasser. In dieser Aufgabe nehmen wir näherungsweise an, dass die Wasseroberfläche stets horizontal ist.

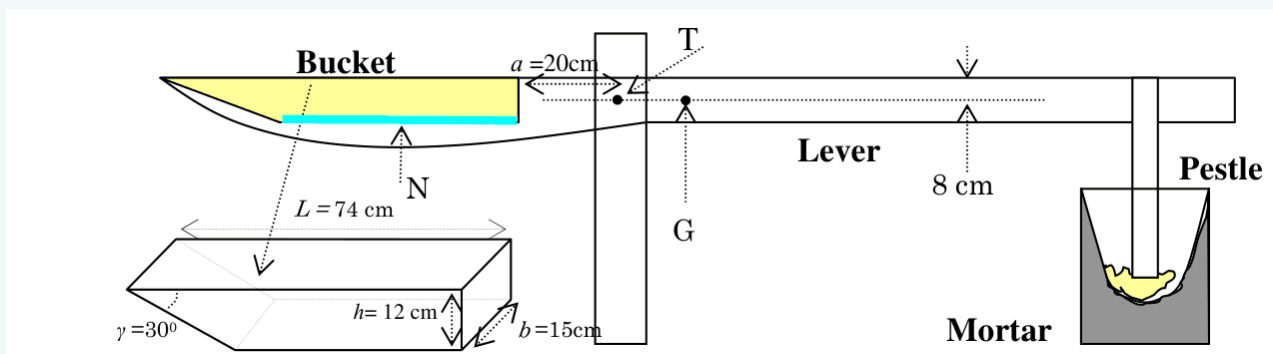


Abbildung 3 Aufbau und Abmessungen des Reisstampfmörser

1. Der Aufbau des Mörsers

Zu Beginn ist der Schöpfbehälter leer, und der Hebel liegt horizontal. Dann fließt Wasser in den Behälter, bis der Hebel sich zu drehen beginnt. Die Wassermenge im Behälter beträgt in diesem Augenblick $m = 1.0 \text{ kg}$.

1.1. Bestimmen Sie den Abstand vom Schwerpunkt G des Hebels zur Drehachse T. Es ist bekannt, dass GT horizontal verläuft, wenn der Behälter leer ist.

1.2. Wasser beginnt aus dem Behälter auszufließen, wenn der Winkel zwischen dem Hebel und der Horizontalen α_1 erreicht. Der Behälter ist vollständig leer, wenn dieser Winkel α_2 beträgt.

Bestimmen Sie α_1 und α_2 .

1.3. Es sei $\mu(\alpha)$ das Gesamtdrehmoment (bezüglich der Achse T), das von den Gewichtskräften des Hebels und des Wassers im Behälter herrührt. $\mu(\alpha)$ ist null, wenn $\alpha = \beta$. Bestimmen Sie β und die Masse m_1 des Wassers im Behälter in diesem Augenblick.

2. Parameter des Arbeitszustands

Wasser fließe mit einer konstanten, kleinen Zuflussrate Φ in den Behälter. Die Wassermenge, die während der Bewegung des Hebels in den Behälter fließt, ist vernachlässigbar. Vernachlässigen Sie in diesem Teil die Änderung des Trägheitsmoments während des Arbeitszyklus.

2.1. Skizzieren Sie den Verlauf des Drehmoments μ als Funktion des Winkels α , $\mu(\alpha)$, während eines Arbeitszyklus. Geben Sie die Werte von $\mu(\alpha)$ bei den Winkeln α_1 , α_2 und $\alpha = 0$ ausdrücklich an.

2.2. Erörtern Sie anhand des in Abschnitt 2.1. ermittelten Graphen den Wert der gesamten durch $\mu(\alpha)$ erzeugten Energie W_{total} und der Arbeit W_{pounding} , die vom Stößel auf den Reis übertragen wird, und geben Sie deren geometrische Interpretation an.

2.3. Schätzen Sie anhand des Graphen von μ in Abhängigkeit von α die Größen α_0 und W_{pounding} ab (nehmen Sie an, dass die kinetische Energie des in den Behälter ein- und aus ihm ausfließenden Wassers vernachlässigbar ist). Sie dürfen gekrümmte Linien durch Polygonzüge ersetzen, wenn dies die Rechnung vereinfacht.

3. Der Ruhezustand

Wasser fließe mit einer konstanten Rate Φ in den Behälter, wobei die während der Bewegung des Hebels einfließende Wassermenge nicht vernachlässigt werden kann.

3.1. Nehmen Sie an, dass der Behälter stets mit Wasser überläuft.

3.1.1. Skizzieren Sie den Verlauf des Drehmoments μ als Funktion des Winkels α in der Umgebung von $\alpha = \beta$. Um welche Art von Gleichgewicht handelt es sich bei der Stellung $\alpha = \beta$ des Hebels?

3.1.2. Bestimmen Sie den analytischen Ausdruck des Drehmoments $\mu(\alpha)$ als Funktion von $\Delta\alpha$, wenn $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ und $\Delta\alpha$ klein ist.

3.1.3. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Hebels auf, der sich aus der Stellung $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ mit der Anfangsgeschwindigkeit null in Bewegung setzt ($\Delta\alpha$ ist klein). Zeigen Sie, dass die Bewegung in guter Näherung eine harmonische Schwingung ist. Berechnen Sie die Periodendauer τ .

3.2. Bei gegebenem Φ läuft der Behälter nur dann zu jeder Zeit mit Wasser über, wenn sich der Hebel hinreichend langsam bewegt. Für die Amplitude der harmonischen Schwingung gibt es eine obere Grenze, die von Φ abhängt. Bestimmen Sie den kleinsten Wert Φ_1 von Φ (in kg/s), bei dem der Hebel eine harmonische Schwingung mit der Amplitude 1° ausführen kann.

3.3. Nehmen Sie an, dass Φ hinreichend groß ist, sodass der Behälter während der freien Bewegung des Hebels stets mit Wasser überläuft, wenn der Neigungswinkel von α_2 auf α_1 abnimmt. Ist Φ jedoch zu groß, kann der Mörser nicht arbeiten. Schätzen Sie unter der Annahme einer harmonischen Schwingung des Hebels die kleinste Zuflussrate Φ_2 ab, bei der der Reisstampfmörser nicht arbeitet.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Ein positives Drehmoment bedeutet eine Zunahme von α . Für die numerischen Ergebnisse werden $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ und $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ verwendet.

- 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$.
- 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ, \quad \alpha_2 = 30^\circ$.
- 1.3. $\beta = 23.57^\circ, \quad m_1 = 0.605 \text{ kg}$.
- 2.1. Beim Anheben gilt

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}, \quad \mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}.$$

Der Rücklaufzweig bei leerem Behälter lautet $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ und endet bei -4.62 N m . Das Befüllen bei $\alpha = 0$ verbindet diesen Wert mit null.

- 2.2. $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$ ist die vom Zyklus eingeschlossene Fläche. Die Stampfarbeit beträgt

$$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0,$$

und ist gleich W_{total} , wenn die vom Wasser abgeführte kinetische Energie vernachlässigt wird.

- 2.3. $\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}$.
- 3.1.1. Stabiles Gleichgewicht; das Drehmoment durchläuft bei β mit negativer Steigung die Nullstelle.
- 3.1.2. Für $\Delta\alpha$ im Bogenmaß gilt

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

- 3.1.3. $\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau)$, mit $\tau \approx 3.26 \text{ s}$.
- 3.2. $\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}$.

- **3.3.** Mit der Grenzamplitude $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$ ergibt sich

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

Die Gleichgewichtslage ist β ; α_1 ist der bei dieser Abschätzung verwendete untere Umkehrpunkt.

Lösung

Wir bezeichnen die Wasserfüllung, bei der die Bewegung einsetzt, mit $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ und setzen $r = GT$. Aus Abbildung 3 folgt

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

Der Drehpunkt liegt $d = 0.08 \text{ m}$ unterhalb der Oberkante des Behälters. Wir verwenden die Standardwerte $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ und $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, die in der Aufgabe nicht angegeben sind.

Nützliche Abkürzungen sind

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. Lage des Schwerpunkts des Hebels

Der ebene Boden des Behälters hat die Länge

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m}.$$

Es sei η die anfängliche Wassertiefe über diesem Boden. Der Längsschnitt des Wasserkörpers ist ein Trapez, sodass

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

Daraus folgt

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0 / (\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m}.$$

Die Koordinate u werde entlang des Behälters von seiner inneren senkrechten Wand zum äußeren Überlaufrand gemessen. Ein horizontaler Streifen in der Höhe y über dem Boden erstreckt sich von $u = 0$ bis $u = \ell + qy$. Aus seinem Schwerpunkt ergibt sich daher

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

Mit $w = \ell + q\eta$ wird daraus

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m}.$$

In dem Augenblick, in dem der Stößel den Kontakt zum Reis verliert, verschwindet seine Auflagekraft. Die beiden durch die Gewichtskräfte verursachten Drehmomente gleichen sich aus:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

Somit gilt

$$r = \frac{m_0}{M}(a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

Wir definieren die zugehörige Drehmomentskala

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m}.$$

1.2. Beginn und Ende des Ausfließens

Wir verwenden behälterfeste Koordinaten:

- s verläuft vom äußeren Überlaufrand entlang der Oberkante nach innen;
- z misst die Tiefe unterhalb dieser Kante.

Die schräge Stirnwand ist durch $z = s \tan \gamma$ gegeben, der ebene Boden durch $z = h$, und der Drehpunkt hat die Koordinaten (R, d) .

Wenn das Wasser den äußeren Überlaufrand erreicht, verläuft seine horizontale Oberfläche durch $(0, 0)$. In den Behälterkoordinaten lautet ihre Gleichung

$$z = s \tan \alpha.$$

Das zurückgehaltene Wasser hat dann einen dreieckigen Längsschnitt mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

Seine Masse beträgt daher

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2} (\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

Bei der Füllung mit $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ beginnt das Ausfließen, wenn dieses Fassungsvermögen gleich m_0 ist:

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

Damit folgt

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

Das Wasser ist vollständig ausgeflossen, wenn die horizontale freie Oberfläche parallel zur schrägen Stirnwand wird:

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

Die Dreieckskonstruktion ist mit den Abmessungen vereinbar: Bei α_1 liegt ihr innerer Endpunkt bei $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$.

1.3. Gleichgewichtswinkel und verbleibende Wassermasse

Der Schwerpunkt des dreieckigen Querschnitts bei überlaufendem Wasser liegt bei

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

Die Abmessungen haben die nützliche Eigenschaft

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

Somit verläuft TN entlang des Hebels, und der horizontale Hebelarm der Gewichtskraft des Wassers beträgt

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

Das Gesamtdrehmoment während des Ausfließens ist

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

Wir setzen $v = \cot \beta - q$. Die Gleichgewichtsbedingung wird dann zu

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

Die Lösung im physikalisch relevanten Bereich $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ ist

$$v = 0.560329.$$

Daher gilt

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

und

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

Der später benötigte Abstand ist

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m}.$$

2.1. Drehmoment während des gesamten Arbeitszyklus

Für einen beliebigen Schwerpunkt (s_N, z_N) des Wassers beträgt der horizontale Hebelarm seiner Gewichtskraft

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

Vor Beginn des Ausfließens gilt daher

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

Das Wasser hat anfangs einen trapezförmigen Querschnitt. Dieser wird dreieckig, sobald das Wasser die innere senkrechte Wand nicht mehr berührt. Dies geschieht bei

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

Für $\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$ definieren wir

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b(\cot \alpha - q)}}.$$

Dies ist die senkrecht zum Behälterboden gemessene Höhe des Dreiecks. Sein Schwerpunkt liegt bei

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

Diese Ausdrücke bestimmen zusammen mit (3) den Zweig beim Anheben vor Beginn des Ausfließens. Zwischen α_1 und α_2 verwenden wir (2).

Sobald der Behälter leer ist, liefert er keinen Beitrag zum Drehmoment:

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

Der Graph lässt sich anhand der folgenden Werte zeichnen:

α	Drehmoment beim Anheben (N m)	Drehmoment beim Rücklauf mit leerem Behälter (N m)
0°	0 beim Abheben	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

Der vollständige Zyklus weist folgende Merkmale auf:

1. Bei $\alpha = 0$ erhöht das Befüllen das durch die Gewichtskräfte verursachte Drehmoment von $-K$ auf null. Dies ist eine senkrechte Strecke im Drehmoment-Winkel-Diagramm. Die Reaktionskraft des Mörsers hält den Hebel während dieser Phase in Ruhe.
2. Beim Anheben steigt das Drehmoment von null auf seinen Maximalwert $+2.687 \text{ N m}$ bei α_1 .
3. Durch das Ausfließen nimmt das Drehmoment ab, durchläuft bei β die Nullstelle und erreicht bei α_2 den Wert -4.001 N m .
4. Von α_2 bis zum maximalen Winkel α_0 und während des gesamten Rücklaufs mit leerem Behälter folgt das Drehmoment der Funktion $-K \cos \alpha$. Diese Hin- und Rücklaufkurven fallen für $\alpha \geq \alpha_2$ zusammen.

Insbesondere hat $\mu(0)$ in verschiedenen Phasen unterschiedliche Werte: null beim Abheben und -4.620 N m bei leerem Behälter.

2.2. Arbeit und ihre geometrische Interpretation

Die infinitesimale Arbeit bei einer Drehung ist

$$dW = \mu d\alpha,$$

wobei die Winkel im Bogenmaß gemessen werden.

Die gesamte Arbeit während eines Zyklus beträgt

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

Oberhalb von α_2 fallen die Zweige zusammen, sodass

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

Geometrisch ist dies die Fläche, die vom Zweig beim Anheben, vom Rücklaufzweig bei leerem Behälter und von der Befüllstrecke bei $\alpha = 0$ eingeschlossen wird.

Der Hebel mit leerem Behälter beginnt seinen Rücklauf bei α_0 aus der Ruhe. Die Abnahme seiner potenziellen Energie im Schwerfeld wird zur beim Aufprall übertragenen kinetischen Energie:

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

Dies ist die positive Fläche zwischen der Rücklaufkurve bei leerem Behälter und der Winkelachse von 0 bis α_0 .

Wenn ausfließendes Wasser kinetische Energie abführt, verringert diese Energie den Anteil der Arbeit des Zyklus, der auf den Reis übertragen wird. Unter der Näherung aus 2.3, dass diese Energie vernachlässigbar ist, gilt

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

Gleichbedeutend damit heben sich die positiven und negativen vorzeichenbehafteten Flächen während des gesamten Anhebens auf, da diese Bewegung aus der Ruhe beginnt und in Ruhe endet:

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. Maximaler Winkel und Stampfarbeit

Es sei

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

Dies ist die verbleibende kinetische Energie, wenn das letzte Wasser den Behälter verlässt.

Verbindet man die tabellierten Punkte des Zweigs beim Anheben durch gerade Strecken, erhält man

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

Von α_2 bis α_0 wandelt der Hebel mit leerem Behälter diese Energie in potenzielle Energie im Schwerfeld um:

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

Damit ergibt sich aus der Näherung durch einen Polygonzug

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

und somit

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

Eine genauere Integration der gekrümmten Drehmomentzweige ergibt

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

Daher ist $E_2 = 0.5016 \text{ J}$, woraus folgt

$$\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}.$$

3.1.1. Gleichgewicht bei ständigem Überlaufen

Bei ständigem Überlaufen ist die Wassermasse in beiden Bewegungsrichtungen eine durch (1) gegebene Funktion des Winkels.

In der Nähe von β verringert eine Zunahme von α die Wassermasse und erzeugt ein negatives Drehmoment. Eine Abnahme von α erhöht die zurückgehaltene Wassermasse und erzeugt ein positives Drehmoment.

Der Graph verläuft somit mit negativer Steigung durch $(\beta, 0)$, und es gilt

$$\alpha = \beta \text{ ist eine stabile Gleichgewichtslage.}$$

In der angegebenen Idealisierung führen kleine Störungen zu ungedämpften Schwingungen.

3.1.2. Linearisiertes Drehmoment

Wir schreiben (2) in der Form

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

wobei

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

Im Gleichgewicht gilt $F(\cot \beta) = 0$. Außerdem ist

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3}c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

Daher gilt

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

Wir definieren

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

Für eine kleine Winkelauslenkung im Bogenmaß gilt

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. Bewegungsgleichung und Periodendauer

In erster Ordnung wird das Trägheitsmoment des Wassers in der Gleichgewichtslage ausgewertet. Nähert man seinen kleinen Beitrag durch eine in seinem Schwerpunkt konzentrierte Masse an, erhält man

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

Das Trägheitsmoment des Wassers bezüglich seines eigenen Schwerpunkts beträgt nur etwa 0.0026 kg m^2 , sodass die Berücksichtigung seiner räumlichen Ausdehnung einen vernachlässigbaren Einfluss auf die angegebene Periodendauer hat.

Änderungen des Trägheitsmoments werden mit kleinen Beschleunigungen oder Geschwindigkeiten multipliziert und liefern Beiträge jenseits der linearen Näherung. Mit $x = \alpha - \beta$ gilt somit

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators mit

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

Für $x(0) = \Delta\alpha$ und $\dot{x}(0) = 0$ gilt

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

Die Periodendauer beträgt

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. Erforderlicher Zufluss für die Amplitude 1°

Für das Fassungsvermögen des überlaufenden Behälters gilt

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

Während des abwärts gerichteten Teils der Schwingung nimmt dieses Fassungsvermögen zu. Damit das Überlaufen erhalten bleibt, muss für den zufließenden Massenstrom gelten:

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

Für kleine Schwingungen mit der Amplitude A gilt

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

In erster Ordnung ergibt sich

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

Das Maximum tritt beim abwärts gerichteten Durchgang durch die Gleichgewichtslage auf. Daher gilt

$$\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A. \quad (4)$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

Für $A = 1^\circ = \pi/180$ im Bogenmaß gilt

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

Damit folgt

$$\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}.$$

3.3. Abschätzung der Zuflussschwelle für das Aussetzen des Stampfens

Wir betrachten die Grenzschwingung in angehobener Lage, deren unterer Umkehrpunkt α_1 ist. Ihr Mittelpunkt liegt beim Gleichgewichtswinkel β , sodass sich für ihre Amplitude ergibt:

$$A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}.$$

Diese Grenzschwingung bleibt oberhalb der horizontalen Stellung, sodass der Stößel den Reis nicht erreicht.

Mit derselben Überlaufbedingung (4) ergibt sich

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

Gleichwertig dazu ist

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

Somit gilt

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

Die Korrektur aufgrund der endlichen Amplitude lässt sich unter Beibehaltung eines harmonischen Bewegungsverlaufs überprüfen. Auf dessen absteigendem Zweig gilt

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

sodass für die exakte Zunahmerate des Fassungsvermögens gilt:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

Ihr Maximum liegt bei ungefähr 0.69 kg s^{-1} , in Übereinstimmung mit der Abschätzung

$$\boxed{\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}}.$$

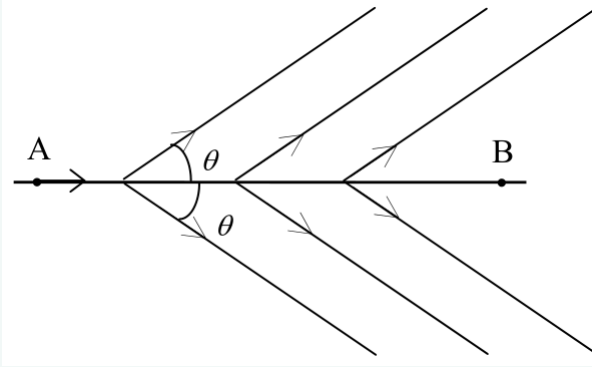
Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Tscherenkow-Licht und ringabbildender Zähler

Licht breitet sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit c aus. Kein Teilchen bewegt sich mit einer Geschwindigkeit größer als c . In einem transparenten Medium kann sich ein Teilchen jedoch mit einer Geschwindigkeit v bewegen, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit in demselben Medium $\frac{c}{n}$, wobei n der Brechungsindex des Mediums ist. Experiment (Cherenkov, 1934) und Theorie (Tamm und Frank, 1937) zeigten, dass ein geladenes Teilchen, das sich in einem transparenten Medium mit dem Brechungsindex n mit einer Geschwindigkeit v bewegt, für die $v > \frac{c}{n}$ gilt, Licht aussendet, das als *Tscherenkow-Licht* bezeichnet wird. Die Ausbreitungsrichtungen dieses Lichts bilden mit der Teilchenbahn den Winkel

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \tag{1}$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$.



1. Um diesen Sachverhalt herzuleiten, betrachten wir ein Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit $v > \frac{c}{n}$ geradlinig bewegt. Es passiert A zum Zeitpunkt 0 und B zum Zeitpunkt t_1 . Da das Problem bezüglich Drehungen um AB symmetrisch ist, genügt es, Lichtstrahlen in einer Ebene zu betrachten, die AB enthält.

An jedem Punkt C zwischen A und B emittiert das Teilchen eine kugelförmige Lichtwelle, die sich mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ ausbreitet. Wir definieren die Wellenfront zu einem gegebenen Zeitpunkt t als die Einhüllende all dieser Kugeln zu diesem Zeitpunkt.

1.1. Bestimmen Sie die Wellenfront zum Zeitpunkt t_1 und zeichnen Sie ihre Schnittlinie mit einer Ebene, die die Teilchenbahn enthält.

1.2. Drücken Sie den Winkel φ zwischen dieser Schnittlinie und der Teilchenbahn durch n und β aus.

2. Betrachten wir einen Teilchenstrahl, der sich entlang einer Geraden IS mit der Geschwindigkeit $v > \frac{c}{n}$ bewegt, wobei der Winkel θ klein ist. Der Strahl durchquert einen konkaven Kugelspiegel mit der Brennweite f und dem Mittelpunkt C am Punkt S. SC bildet mit SI einen kleinen Winkel α (siehe die Abbildung auf dem Antwortblatt). Der Teilchenstrahl erzeugt in der Brennebene des Spiegels ein Ringbild.

Erklären Sie anhand einer Skizze, warum dies der Fall ist. Geben Sie die Lage des Mittelpunkts O und den Radius r des Ringbildes an.

Diese Anordnung wird in *ringabbildenden Tscherenkow-Zählern* (RICH) verwendet, und das Medium, das das Teilchen durchquert, wird als *Radiator* bezeichnet.

Hinweis: In allen Teilaufgaben dieser Aufgabe werden Terme zweiter und höherer Ordnung in α und θ vernachlässigt.

3. Ein Teilchenstrahl mit bekanntem Impuls $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ besteht aus drei Teilchensorten: Protonen, Kaonen und Pionen mit den jeweiligen Ruhemassen $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$, $M_\kappa = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ und $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$. Denken Sie daran, dass pc und Mc^2 die Dimension einer Energie haben und dass 1 eV die Energie ist, die ein Elektron bei der Beschleunigung durch eine Spannung von 1 V gewinnt, sowie dass $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

Der Teilchenstrahl durchquert Luft (den Radiator) unter dem Druck P . Der Brechungsindex der Luft hängt vom Luftdruck P gemäß der Beziehung $n = 1 + aP$ ab, wobei $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$

3.1. Berechnen Sie für jede der drei Teilchensorten den minimalen Luftdruck $P_{\min}$, bei dem sie Tscherenkow-Licht emittieren.

3.2. Berechnen Sie den Druck $P_{\frac{1}{2}}$, bei dem der Radius des Ringbildes der Kaonen halb so groß ist wie derjenige der Pionen. Berechnen Sie für diesen Fall die Werte von θ_{κ} und θ_{π} .

Kann bei diesem Druck das Ringbild der Protonen beobachtet werden?

4. Nehmen Sie nun an, dass der Strahl nicht vollkommen monochromatisch ist: Die Teilchenimpulse sind über ein Intervall mit dem Mittelpunkt $10 \text{ GeV}/c$ und der halben Breite bei halber Höhe Δp verteilt. Dadurch wird das Ringbild verbreitert; entsprechend hat die Verteilung von θ eine halbe Breite bei halber Höhe $\Delta\theta$. Der Druck des Radiators ist der in 3.2 bestimmte Wert $P_{\frac{1}{2}}$.

4.1. Berechnen Sie $\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p}$ und $\frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p}$, also die Werte von $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ für Pionen und Kaonen.

4.2. Wenn der Abstand zwischen den beiden Ringbildern, $\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}$, größer als das Zehnfache der Summe der halben Breiten $\Delta\theta = \Delta\theta_{\kappa} + \Delta\theta_{\pi}$ ist, also $\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10\Delta\theta$, lassen sich die beiden Ringbilder gut unterscheiden. Berechnen Sie den maximalen Wert von Δp , bei dem sich die beiden Ringbilder noch gut unterscheiden lassen.

5. Cherenkov entdeckte den nach ihm benannten Effekt erstmals, als er eine Flasche Wasser in der Nähe einer radioaktiven Quelle beobachtete. Er sah, dass das Wasser in der Flasche Licht aussandte.

5.1. Bestimmen Sie die minimale kinetische Energie $T_{\min}$ eines Teilchens mit der Ruhemasse M , das sich in Wasser bewegt, bei der es Tscherenkow-Licht emittiert. Der Brechungsindex von Wasser beträgt $n = 1.33$.

5.2. Die von Cherenkov verwendete radioaktive Quelle emittiert entweder α -Teilchen (also Heliumkerne) mit der Ruhemasse $M_{\alpha} = 3.8 \text{ GeV}/c^2$ oder β -Teilchen (also Elektronen) mit der Ruhemasse $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$. Berechnen Sie die Zahlenwerte von $T_{\min}$ für α -Teilchen und β -Teilchen.

Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die kinetische Energie der von radioaktiven Quellen emittierten Teilchen niemals mehr als einige MeV beträgt, welche Teilchen die von Cherenkov beobachtete Strahlung hervorrufen.

6. In den vorherigen Teilen der Aufgabe wurde die Abhängigkeit des Tscherenkow-Effekts von der Wellenlänge λ außer Acht gelassen. Nun berücksichtigen wir, dass die Tscherenkow-Strahlung eines Teilchens ein breites kontinuierliches Spektrum besitzt, das den sichtbaren Bereich einschließt (Wellenlängen von $0.4 \mu\text{m}$ bis $0.8 \mu\text{m}$). Außerdem wissen wir, dass der Brechungsindex n des Radiators linear um 2% von $n - 1$ abnimmt, wenn λ über diesen Bereich zunimmt.

6.1. Betrachten Sie einen Pionenstrahl mit einem eindeutig bestimmten Impuls von $10.0 \text{ GeV}/c$, der sich in Luft bei einem Druck von 6 atm bewegt. Bestimmen Sie die Winkeldifferenz $\delta\theta$ zwischen den beiden Enden des sichtbaren Bereichs.

6.2. Untersuchen Sie auf dieser Grundlage qualitativ den Einfluss der Dispersion auf das Ringbild von Pionen, deren Impulse über ein Intervall mit dem Mittelpunkt $p = 10 \text{ GeV}/c$ und der halben Breite bei halber Höhe $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ verteilt sind.

6.2.1. Berechnen Sie die Verbreiterung durch Dispersion (veränderlicher Brechungsindex) und diejenige durch die fehlende Monochromatizität des Strahls (veränderlicher Impuls).

6.2.2. Beschreiben Sie, wie sich die Farbe des Rings vom inneren zum äußeren Rand verändert, indem Sie die entsprechenden Kästchen auf dem Antwortblatt ankreuzen.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **1.1.** Die durch gemeinsame Tangenten gebildete Wellenfront ist ein gerader Kreiskegel mit der Spitze B und der Achse AB, der sich entlang der Teilchenbahn nach hinten öffnet. Sein Achsenschnitt besteht aus zwei Tangentenstrecken, die sich in B treffen. Beginnt die Emission in A, umfasst die vollständige äußere Begrenzung außerdem die freiliegende hintere Kalotte der ersten Kugelwelle.

- **1.2.**

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- **2.** Sei F der Mittelpunkt der Strecke SC. Der Mittelpunkt O liegt in der Brennebene durch F, in der Ebene ISC, auf der I gegenüberliegenden Seite von SC:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

Der Referenzstrahl entlang IS wird in S entlang SO reflektiert.

- **3.1.**

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Die Schwellendrücke betragen

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

Eine von null verschiedene Emission erfordert einen Druck oberhalb der Schwelle.

- **3.2.**

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

Protonen erzeugen bei diesem Druck keinen Ring.

- **4.1.**

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

- **4.2.** Der Grenzwert der halben Breite beträgt

$$\Delta p_{\lim} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

Das angegebene strenge Trennkriterium erfordert $\Delta p < \Delta p_{\lim}$.

- 5.1.

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

- 5.2.

$$T_{\min,\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\min,e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Die beobachtete Strahlung wird von den β -Teilchen, also Elektronen, erzeugt.

- 6.1.

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

- 6.2.1. Die Dispersion ergibt über das gesamte sichtbare Spektrum eine Winkelspanne von ungefähr 0.59 mrad. Die Impulsstreuung ergibt

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (halbe Breite)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

Die entsprechenden radialen Breiten erhält man durch Multiplikation dieser Winkelbreiten mit f .

- 6.2.2. Der innere Rand ist rot und der äußere Rand blau/violett. Die dominierenden Wellenlängen nehmen nach außen hin ab; die Impulsstreuung verwischt und vermischt benachbarte Farben.

Lösung

Winkel werden im Bogenmaß angegeben. Die Spiegelgeometrie wird in erster Ordnung in den kleinen Winkeln behandelt. Bei der Berechnung der numerischen Ergebnisse werden die relativistische Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit sowie die Tscherenkow-Beziehung beibehalten.

1.1. Konstruktion der Wellenfront

Wir schreiben die Lichtgeschwindigkeit im Medium als

$$u = \frac{c}{n}.$$

Das Teilchen passiere C zum Zeitpunkt t_C . Zum Zeitpunkt t_1 hat die dort emittierte Welle den Radius

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

während das Teilchen von C nach B die Strecke

$$CB = v(t_1 - t_C)$$

zurückgelegt hat. Folglich ist

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

unabhängig von C.

In jeder Ebene, die AB enthält, erscheinen die Kugelwellen als Kreise. Ihre Radien sind proportional zu den Abständen ihrer Mittelpunkte von B. Daher besitzen sie dieselben zwei Tangenten durch B. Durch Rotation dieser Tangenten um AB entsteht ein gerader Kreiskegel mit der Spitze B, der sich nach hinten öffnet.

Die geforderte Skizze wird folgendermaßen konstruiert:

1. Zeichnen Sie AB waagrecht, mit B rechts und $AB = vt_1$.
2. Zeichnen Sie den größten Wellenkreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius ut_1 .
3. Zeichnen Sie kleinere Wellenkreise mit Mittelpunkten an dazwischenliegenden Punkten C und den Radien $u(t_1 - t_C)$.
4. Zeichnen Sie die obere und die untere gemeinsame Tangente von B an diese Kreise. Markieren Sie einen Berührungspunkt T auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt A und zeichnen Sie $AT \perp BT$.

Für das endliche Emissionsintervall A–B erstreckt sich der kegelförmige Teil von B bis zum Berührungskreis auf der ersten Kugel. Wird die gesamte äußere Begrenzung des von den Wellen erfassten Bereichs dargestellt, so ist ihr hinterer Teil die freiliegende Kugelkalotte mit dem Mittelpunkt A.

1.2. Wellenfrontwinkel und Tscherenkow-Winkel

Im rechtwinkligen Dreieck ATB gilt

$$AT = \frac{c}{n}t_1, \quad AB = vt_1.$$

Der spitze Winkel zwischen der Tangente BT und der Bahngeraden ist φ , also

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

Somit gilt

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

Die Lichtstrahlen stehen senkrecht auf der Wellenfront. Daher erfüllt der Winkel θ zwischen einem Strahl und der Vorwärtsrichtung des Teilchens die Beziehung

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

und somit

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

Damit ist Gleichung (1) hergeleitet.

2. Entstehung, Mittelpunkt und Radius des Rings

Hier bezeichnet C den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Da der Spiegel kugelförmig ist, gilt

$$SC = 2f.$$

Sei F der Mittelpunkt der Strecke SC; die paraxiale Brennebene steht in F senkrecht auf SC.

Betrachten wir zunächst einen Referenzlichtstrahl, der sich entlang der Teilchenstrahlrichtung IS ausbreitet und in S auf den Spiegel trifft. Die Normale auf den Spiegel in S ist SC. Nach dem Reflexionsgesetz bildet der reflektierte Strahl SO mit SC denselben Winkel α wie SI, jedoch auf der gegenüberliegenden Seite.

Sein Schnittpunkt O mit der Brennebene erfüllt daher

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

Da $CF = SF = f$, ergibt dieselbe Konstruktion

$$CO \parallel IS.$$

Nun wählen wir einen festen Azimut um die Teilchenbahn. Alle unter diesem Azimut emittierten Tscherenkow-Strahlen haben dieselbe Richtung, auch wenn sie an verschiedenen Punkten der Bahn emittiert werden. Sie bilden ein paralleles Bündel, das der Spiegel auf einen Punkt in seiner Brennebene fokussiert.

Eine Änderung des Azimuts lässt die Strahlrichtung auf einem Kegel mit dem halben Öffnungswinkel θ umlaufen. Ein paraxialer Spiegel wandelt eine Winkelabweichung in eine Verschiebung in der Brennebene um, die gleich f mal diesem Winkel ist. Somit haben die Bildpunkte relativ zu O Koordinaten der Form

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

wobei ψ der Azimut ist. Daher gilt

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

was einen Kreis beschreibt:

$$\boxed{r = f\theta.}$$

Zeichnen Sie für die Skizze S rechts, C links davon und F in der Mitte zwischen beiden. Platzieren Sie I oberhalb von SC. Der Referenzstrahl wird in S zu O unterhalb von SC reflektiert. Zeichnen Sie die Brennebene durch F und markieren Sie die beiden Schnittpunkte des Rings mit der Ebene ISC bei den vorzeichenbehafteten Abständen

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta$$

von F, wobei die Seite in Richtung I als positiv gilt. Diese Punkte haben den Abstand $2f\theta$ voneinander und den Mittelpunkt O. Die entsprechenden Punkte für alle Azimute bilden den Ring.

3.1. Schwellendrücke

Für relativistische Energie und relativistischen Impuls gilt

$$E^2 = p^2c^2 + M^2c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

Zweckmäßigerweise definieren wir

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

Die Tscherenkow-Bedingung lautet

$$n\beta > 1.$$

An der Schwelle gilt

$$n_{\min} = q.$$

Mit $n = 1 + aP$ folgt

$$\boxed{P_{\min} = \frac{q - 1}{a} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

Mit den angegebenen Massen und $p = 10.0 \text{ GeV}/c$:

Teilchen	β	$P_{\min}$
Proton	0.995611	16.3 atm
Kaon	0.998752	4.63 atm
Pion	0.999902	0.363 atm

Bei Gleichheit ist der Tscherenkow-Winkel null; ein Ring mit von null verschiedenem Radius erfordert einen Druck oberhalb der Schwelle.

3.2. Druck für einen Kaonenring mit dem halben Pionenradius

Da $r = f\theta$, ergibt das geforderte Radienverhältnis

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}$$

innerhalb der angegebenen optischen Genauigkeit.

Für jede Teilchensorte gilt

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p} \right)^2}.$$

Mit der Doppelwinkelformel folgt

$$\frac{q_{\pi}}{n} = \cos(2\theta_{\kappa}) = 2\left(\frac{q_{\kappa}}{n}\right)^2 - 1.$$

Somit gilt

$$n^2 + q_{\pi}n - 2q_{\kappa}^2 = 0.$$

Die positive Lösung lautet

$$n_* = \frac{\sqrt{q_{\pi}^2 + 8q_{\kappa}^2} - q_{\pi}}{2}.$$

Numerisch ist

$$q_{\kappa} = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_{\pi} = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

woraus sich

$$n_* \simeq 1.00163306$$

ergibt. Daher gilt

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

Die entsprechenden Winkel sind

$$\theta_{\kappa} = \arccos \frac{q_{\kappa}}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_{\pi} = \arccos \frac{q_{\pi}}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

Somit gilt

$$\theta_{\kappa} \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

Die Protonenschwelle liegt bei 16.3 atm, deutlich oberhalb dieses Drucks. Somit gilt

Es entsteht kein Protonenring.

4.1. Winkelverbreiterung durch Impulsstreuung

Bei festem Druck ist n konstant. Wir differenzieren

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

Da

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

erhalten wir

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

Mit $q = 1/\beta$ und $q/n = \cos \theta$ lässt sich dies auch schreiben als

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

Für eine schmale Impulsverteilung ist die Umrechnung lokal linear, sodass

$$\Delta \theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

Die Ableitung ist positiv: Mit zunehmendem Impuls nimmt der Tscherenkow-Winkel zu.

Die Auswertung bei $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ und dem Druck aus 3.2 ergibt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\kappa} &\simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \\ \left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} &\simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{\Delta \theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\frac{\Delta \theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. Größte zulässige halbe Impulsbreite

Die geforderte Trennbedingung lautet

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta \theta_{\kappa} + \Delta \theta_{\pi}).$$

Einsetzen der linearen Beziehungen für die Verbreiterung ergibt

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

Mit den ungerundeten Werten folgt

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

Somit gilt

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

Dies entspricht ungefähr 3.0% des zentralen Impulses. Da die Aufgabe eine strenge Ungleichung vorgibt, lassen sich die Ringe gut unterscheiden, wenn

$$\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.$$

5.1. Schwelle der kinetischen Energie in Wasser

Die relativistische kinetische Energie ist

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

An der Tscherenkow-Schwelle gilt

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

Daher ist

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

und

$$T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

Für Wasser gilt

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\text{min}} \simeq 1.51676,$$

also

$$T_{\text{min}} \simeq 0.5168 \text{ MeV}.$$

Eine von null verschiedene Strahlung erfordert eine kinetische Energie oberhalb dieser Schwelle.

5.2. Alphateilchen und Elektronen

Für ein Alphateilchen gilt

$$T_{\text{min},\alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

Für ein Elektron gilt

$$T_{\text{min},e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

Ein Alphateilchen mit einer kinetischen Energie von nur wenigen MeV liegt weit unter seiner Schwelle von ungefähr 1960 MeV. Elektronen mit Energien von einigen MeV können ihre Schwelle ohne Weiteres überschreiten. Folglich gilt

Die beobachtete Tscherenkow-Strahlung wird von Elektronen erzeugt.

6.1. Winkeldifferenz über das sichtbare Spektrum

Bei $P = 6 \text{ atm}$ gilt

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

Der Betrag der Abnahme des Brechungsindex über den sichtbaren Bereich ist

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

Für Pionen mit $10.0 \text{ GeV}/c$ ist der repräsentative Tscherenkow-Winkel

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad}.$$

Bei fester Teilchengeschwindigkeit ergibt die Differentiation von

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

nach n

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}}.$$

In erster Ordnung in der Änderung des Brechungsindex gilt

$$\delta\theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

Damit folgt

$$\boxed{\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.}$$

Die kürzere Wellenlänge hat den größeren Brechungsindex und daher den größeren Winkel:

$$\theta(0.4 \mu\text{m}) > \theta(0.8 \mu\text{m}).$$

6.2.1. Verbreiterung durch Dispersion und Impulsstreuung

Die Dispersionsverbreiterung ist die gesamte Winkelspanne zwischen den beiden Enden des sichtbaren Bereichs:

$$\boxed{w_{\text{disp}} = \delta\theta \simeq 0.59 \text{ mrad}.}$$

Die entsprechende radiale Spanne beträgt

$$\boxed{w_{r,\text{disp}} = f\delta\theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.}$$

Für die Impulsstreuung verwenden wir die Ableitung aus 4.1, nun ausgewertet bei 6 atm :

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_\pi^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

Mit $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ gilt

$$\Delta\theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

Daher ist

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}$$

die **halbe Breite bei halber Höhe**, während

$$w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}$$

die **volle Breite bei halbem Maximum** ist.

Die entsprechende radiale halbe Breite und FWHM betragen

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,\text{FWHM}} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

Die durch Dispersion verursachte Spanne des sichtbaren Spektrums ist etwa 2.8-mal so groß wie die durch den Impuls verursachte FWHM. Die Dispersion liefert daher den größeren Beitrag zur Verbreiterung. Ohne Angabe des Impulsprofils und der spektralen Gewichtung lässt sich keine eindeutige kombinierte FWHM berechnen.

6.2.2. Farbreihenfolge über den Ring

Da

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

gilt

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

Wegen $r = f\theta$ folgt

$$\frac{dr}{d\lambda} < 0.$$

Längere Wellenlängen erzeugen daher kleinere Radien. Die richtige Farbauswahl lautet:

- **Innerer Rand:** rot, entsprechend den längeren Wellenlängen.
- **Nach außen hin:** zunehmend kürzere dominierende Wellenlängen, wobei benachbarte Farben einander überlagern.
- **Äußerer Rand:** blau/violett, entsprechend den kürzesten Wellenlängen.

Die Impulsstreuung verwischt diese Reihenfolge, aber ihre charakteristische Breite ist kleiner als die chromatische Spanne, sodass das Muster mit Rot innen und Violett außen erhalten bleibt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Änderung der Lufttemperatur mit der Höhe, atmosphärische Stabilität und Luftverschmutzung

Vertikale Luftbewegungen bestimmen viele atmosphärische Prozesse, beispielsweise die Bildung von Wolken und Niederschlag sowie die Ausbreitung von Luftschadstoffen. Ist die Atmosphäre *stabil*, sind vertikale Bewegungen eingeschränkt, und Luftschadstoffe sammeln sich eher in der Nähe des Emissionsortes an, als sich auszubreiten und verdünnt zu werden. In einer *instabilen*

Atmosphäre hingegen fördern vertikale Luftbewegungen die vertikale Ausbreitung von Luftschadstoffen. Daher hängen die Schadstoffkonzentrationen nicht nur von der Stärke der Emissionsquellen, sondern auch von der *Stabilität* der Atmosphäre ab.

Wir werden die atmosphärische Stabilität mithilfe des meteorologischen Konzepts des *Luftpakets* bestimmen und die Temperatur eines adiabatisch in der Atmosphäre aufsteigenden oder absinkenden Luftpakets mit der Temperatur der Umgebungsluft vergleichen. Wir werden sehen, dass ein Luftpaket, das Luftschadstoffe enthält und vom Boden aufsteigt, in vielen Fällen in einer bestimmten Höhe zur Ruhe kommt, die als *Mischungshöhe* bezeichnet wird. Je größer die Mischungshöhe ist, desto geringer ist die Luftschadstoffkonzentration. Wir werden die Mischungshöhe und die Konzentration des von Motorrädern im Großraum Hanoi ausgestoßenen Kohlenmonoxids für ein Szenario während des morgendlichen Berufsverkehrs berechnen, bei dem die vertikale Durchmischung durch eine Temperaturinversion (die Lufttemperatur nimmt mit der Höhe zu) oberhalb von 119 m eingeschränkt ist.

Wir betrachten Luft als ideales zweiatomiges Gas mit der molaren Masse $\mu = 29 \text{ g/mol}$.

Quasistatische adiabatische Zustandsänderungen gehorchen der Gleichung $pV^\gamma = \text{const}$, wobei $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ das Verhältnis der isobaren zur isochoren Wärmekapazität des Gases ist.

Bei Bedarf können die folgenden Daten verwendet werden:

Die universelle Gaskonstante ist $R = 8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$.

Der Luftdruck am Boden ist $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Die Erdbeschleunigung ist konstant, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Die molare isobare Wärmekapazität der Luft ist $c_p = \frac{7}{2}R$.

Die molare isochore Wärmekapazität der Luft ist $c_V = \frac{5}{2}R$.

Mathematische Hinweise

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. Die Lösung der Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (mit konstanten A und B) lautet

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

wobei $x_1(t)$ die Lösung der Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ ist.

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. Änderung des Drucks mit der Höhe.

1.1. Nehmen Sie an, dass die Temperatur der Atmosphäre überall gleich T_0 ist. Geben Sie den Ausdruck für den Luftdruck p als Funktion der Höhe z an.

1.2. Nehmen Sie an, dass die Temperatur der Atmosphäre gemäß der Beziehung

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

mit der Höhe variiert, wobei Λ eine Konstante ist, die als *vertikale Temperaturabnahmerate* der Atmosphäre bezeichnet wird (der vertikale Temperaturgradient ist $-\Lambda$).

1.2.1. Geben Sie den Ausdruck für den Luftdruck p als Funktion der Höhe z an.

1.2.2. Ein als freie Konvektion bezeichneter Prozess tritt auf, wenn die Luftdichte mit der Höhe zunimmt. Für welche Werte von Λ tritt freie Konvektion auf?

2. Änderung der Temperatur eines Luftpakets bei vertikaler Bewegung

Betrachten Sie ein Luftpaket, das sich in der Atmosphäre aufwärts und abwärts bewegt. Ein Luftpaket ist ein Luftvolumen mit einer Ausdehnung von mehreren Metern, das groß genug ist, um als eigenständiges thermodynamisches System behandelt zu werden, zugleich aber klein genug, um seine Temperatur als räumlich einheitlich anzusehen. Die vertikale Bewegung eines Luftpakets kann als näherungsweise adiabatischer Prozess behandelt werden, d. h., der Wärmeaustausch mit der Umgebungsluft ist vernachlässigbar. Steigt das Luftpaket in der Atmosphäre auf, dehnt es sich aus und kühlt ab. Bewegt es sich umgekehrt nach unten, komprimiert der zunehmende Außendruck die Luft im Paket, und ihre Temperatur steigt.

Da das Paket nicht groß ist, kann der Luftdruck an verschiedenen Punkten seiner Oberfläche als gleich angesehen werden und mit $p(z)$ bezeichnet werden, wobei z die Höhe des Paketmittelpunkts ist. Die Temperatur im Paket ist räumlich einheitlich und beträgt $T_{\text{parcel}}(z)$; sie unterscheidet sich im Allgemeinen von der Temperatur der Umgebungsluft $T(z)$. In den Teilen 2.1 und 2.2 treffen wir keine Annahme über die Form von $T(z)$.

2.1. Die Änderung der Pakettemperatur T_{parcel} mit der Höhe wird definiert durch

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

Leiten Sie den Ausdruck für $G(T, T_{\text{parcel}})$ her.

2.2. Betrachten Sie einen besonderen Zustand der Atmosphäre, in dem in jeder Höhe z die Temperatur T der Atmosphäre gleich der Pakettemperatur T_{parcel} ist, $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$. Wir bezeichnen den Wert von G für $T = T_{\text{parcel}}$ mit Γ , also

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

(mit $T = T_{\text{parcel}}$). Γ wird als *trockenadiabatische Temperaturabnahmerate* bezeichnet.

2.2.1. Leiten Sie den Ausdruck für Γ her

2.2.2. Berechnen Sie den Zahlenwert von Γ .

2.2.3. Leiten Sie den Ausdruck für die Temperatur der Atmosphäre $T(z)$ als Funktion der Höhe her.

2.3. Nehmen Sie an, dass die Temperatur der Atmosphäre gemäß der Beziehung $T(z) = T(0) - \Lambda z$ von der Höhe abhängt, wobei Λ eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Pakettemperatur $T_{\text{parcel}}(z)$ von der Höhe z .

2.4. Geben Sie den Näherungsausdruck für $T_{\text{parcel}}(z)$ an, wenn $|\Lambda z| \ll T(0)$ und $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$ gelten.

3. Die atmosphärische Stabilität.

In diesem Teil nehmen wir an, dass sich T linear mit der Höhe ändert.

3.1. Betrachten Sie ein Luftpaket, das sich zunächst in der Höhe z_0 im Gleichgewicht mit der Umgebungsluft befindet, d. h., es hat dieselbe Temperatur $T(z_0)$ wie die Umgebungsluft. Wird das Paket geringfügig nach oben oder unten ausgelenkt (z. B. durch atmosphärische Turbulenz), kann einer der folgenden drei Fälle eintreten:

- Das Luftpaket kehrt zur ursprünglichen Höhe z_0 zurück; das Gleichgewicht des Pakets ist stabil. Die Atmosphäre wird als stabil bezeichnet.
- Das Paket bewegt sich weiter in der ursprünglichen Richtung; das Gleichgewicht des Pakets ist instabil. Die Atmosphäre ist instabil.
- Das Luftpaket verbleibt an seiner neuen Position; das Gleichgewicht des Pakets ist indifferent. Die Atmosphäre wird als neutral bezeichnet.

Welche Bedingung muss Λ erfüllen, damit die Atmosphäre stabil, instabil oder neutral ist?

3.2. Die Temperatur eines Pakets am Boden $T_{\text{parcel}}(0)$ ist höher als die Temperatur $T(0)$ der Umgebungsluft. Die Auftriebskraft lässt das Paket aufsteigen. Leiten Sie für eine stabile Atmosphäre den Ausdruck für die maximale Höhe her, die das Paket erreichen kann, in Abhängigkeit von Λ und Γ .

4. Die Mischungshöhe

4.1. Tabelle 1 zeigt Lufttemperaturen, die an einem Novembertag um 7:00 Uhr in Hanoi mit einem Radiosondenballon gemessen wurden. Die Temperaturänderung mit der Höhe lässt sich näherungsweise durch die Formel $T(z) = T(0) - \Lambda z$ beschreiben, mit unterschiedlichen Temperaturabnahmeraten Λ in den drei Schichten $0 < z < 96 \text{ m}$, $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$ und $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$.

Betrachten Sie ein Luftpaket mit der Temperatur $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$, das vom Boden aufsteigt. Berechnen Sie anhand der Daten aus Tabelle 1 und unter Verwendung der obigen linearen Näherung die Temperatur des Pakets in den Höhen 96 m und 119 m.

4.2. Bestimmen Sie die maximale Höhe H , die das Paket erreichen kann, und seine Temperatur $T_{\text{parcel}}(H)$.

H wird als Mischungshöhe bezeichnet. Vom Boden emittierte Luftschadstoffe können sich innerhalb dieser Schicht mit der Luft in der Atmosphäre vermischen (z. B. durch Wind, Turbulenz und Dispersion) und dadurch verdünnt werden.

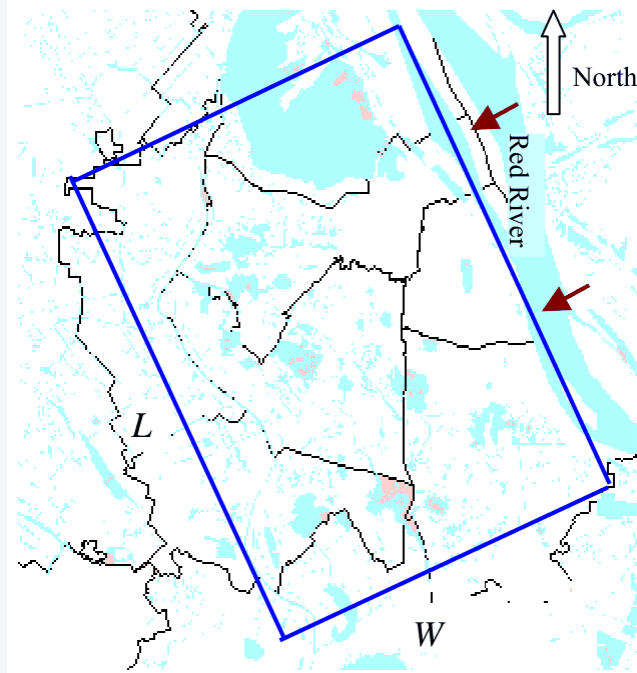
Tabelle 1

Daten, die an einem Novembertag um 7:00 Uhr in Hanoi mit einem Radiosondenballon gemessen wurden.

Höhe, m	Temperatur, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. Abschätzung der Kohlenmonoxidbelastung (CO) während des morgendlichen Berufsverkehrs mit Motorrädern in Hanoi.

Der Großraum Hanoi kann näherungsweise als Rechteck mit den Seitenlängen L und W beschrieben werden, wie in der Abbildung gezeigt, wobei eine Seite entlang des südwestlichen Ufers des Roten Flusses verläuft.



Schätzungen zufolge sind während des morgendlichen Berufsverkehrs von 7:00 bis 8:00 Uhr 8×10^5 Motorräder unterwegs, die jeweils durchschnittlich 5 km zurücklegen und 12 g CO pro Kilometer ausstoßen. Näherungsweise wird angenommen, dass der Schadstoff CO während des Berufsverkehrs zeitlich gleichmäßig mit einer konstanten Rate M emittiert wird. Gleichzeitig weht ein sauberer Nordostwind mit der Geschwindigkeit u senkrecht zum Roten Fluss (d. h. senkrecht zu den Seiten L des Rechtecks), durchquert die Stadt mit derselben Geschwindigkeit und transportiert einen Teil der CO-belasteten Luft aus der Stadtatmosphäre heraus.

Außerdem verwenden wir das folgende grobe Näherungsmodell:

- Das CO verteilt sich rasch im gesamten Volumen der Mischungsschicht über dem Großraum Hanoi, sodass die CO-Konzentration $C(t)$ zum Zeitpunkt t im gesamten Quader mit den Abmessungen L , W und H als räumlich konstant angenommen werden kann.
- Die von der Luvseite in den Quader einströmende Luft ist sauber, und es wird angenommen, dass durch die zum Wind parallelen Seiten kein Schadstoff aus dem Quader verloren geht.
- Vor 7:00 Uhr ist die CO-Konzentration in der Atmosphäre vernachlässigbar.

5.1. Leiten Sie die Differentialgleichung her, die die CO-Schadstoffkonzentration $C(t)$ als Funktion der Zeit bestimmt.

5.2. Geben Sie die Lösung dieser Gleichung für $C(t)$ an.

5.3. Berechnen Sie den Zahlenwert der Konzentration $C(t)$ um 8:00 Uhr.

Gegeben sind $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir schreiben $T_0 = T(0)$, $T_p = T_{\text{parcel}}$ und $T_{p0} = T_p(0)$. Für Temperaturverhältnisse werden die Temperaturen in Kelvin eingesetzt. In Teil 5 ist t die seit 7:00 Uhr verstrichene Zeit.

- 1.1.

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

- 1.2.1. Für $\Lambda \neq 0$ und $T_0 - \Lambda z > 0$ gilt

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / (R\Lambda)}$$

Der Grenzfall $\Lambda = 0$ liefert das Ergebnis aus 1.1.

- 1.2.2. Nach dem in diesem Teil vorgegebenen Kriterium der Dichtezunahme gilt

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.1.

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

- 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

- 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

- 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

- 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

- 2.4. Bis zur ersten Ordnung in der Höhe gilt

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

- 3.1.

$$\begin{aligned} \Lambda < \Gamma &: \text{stabil,} \\ \Lambda > \Gamma &: \text{instabil,} \\ \Lambda = \Gamma &: \text{neutral.} \end{aligned}$$

- **3.2.** In der vorgesehenen Näherung für die Mischungshöhe, unter Vernachlässigung des trägheitsbedingten Überschwingens, gilt

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

Der entsprechende Ausdruck ohne Linearisierung der Pakettemperatur wird in der Lösung angegeben.

- **4.1.**

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

- **4.2.**

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}$$

- **5.1.**

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

- **5.2.** Während des Berufsverkehrs gilt

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W} \right)$$

- **5.3.**

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

Behält man in den Zwischenrechnungen weitere Stellen bei, erhält man 2.24 mg m^{-3} .

Lösung

1.1. Isotherme Atmosphäre

Das hydrostatische Gleichgewicht einer horizontalen Atmosphärenschicht erfordert

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Für Luft als ideales Gas ist die Massendichte

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Für $T = T_0$ gilt somit

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

Die Integration vom Boden, wo $p = p_0$ gilt, bis zur Höhe z ergibt

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

Daher gilt

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. Atmosphäre mit konstanter Temperaturabnahmerate

Mit $T(z) = T_0 - \Lambda z$ lautet die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

Für $\Lambda \neq 0$ ergibt die Integration

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

Damit folgt

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\mu g / (R\Lambda)}.$$

Diese Formel gilt dort, wo die absolute Temperatur positiv bleibt.

Für $\Lambda \rightarrow 0$ gilt

$$\frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{RT_0},$$

womit sich wieder das isotherme Ergebnis ergibt.

1.2.2. Mit der Höhe zunehmende Dichte

Mit $\rho = \mu p / (RT)$ ergibt sich

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

Daher gilt

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R} \right).$$

Da $\rho, T > 0$ gilt, nimmt die Dichte genau dann nach oben zu, wenn

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

sodass die gesuchte Bedingung lautet

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

Dies ist das in dieser Teilaufgabe angegebene Kriterium der Dichteinversion. Das Kriterium für die Instabilität eines adiabatischen Luftpakets in Teil 3 ist weniger einschränkend.

2.1. Temperaturänderung eines adiabatischen Luftpakets

Das Paket enthält eine feste Gasmenge, bleibt im Druckgleichgewicht mit seiner Umgebung und tauscht mit ihr vernachlässigbar wenig Wärme aus. Für das Paket gelten die Adiabatengleichung und die ideale Gasgleichung

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

Durch Eliminieren von V erhält man

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

oder

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

Logarithmisches Differenzieren ergibt

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Der Druckgradient wird durch die umgebende Atmosphäre mit der Temperatur T bestimmt:

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

Folglich gilt

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

Wegen $c_p - c_V = R$ und $\gamma = c_p/c_V$ ist

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

Damit folgt

$$\boxed{G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}}.$$

Der Faktor T_p/T ist von Bedeutung: Die Abkühlungsrate des Pakets ist nicht exakt konstant, wenn seine Temperatur von der Umgebungstemperatur abweicht.

2.2.1. Trockenadiabatische Temperaturabnahmerate

Für $T_p = T$ ist das Temperaturverhältnis im vorherigen Ausdruck gleich eins:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}}.$$

Für das angegebene zweiatomige Gas gilt

$$c_p = \frac{7}{2}R,$$

also

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}}.$$

2.2.2. Zahlenwert

Einsetzen ergibt

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

Daher gilt

$$\boxed{\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}}.$$

2.2.3. Temperaturprofil der Atmosphäre

Unter der besonderen Bedingung $T(z) = T_p(z)$ gilt

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

Da Γ konstant ist, folgt

$$\boxed{T(z) = T(0) - \Gamma z}.$$

2.3. Pakettemperatur in einer Atmosphäre mit konstantem Λ

Aus Teil 2.1 folgt

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

Durch Integration erhält man

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Damit gilt für $\Lambda \neq 0$

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}}.$$

Für $\Lambda = 0$ ist die umgebende Atmosphäre isotherm. Direkte Integration liefert dann

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}}.$$

Für eine Schicht, die in der Höhe z_i beginnt, lässt sich dasselbe Ergebnis schreiben als

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

wodurch aufeinanderfolgende Schichten stetig aneinander angeschlossen werden können.

2.4. Lineare Näherung

Die Entwicklung des Ergebnisses aus Teil 2.3 um $z = 0$ ergibt

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

Bis zur ersten Ordnung gilt

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

Mit $T_{p0} \approx T_0$ folgt

$$\boxed{T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z}.$$

Streng genommen handelt es sich um eine Entwicklung für kleine Höhen. Ist Λ sehr klein, gewährleistet die angegebene Bedingung $|\Lambda z| \ll T_0$ allein keine Linearität; zusätzlich muss $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$ gelten. In Teil 4 sind beide Temperaturänderungen klein gegenüber der absoluten Temperatur.

3.1. Stabilität eines ausgelenkten Luftpakets

Das Paket befinde sich zunächst bei z_0 , mit

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

Es werde um eine kleine vorzeichenbehaftete Strecke ξ nach oben ausgelenkt. In seiner anfänglichen Gleichgewichtslage beträgt sein adiabatischer Temperaturgradient $-\Gamma$, also

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma\xi + O(\xi^2).$$

Die Umgebungstemperatur ist

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda\xi.$$

Der Temperaturüberschuss des Pakets beträgt daher

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

Bei gleichem Druck ist die Dichte umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur. Die nach oben gerichtete Beschleunigung des Pakets infolge von Auftrieb und Schwerkraft ist

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma)\xi.$$

Somit gilt:

- Für $\Lambda < \Gamma$ wirkt die Beschleunigung der Auslenkung entgegen: Die Atmosphäre ist **stabil**.
- Für $\Lambda > \Gamma$ verstärkt die Beschleunigung die Auslenkung: Die Atmosphäre ist **instabil**.
- Für $\Lambda = \Gamma$ behält das Paket dieselbe Temperatur und Dichte wie seine Umgebung: Die Atmosphäre ist **neutral**.

Damit folgt

stabil: $\Lambda < \Gamma$,	instabil: $\Lambda > \Gamma$,	neutral: $\Lambda = \Gamma$.
------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

3.2. Erreichte Höhe eines anfangs wärmeren Luftpakets

In der linearen Näherung gilt

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

Daher ist

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

In einer stabilen Atmosphäre ist $\Gamma - \Lambda > 0$, sodass der anfängliche Temperaturüberschuss des Pakets mit der Höhe abnimmt. Die Höhe des neutralen Auftriebs erhält man, indem man diese Differenz gleich null setzt:

$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}.$
--

Hier folgt die Bezeichnung $z_{\max}$ dem in der Aufgabe vorgesehenen Modell der Mischungshöhe, das trägheitsbedingtes Überschwingen vernachlässigt.

Der Vollständigkeit halber lässt sich die Höhe des neutralen Auftriebs auch ohne die Näherung aus Teil 2.4 bestimmen. Gleichsetzen der exakten Pakettemperatur mit der Temperatur der Atmosphäre ergibt

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

Damit gilt für $\Lambda \neq 0$

$$z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}} \right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)} \right].$$

Für $\Lambda = 0$ ist der Grenzwert

$$z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}.$$

Beide Ausdrücke gehen für $T_{p0} - T_0 \ll T_0$ in das angegebene lineare Ergebnis über.

Eine Einschränkung aus dynamischer Sicht ist erforderlich: Neutraler Auftrieb bedeutet eine Beschleunigung von null, aber nicht notwendigerweise eine Geschwindigkeit von null. Ein frei bewegliches Paket kann über diese Höhe hinausschwingen. Beispielsweise gehorcht ein ungedämpftes, aus der Ruhe freigegebenes Paket in derselben linearen Näherung der Gleichung

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

und sein erster Umkehrpunkt liegt bei $2z_n$. In den folgenden Teilen wird die vorgesehene Mischungshöhe des neutralen Auftriebs verwendet.

4.1. Pakettemperaturen in 96 m und 119 m Höhe

Wir verwenden Geraden durch die gemessenen Endpunkte jeder angegebenen Schicht. Ihre Temperaturabnahmeraten sind

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

und

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

Die Extrapolation der ersten Geraden ergibt eine Bodentemperatur von

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

die nahe an der Anfangstemperatur des Pakets von 22°C liegt. Alle relevanten Temperaturänderungen sind klein gegenüber etwa 294 K, sodass Teil 2.4 anwendbar ist.

Da eine Temperaturdifferenz in Kelvin gleich der entsprechenden Temperaturdifferenz in Grad Celsius ist, gilt

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

Folglich ergibt sich

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

und

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

Mit der Genauigkeit der Temperaturdaten erhält man

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

Zur Kontrolle liefert die getrennte Anwendung der exakten Formel aus Teil 2.3 auf die erste Schicht und die isotherme zweite Schicht 21.059°C beziehungsweise 20.833°C . Gerundet ergeben sich dieselben Antworten.

4.2. Mischungshöhe

Sowohl in 96 m als auch in 119 m Höhe beträgt die Umgebungstemperatur 20.1°C . Das Paket ist in beiden Höhen wärmer und steigt daher weiter in die Inversionsschicht oberhalb von 119 m auf.

Den dortigen positiven Temperaturgradienten schreiben wir als

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

Die Umgebungstemperatur in dieser Schicht ist

$$T(z) = 20.1^\circ\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

In der Mischungshöhe haben Paket und Atmosphäre dieselbe Temperatur:

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

wobei H in Metern und die angegebenen Temperaturen in Grad Celsius einzusetzen sind. Auflösen ergibt

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m}.$$

Diese Höhe liegt wie erforderlich innerhalb der angenommenen Inversionsschicht.

Die Pakettemperatur dort beträgt

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^\circ\text{C}.$$

Daher gilt

$$\boxed{H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ\text{C}}.$$

Verwendet man die exakte Entwicklung der Pakettemperatur durch alle drei Atmosphärenschichten mit linearem Temperaturverlauf, erhält man $H = 143.78 \text{ m}$. Dies bestätigt, dass die lineare Näherung für das Paket ausreichend ist.

5.1. Erhaltungsgleichung für CO

Das gleichmäßig durchmischte Luftvolumen ist

$$V = LWH.$$

Ist $C(t)$ die CO-Massenkonzentration, so beträgt die gesamte CO-Masse im Quader

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

Der Wind durchströmt eine Fläche der Breite L und Höhe H ; sein Volumenstrom beträgt daher

$$Q = uLH.$$

Da die einströmende Luft sauber ist, ist der einströmende CO-Fluss null. Der ausströmende CO-Massenstrom beträgt

$$QC = uLHC.$$

Die Erhaltung der CO-Masse ergibt daher

$$\frac{d}{dt}(LWHC) = M - uLHC.$$

Die Abmessungen des Quaders sind konstant, also

$$\boxed{\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}}, \quad \boxed{C(0) = 0}.$$

5.2. Konzentration als Funktion der Zeit

Eine konstante partikuläre Lösung ist

$$C_{ss} = \frac{M}{uLH}.$$

Die homogene Lösung ist proportional zu $e^{-ut/W}$, also

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

Mit $C(0) = 0$ erhält man

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

Damit folgt

$$\boxed{C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s.}$$

Die Zeitskala der Durchlüftung beträgt W/u . Im Grenzfall ohne Wind geht dieser Ausdruck erwartungsgemäß in $C(t) = Mt/(LWH)$ über.

5.3. CO-Konzentration um 8:00 Uhr

Die während der Stunde insgesamt emittierte CO-Masse beträgt

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg}.$$

Daher gilt

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

Mit

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

beträgt die dimensionslose verstrichene Zeit

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

Damit folgt

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

und man erhält

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

Mit einer den groben Eingangsdaten angemessenen Genauigkeit gilt

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.