

المسألة 1: هاون لدق الأرز يعمل بالطاقة المائية

A. مقدمة

الأرز هو الغذاء الأساسي لمعظم سكان فيتنام. وللحصول على الأرز الأبيض من الأرز غير المقشور، يجب فصل القشرة الخارجية (في عملية تسمى «التقشير») وفصل طبقة النخالة («التبييض»). وتكثر المجاري المائية في المناطق الجبلية بشمال فيتنام، ويستخدم سكانها هاونًا لدق الأرز يعمل بالطاقة المائية لفصل طبقة النخالة. يوضح الشكل 1 أحد هذه الهاوين، ويوضح الشكل 2 كيفية عمله.

B. التصميم والتشغيل

1. التصميم.

يتكون هاون دق الأرز المبين في الشكل 1 من الأجزاء التالية:

الهاون، وهو في الأساس وعاء خشبي للأرز.

الرافعة، وهي جذع شجرة له طرف أكبر وطرف أصغر. ويمكنها الدوران حول محور أفقي. وتثبت مدقة عمودياً على الرافعة عند الطرف الأصغر. ويختار طول المدقة بحيث تلامس الأرز في الهاون عندما تكون الرافعة أفقية. ويجوَّف الطرف الأكبر من الرافعة ليشكل دلوًا. ولشكل الدلو أهمية حاسمة في تشغيل الهاون.

2. نمط التشغيل

للهاون نمطان.

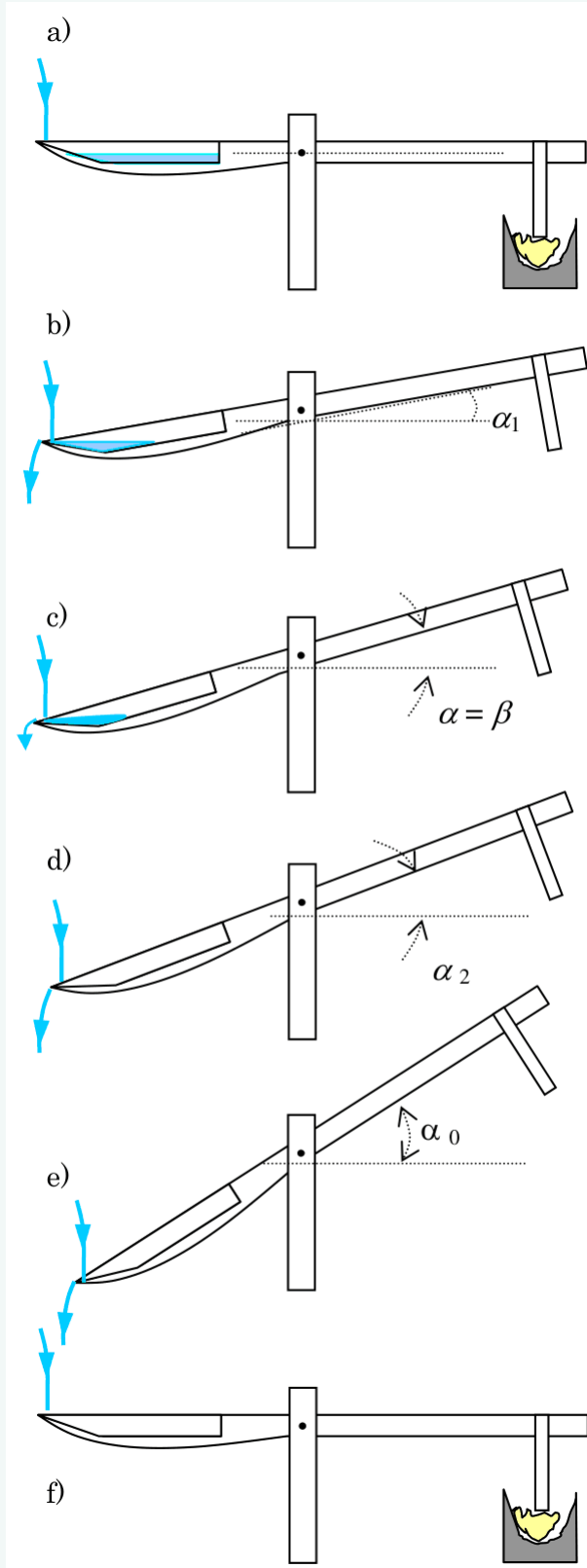
نمط العمل. في هذا النمط، يمر الهاون بدورة تشغيل موضحة في الشكل 2.

تنتج عملية دق الأرز عن الشغل الذي تنقله المدقة إلى الأرز خلال المرحلة (f) من الشكل 2. وإذا لم تلامس المدقة الأرز مطلقاً، لأي سبب، فإننا نقول إن الهاون لا يعمل.

نمط السكون مع بقاء الرافعة مرفوعة. خلال المرحلة (c) من دورة التشغيل (الشكل 2)، تتناقص كمية الماء في الدلو مع ازدياد زاوية الميل α . وفي لحظة معينة، تكون كمية الماء كافية تماماً لموازنة وزن الرافعة. نرسم إلى زاوية الميل في هذه اللحظة بالرمز β . وإذا أُبقيت الرافعة عند الزاوية β وكانت سرعتها الزاوية الابتدائية صفراً، فإنها ستبقى في هذا الموضع إلى الأبد. وهذا هو نمط السكون مع بقاء الرافعة مرفوعة. ويتوقف استقرار هذا الموضع على معدل تدفق الماء إلى الدلو، Φ . فإذا تجاوز Φ قيمة معينة Φ_2 ، كان نمط السكون هذا مستقرًا، ولم يعد بإمكان الهاون أن يكون في نمط العمل. بعبارة أخرى، Φ_2 هو أدنى معدل تدفق يجعل الهاون لا يعمل.



الشكل 1
هاون لبق الأرز يعمل بالطاقة المائية



الشكل 2

(a) في البداية، لا يوجد ماء في الدلو، وتستقر المدقة على الهاون. يتدفق الماء إلى الدلو بمعدل صغير، لكن الرافعة تبقى في الوضع الأفقي لبعض الوقت.

(b) في لحظة ما، تصبح كمية الماء كافية لرفع الرافعة. وبسبب الميل، يندفع الماء إلى الجانب الأبعد من الدلو، مما يزيد ميل الرافعة بسرعة أكبر.

يبدأ الماء بالخروج عند $\alpha = \alpha_1$.

(c) مع ازدياد الزاوية α ، يبدأ الماء بالخروج. وعند زاوية ميل معينة، $\alpha = \beta$ ، يكون عزم الدوران الكلي صفراً.

(d) تستمر α في الازدياد، ويستمر الماء في الخروج حتى يفرغ الدلو تماماً.

(e) تستمر α في الازدياد بفعل القصور الذاتي. وبسبب شكل الدلو، يسقط الماء فيه لكنه يخرج منه فوراً. وتستمر حركة الرافعة بفعل القصور الذاتي حتى تبلغ α قيمتها العظمى α_0 .

(f) عندما يخلو الدلو من الماء، يعيد وزن الرافعة سحبها إلى وضعها الأفقي الابتدائي. وتوجّه المدقة ضربة إلى الهاون (الذي يحتوي على الأرز)، وتبدأ دورة جديدة.

C. المسألة

لنعتبر هاوياً لدق الأرز يعمل بالطاقة المائية، وله المعطيات التالية (الشكل 3)

كتلة الرافعة (بما فيها المدقة، ومن دون الماء) هي $M = 30 \text{ kg}$ ،

مركز كتلة الرافعة هو G. وتدور الرافعة حول المحور T (الذي يُسقط على النقطة T في الشكل).

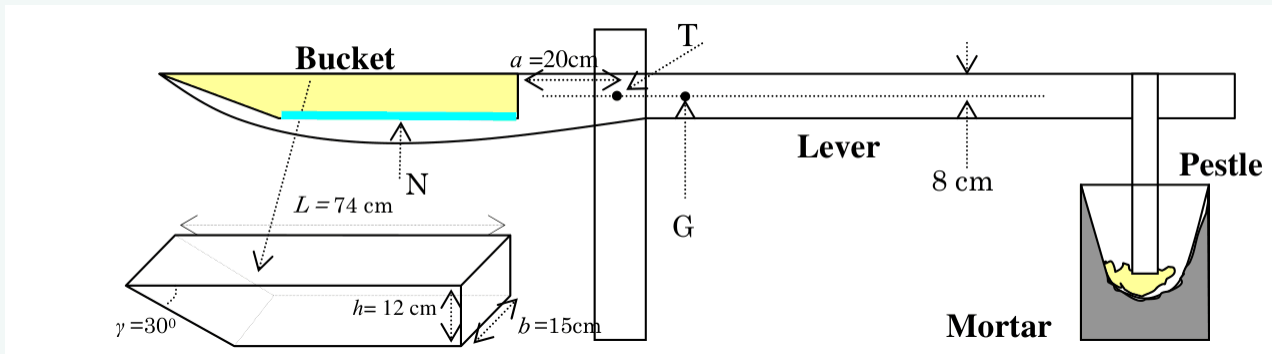
عزم قصور الرافعة حول T هو $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

عندما يوجد ماء في الدلو، نرمز إلى كتلته بالرمز m ، وإلى مركز كتلة جسم الماء بالرمز N.

زاوية ميل الرافعة بالنسبة إلى المحور الأفقي هي α .

الأبعاد الطولية الرئيسية للهاون والدلو هي كما في الشكل 3.

أهمّل الاحتكاك عند محور الدوران والقوة الناتجة عن سقوط الماء على الدلو. وفي هذه المسألة، نستخدم تقريباً مفاده أن سطح الماء أفقي دائماً.



الشكل 3 تصميم هاون دق الأرز وأبعاده

1. بنية الهاون

في البداية، يكون الدلو فارغاً والرافعة أفقية. ثم يتدفق الماء إلى الدلو حتى تبدأ الرافعة بالدوران. وتكون كمية الماء في الدلو عند هذه اللحظة $m = 1.0 \text{ kg}$.

1.1. حدّد المسافة من مركز كتلة الرافعة G إلى محور الدوران T. ومن المعلوم أن GT أفقي عندما يكون الدلو فارغاً.

1.2. يبدأ الماء بالخروج من الدلو عندما تبلغ الزاوية بين الرافعة والمحور الأفقي α_1 . ويفرغ الدلو تماماً عندما تكون هذه الزاوية α_2 . حدّد α_1 و α_2 .

1.3. لتكن $\mu(\alpha)$ عزم الدوران الكلي (بالنسبة إلى المحور T) الناتج عن وزن الرافعة والماء في الدلو. تتعدم $\mu(\alpha)$ عندما $\alpha = \beta$. حدّد β وكتلة الماء m_1 في الدلو عند هذه اللحظة.

2. معلومات نمط العمل

لنفترض أن الماء يتدفق إلى الدلو بمعدل تدفق Φ ثابت وصغير. وتكون كمية الماء الداخلة إلى الدلو أثناء حركة الرافعة مهمة. أهمل في هذا الجزء تغيير عزم القصور خلال دورة العمل.

2.1. ارسم رسمًا تقريبيًا لعزم الدوران μ بدلالة الزاوية α ، أي $\mu(\alpha)$ ، خلال دورة تشغيل واحدة. اكتب صراحة قيم $\mu(\alpha)$ عند الزوايا α_1 و α_2 و $\alpha = 0$.

2.2. انطلاقًا من الرسم البياني الذي حصلت عليه في البند 2.1، ناقش قيمة الطاقة الكلية W_{total} التي ينتجها $\mu(\alpha)$ ، والشغل W_{pounding} الذي تنقله المدقة إلى الأرز، وقدم تفسيرًا هندسيًا لهما.

2.3. انطلاقًا من الرسم الذي يمثل μ بدلالة α ، قدر α_0 و W_{pounding} (افترض أن الطاقة الحركية للماء الداخل إلى الدلو والخارج منه مهمة). يمكنك استبدال الخطوط المنحنية بخطوط منكسرة إذا كان ذلك يسهل الحساب.

3. نمط السكون

لنفترض أن الماء يتدفق إلى الدلو بمعدل ثابت Φ ، لكن لا يمكن إهمال كمية الماء الداخلة إلى الدلو أثناء حركة الرافعة.

3.1. بافتراض أن الدلو يفيض بالماء دائمًا،

3.1.1. ارسم رسمًا تقريبيًا لعزم الدوران μ بدلالة الزاوية α في جوار $\alpha = \beta$. إلى أي نوع من الاتزان ينتمي موضع الرافعة $\alpha = \beta$ ؟

3.1.2. أوجد الصيغة التحليلية لعزم الدوران $\mu(\alpha)$ بدلالة $\Delta\alpha$ عندما $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ، وتكون $\Delta\alpha$ صغيرة.

3.1.3. اكتب معادلة حركة الرافعة التي تتحرك بسرعة ابتدائية منعدمة من الموضع $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ (حيث $\Delta\alpha$ صغيرة). بين أن الحركة اهتزاز توافقية بدقة جيدة. احسب الزمن الدوري τ .

3.2. عند قيمة معينة Φ ، لا يبقى الدلو فائضًا بالماء في جميع الأوقات إلا إذا تحركت الرافعة ببطء كافٍ. وهناك حد أعلى لسعة الاهتزاز التوافقي يعتمد على Φ . حدد أدنى قيمة Φ_1 لـ Φ (بوحدة kg/s) بحيث تستطيع الرافعة أداء حركة مهتز توافقية بسعة 1° .

3.3. افترض أن Φ كبير بما يكفي ليظل الدلو فائضًا بالماء طوال الحركة الحرة للرافعة عندما تتناقص زاوية الميل من α_2 إلى α_1 . لكن إذا كان Φ كبيرًا جدًا، فلن يتمكن الهاون من العمل. بافتراض أن حركة الرافعة هي حركة مهتز توافقية، قدر أدنى معدل تدفق Φ_2 يجعل هاون دق الأرز لا يعمل.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

يدل عزم الدوران الموجب على ازدياد α . تستخدم النتائج العددية $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ و $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

• 1.1. $GT = 1.57 \text{ cm}$.

• 1.2. $\alpha_1 = 20.62^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

• 1.3. $\beta = 23.57^\circ$, $m_1 = 0.605 \text{ kg}$.

• 2.1. في شوط الصعود،

$\mu(0) = 0$, $\mu(\alpha_1) = +2.69 \text{ N m}$, $\mu(\alpha_2) = -4.00 \text{ N m}$.

فرع العودة والدلو فارغ هو $\mu = -4.62 \cos \alpha \text{ N m}$ ، وينتهي عند -4.62 N m . ويصل الماء عند $\alpha = 0$ هذه القيمة بالصف.

• 2.2. يمثل $W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha$ المساحة المحصورة داخل الدورة. وشغل الدق هو

$W_{\text{pounding}} = Mg(GT) \sin \alpha_0$,

ويساوي W_{total} عند إهمال الطاقة الحركية التي يحملها الماء بعيدًا.

$$\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}. \quad \bullet \text{ 2.3}$$

• 3.1.1. أتران مستقر؛ يعبر عزم الدوران الصفر بميل سالب عند β .

• 3.1.2. عندما تكون $\Delta\alpha$ بالراديان،

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) \approx -(45.9 \text{ N m rad}^{-1})\Delta\alpha.$$

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(2\pi t/\tau), \quad \text{حيث } \tau \approx 3.26 \text{ s}. \quad \bullet \text{ 3.1.3}$$

$$\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}. \quad \bullet \text{ 3.2}$$

• 3.3. باستخدام السعة الحدية 2.95° ، $\beta - \alpha_1 \approx 2.95^\circ$.

$$\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}.$$

موضع الاتزان هو β ؛ أما α_1 فهي نقطة الانقلاب السفلى المستخدمة في هذا التقدير.

الحل

نكتب $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ لكتلة الماء التي تبدأ الحركة، و $r = GT$ من الشكل 3،

$$a = 0.20 \text{ m}, \quad L = 0.74 \text{ m}, \quad h = 0.12 \text{ m}, \quad b = 0.15 \text{ m}, \quad \gamma = 30^\circ.$$

يقع محور الارتكاز على مسافة $d = 0.08 \text{ m}$ أسفل الحافة العلوية للدلو. ونستخدم القيمتين القياسيتين $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ و $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ اللتين لم تُحدداً في نص المسألة.

من الاختصارات المفيدة

$$q = \cot \gamma = \sqrt{3}, \quad R = a + L = 0.94 \text{ m}, \quad C = \frac{\rho b h^2}{2} = 1.08 \text{ kg}.$$

1.1. موضع مركز كتلة الرافعة

طول القاع المستوي للدلو هو

$$\ell = L - h \cot \gamma = 0.532154 \text{ m}.$$

لتكن η عمق الماء الابتدائي فوق هذا القاع. المقطع الطولي للماء شبه منحرف، ولذلك

$$\frac{m_0}{\rho b} = \ell \eta + \frac{1}{2} q \eta^2.$$

وعليه،

$$\eta = \frac{\sqrt{\ell^2 + 2q m_0/(\rho b)} - \ell}{q} = 0.0122822 \text{ m}.$$

نقيس u على امتداد الدلو من جداره الرأسي الداخلي باتجاه الحافة الخارجية. يمتد شريط أفقي على ارتفاع y فوق القاع من $u = 0$ إلى $u = \ell + qy$. ومن ثم نحصل من مركزه الهندسي على

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\eta (\ell + qy)^2 dy}{\int_0^\eta (\ell + qy) dy}.$$

وبكتابة $w = \ell + q\eta$ ، تصبح هذه العلاقة

$$\bar{u} = \frac{\ell^2 + \ell w + w^2}{3(\ell + w)} = 0.271430 \text{ m}.$$

في اللحظة التي تفقد فيها المدقة تماسها مع الأرض، تنعدم قوة رد الفعل التي تسدها. ويتوازن عزمها الثقلي:

$$Mgr = m_0 g(a + \bar{u}).$$

إذن

$$r = \frac{m_0}{M}(a + \bar{u}) = 0.0157143 \text{ m} = 1.57 \text{ cm}.$$

نعرف مقياس عزم الدوران المقابل

$$K = Mgr = 4.6200 \text{ N m}.$$

1.2. بداية الانسكاب ونهايته

نستخدم إحداثيات ثابتة بالنسبة إلى الدلو:

- يمتد s نحو الداخل على طول الحافة العلوية انطلاقاً من الحافة الخارجية:
- يقيس z العمق تحت تلك الحافة.

معادلة الطرف المائل هي $z = s \tan \gamma$ ، ومعادلة القاع المستوي هي $z = h$ ، وإحداثيات محور الارتكاز هي (R, d) .

عندما يصل الماء إلى الحافة الخارجية، يمر سطحه الأفقي بالنقطة $(0, 0)$. وتكون معادلتها في إحداثيات الدلو

$$z = s \tan \alpha.$$

يكون للماء المحتجز حينئذ مقطع طولي مثلث رؤوسه

$$(0, 0), \quad (hq, h), \quad (h \cot \alpha, h).$$

ومن ثم تكون كتلته

$$m(\alpha) = \frac{\rho b h^2}{2} (\cot \alpha - \cot \gamma) = C(\cot \alpha - q). \quad (1)$$

بالنسبة إلى كمية الماء $m_0 = 1.0 \text{ kg}$ ، يبدأ الانسكاب عندما تساوي هذه السعة m_0 :

$$\cot \alpha_1 = q + \frac{m_0}{C} = 2.65798.$$

وعليه

$$\alpha_1 = 20.6176^\circ.$$

ينفد الماء عندما يصبح السطح الحر الأفقي موازياً للطرف المائل:

$$\cot \alpha_2 = \cot \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma = 30^\circ.$$

يتسق هذا الشكل المثلث مع الأبعاد: عند α_1 ، تكون نهايته الداخلية عند $h \cot \alpha_1 = 0.319 \text{ m} < L$.

1.3. زاوية التوازن وكتلة الماء المتبقية

مركز المقطع المثلث للماء عند الفيضان هو

$$s_N = \frac{h}{3}(q + \cot \alpha), \quad z_N = \frac{2h}{3}.$$

وللأبعاد الخاصة المفيدة التالية

$$z_N = \frac{2h}{3} = 0.08 \text{ m} = d.$$

لذلك يقع TN على امتداد الرافعة، ويكون ذراع العزم الأفقي للماء

$$\left[R - \frac{h}{3}(q + \cot \alpha) \right] \cos \alpha.$$

عزم الدوران الكلي أثناء الانسكاب هو

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha \left\{ C(\cot \alpha - q) \left[R - \frac{h}{3}(\cot \alpha + q) \right] - Mr \right\}. \quad (2)$$

نضع $v = \cot \beta - q$. يصبح شرط الاتزان

$$Cv \left[R - \frac{2hq}{3} - \frac{h}{3}v \right] = Mr.$$

الجذر الواقع ضمن المجال الفيزيائي $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ هو

$$v = 0.560329.$$

إذن

$$\beta = \operatorname{arccot}(q + v) = 23.5682^\circ,$$

و

$$m_1 = Cv = 0.605156 \text{ kg}.$$

المسافة التي سنحتاج إليها لاحقاً هي

$$\ell_\beta = TN = R - \frac{h}{3}(q + \cot \beta) = 0.779023 \text{ m}.$$

2.1. عزم الدوران على امتداد دورة العمل

لأي موضع لمركز كتلة الماء (s_N, z_N) ، يكون ذراع العزم الأفقي للماء

$$(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha.$$

وعليه، قبل الانسكاب،

$$\mu_\uparrow(\alpha) = m_0 g [(R - s_N) \cos \alpha + (d - z_N) \sin \alpha] - K \cos \alpha. \quad (3)$$

يكون مقطع الماء في البداية شبه منحرف. ويصبح مثلثاً عندما يتوقف عن ملامسة الجدار الرأسي الداخلي. ويحدث ذلك عند

$$\cot \alpha_c = q + \frac{\rho b \ell^2}{2m_0}, \quad \alpha_c = 2.493^\circ.$$

من أجل $\alpha_c \leq \alpha \leq \alpha_1$ ، نعرّف

$$\delta(\alpha) = \sqrt{\frac{2m_0}{\rho b (\cot \alpha - q)}}.$$

هذا هو ارتفاع المثلث مقيساً عمودياً على قاع الدلو. ومركزه هو

$$s_N = hq + \frac{\delta}{3}(\cot \alpha - 2q), \quad z_N = h - \frac{\delta}{3}.$$

تحدّد هذه العبارات، مع (3)، فرع الصعود قبل الانسكاب. وبين α_1 و α_2 ، نستخدم (2).

بمجرد أن يفرغ الدلو، لا تكون له أي مساهمة في عزم الدوران:

$$\mu_{\text{empty}}(\alpha) = -K \cos \alpha.$$

يمكن رسم المنحنى انطلاقاً من القيم التالية:

α	عزم الدوران في شوط الصعود (N m)	عزم الدوران في العودة والدلو فارغ (N m)
0°	0 عند بدء الارتفاع	-4.620
2.493°	+0.944	-4.616
5°	+1.561	-4.602

α	عزم الدوران في شوط الصعود (N m)	عزم الدوران في العودة والدلو فارغ (N m)
10°	+2.068	-4.550
15°	+2.367	-4.463
$\alpha_1 = 20.618^\circ$	+2.687	-4.324
$\beta = 23.568^\circ$	0	-4.235
$\alpha_2 = 30^\circ$	-4.001	-4.001

تتصف الدورة الكاملة بالخصائص التالية:

1. عند $\alpha = 0$ ، يرفع الماء عزم الثقل من $-K$ إلى الصفر. ويمثل ذلك قطعة رأسية في مخطط عزم الدوران-الزاوية. وتُبقى قوة رد فعل الهاون الرافعة ساكنة خلال هذه المرحلة.
2. أثناء الارتفاع، يزداد عزم الدوران من الصفر إلى قيمته العظمى $+2.687 \text{ N m}$ عند α_1 .
3. يجعل الانسكاب عزم الدوران يتناقص، ويعبر الصفر عند β ، ثم يبلغ -4.001 N m عند α_2 .
4. من α_2 إلى الزاوية العظمى α_0 ، وطوال العودة والدلو فارغ، يتبع عزم الدوران العلاقة $-K \cos \alpha$. ويتطابق منحنيًا الذهاب والعودة هذان عندما $\alpha \geq \alpha_2$.

على وجه الخصوص، تأخذ $\mu(0)$ قيمًا مختلفة في المراحل المختلفة: صفرًا عند بدء الارتفاع، و -4.620 N m عندما يكون الدلو فارغًا.

2.2. الشغل وتفسيره الهندسي

الشغل الدوراني المتناهي الصغر هو

$$dW = \mu d\alpha,$$

حيث تُقاس الزوايا بالراديان.

الشغل الكلي خلال دورة هو

$$W_{\text{total}} = \oint \mu d\alpha = \int_0^{\alpha_0} [\mu_{\uparrow}(\alpha) - \mu_{\downarrow}(\alpha)] d\alpha.$$

يتطابق الفرعان فيما فوق α_2 ، ولذلك

$$W_{\text{total}} = \int_0^{\alpha_2} [\mu_{\uparrow}(\alpha) + K \cos \alpha] d\alpha.$$

هندسيًا، هذه هي المساحة المحصورة بين فرع الصعود، وفرع العودة والدلو فارغ، وقطعة الماء عند $\alpha = 0$.

تبدأ الرافعة ذات الدلو الفارغ عودتها من السكون عند α_0 . ويتحول النقص في طاقة وضعها الثقالية إلى الطاقة الحركية المنقولة عند الاصطدام:

$$W_{\text{pounding}} = \int_{\alpha_0}^0 (-K \cos \alpha) d\alpha = K \sin \alpha_0.$$

وهي المساحة الموجبة بين منحنى العودة والدلو فارغ ومحور الزاوية، من 0 إلى α_0 .

إذا حمل الماء الخارج طاقة حركية بعيدًا، فإن تلك الطاقة تقلل الجزء المنقول إلى الأرض من شغل الدورة. وفي ظل التقريب الوارد في 2.3، الذي يعد هذه الطاقة مهملة،

$$W_{\text{total}} = W_{\text{pounding}}.$$

وبصورة مكافئة، تتلاشى المساحتان الموجبة والسالبة، مع مراعاة الإشارة، على شوط الصعود الكامل، لأن هذا الشوط يبدأ من السكون وينتهي بالسكون:

$$\int_0^{\alpha_0} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha = 0.$$

2.3. الزاوية العظمى وشغل الدق

لتكن

$$E_2 = \int_0^{\alpha_2} \mu_{\uparrow}(\alpha) d\alpha.$$

هذه الطاقة الحركية المتبقية عند خروج آخر كمية من الماء.

بوصل نقاط فرع الصعود الواردة في الجدول بقطع مستقيمة نحصل على

$$E_2 \approx 0.520 \text{ J}.$$

من α_2 إلى α_0 ، تحوّل الرافعة ذات الدلو الفارغ هذه الطاقة إلى طاقة وضع ثقالية:

$$E_2 = K(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_2).$$

إذن يعطي التقريب بخط منكسر

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{0.520}{4.620},$$

ف نحصل على

$$\alpha_0 \approx 37.8^\circ, \quad W_{\text{pounding}} = K \sin \alpha_0 \approx 2.83 \text{ J}.$$

بتكامل فروع عزم الدوران المنحنية بدقة أكبر نحصل على

$$\int_0^{\alpha_1} \mu_{\uparrow} d\alpha = 0.6796 \text{ J}, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_{\uparrow} d\alpha = -0.1779 \text{ J}.$$

وعليه $E_2 = 0.5016 \text{ J}$ ، مما يعطي

$$\boxed{\alpha_0 \approx 37.5^\circ, \quad W_{\text{pounding}} \approx 2.8 \text{ J}}.$$

3.1.1. الاتزان مع الفيضان المستمر

يجعل الفيضان المستمر كتلة الماء دالة في الزاوية تعطى بالعلاقة (1)، في كلا اتجاهي الحركة.

بالقرب من β ، تؤدي زيادة α إلى تقليل كتلة الماء وإنتاج عزم دوران سالب. ويؤدي تقليل α إلى زيادة كتلة الماء المحتجز وإنتاج عزم دوران موجب.

إذن يمر المنحنى بالنقطة $(\beta, 0)$ بميل سالب، و

$$\boxed{\alpha = \beta \text{ موضع اتزان مستقر}}.$$

في النموذج المثالي المذكور، تؤدي الاضطرابات الصغيرة إلى اهتزازات غير مخمّدة.

3.1.2. التقريب الخطي لعزم الدوران

نكتب (2) على الصورة

$$\mu(\alpha) = g \cos \alpha F(\cot \alpha),$$

حيث

$$F(c) = C(c - q) \left[R - \frac{h}{3}(c + q) \right] - Mr.$$

عند الاتزان $F(\cot \beta) = 0$ ، كذلك،

$$\frac{dF}{dc} = C \left(R - \frac{2h}{3}c \right), \quad \frac{d(\cot \alpha)}{d\alpha} = -\csc^2 \alpha.$$

لذلك

$$\mu'(\beta) = -\frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right).$$

نعرف

$$\kappa = \frac{gC \cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(R - \frac{2h}{3} \cot \beta \right) = 45.91 \text{ N m rad}^{-1}.$$

لإزاحة زاوية صغيرة مقيسة بالراديان،

$$\mu(\beta + \Delta\alpha) = -\kappa \Delta\alpha + O((\Delta\alpha)^2).$$

3.1.3. معادلة الحركة والزمن الدوري

إلى الرتبة الأولى، نحسب عزم قصور الماء عند الاتزان. ويتمثيل مساهمته الصغيرة تقريباً بكتلة متمركزة عند مركز كتلته نحصل على

$$J_\beta \approx I + m_1 \ell_\beta^2 = 12 + 0.6052(0.7790)^2 \approx 12.37 \text{ kg m}^2.$$

لا يتجاوز عزم قصور الماء حول مركز كتلته نحو 0.0026 kg m^2 ، ولذلك فإن أخذ امتداده المكاني في الحساب له أثر مهم في الزمن الدوري المذكور.

تُضرب تغيرات عزم القصور في تسارعات أو سرعات صغيرة، فتكون مساهمتها من رتب تتجاوز التقريب الخطي. إذن، بوضع $x = \alpha - \beta$ ،

$$J_\beta \ddot{x} + \kappa x = 0.$$

هذه هي معادلة المهتز التوافقي، حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{J_\beta}} \approx 1.927 \text{ s}^{-1}.$$

من أجل $x(0) = \Delta\alpha$ و $\dot{x}(0) = 0$ ،

$$\alpha(t) = \beta + \Delta\alpha \cos(\omega t).$$

الزمن الدوري هو

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J_\beta}{\kappa}} \approx 3.26 \text{ s}.$$

3.2. التدفق اللازم لسعة 1°

تخضع سعة الدلو عند الفيضان للعلاقة

$$\frac{dm}{d\alpha} = -C \csc^2 \alpha.$$

خلال الجزء الهابط من الاهتزاز، تزداد هذه السعة. وللحفاظ على الفيضان، يجب أن يحقق معدل التدفق الكتلي الداخل

$$\Phi \geq \frac{dm}{dt} = -C \csc^2 \alpha \dot{\alpha}.$$

لاهورزازات صغيرة سعتها A ،

$$\alpha = \beta + A \cos \omega t.$$

إلى الرتبة الأولى،

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C}{\sin^2 \beta} A \omega \sin \omega t.$$

تبلغ هذه الكمية قيمتها العظمى عند المرور نزولاً بموضع الاتزان. لذلك

$$\boxed{\Phi_{\min}(A) = \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega A.} \quad (4)$$

عدديًا،

$$\frac{C}{\sin^2 \beta} = 6.755 \text{ kg rad}^{-1}.$$

من أجل $A = 1^\circ = \pi/180$ راديان،

$$\Phi_1 = 6.755(1.927) \frac{\pi}{180} = 0.227 \text{ kg s}^{-1}.$$

وعليه

$$\boxed{\Phi_1 \approx 0.23 \text{ kg s}^{-1}}.$$

3.3. تقدير عتبة التدفق لتوقف الدق

نستخدم الاهتزاز الحدي للرافعة المرفوعة الذي تقع نقطة انقلابه السفلى عند α_1 . ومركزه هو زاوية الاتزان β ، ولذلك تكون سعته

$$\boxed{A_2 = \beta - \alpha_1 = 2.9506^\circ = 0.051497 \text{ rad}.}$$

يبقى هذا الاهتزاز الحدي فوق الوضع الأفقي، فلا تصل المدقة إلى الأرض.

بتطبيق شرط الفيضان نفسه (4)،

$$\Phi_2 \approx \frac{C}{\sin^2 \beta} \omega (\beta - \alpha_1).$$

وبصورة مكافئة،

$$\Phi_2 \approx \Phi_1 \frac{\beta - \alpha_1}{1^\circ}.$$

إذن

$$\Phi_2 \approx 0.227(2.9506) = 0.670 \text{ kg s}^{-1}.$$

يمكن التحقق من تصحيح السعة المحدودة مع الإبقاء على مسار توافقي. ففي فرعه الهابط،

$$-\dot{\alpha} = \omega \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2},$$

ومن ثم يكون المعدل الدقيق لزيادة السعة

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C\omega}{\sin^2 \alpha} \sqrt{A_2^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

تبلغ قيمته العظمى نحو 0.69 kg s^{-1} ، وهو ما يتسق مع التقدير

$$\boxed{\Phi_2 \approx 0.7 \text{ kg s}^{-1}}.$$

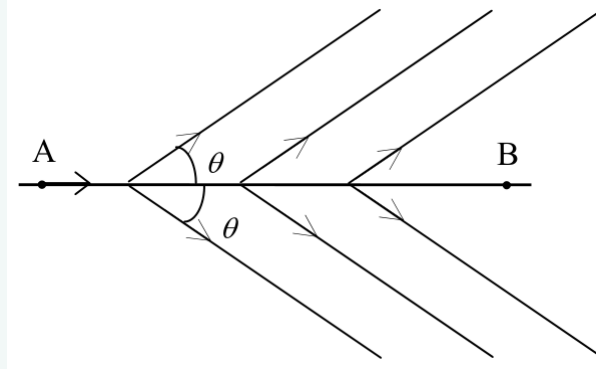
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: ضوء تشيرنكوف وعداد التصوير الحلقي

ينتشر الضوء في الفراغ بسرعة c . ولا يوجد جسيم يتحرك بسرعة أكبر من c . ولكن يمكن لجسيم في وسط شفاف أن يتحرك بسرعة v أكبر من سرعة الضوء في الوسط نفسه $\frac{c}{n}$ ، حيث n معامل انكسار الوسط. وقد أظهرت التجربة (تشيرنكوف، 1934) والنظرية (تام وفرانك، 1937) أن جسيماً مشحوناً يتحرك بسرعة v في وسط شفاف معامل انكساره n ، بحيث $v > \frac{c}{n}$ ، يشع ضوءاً يسمى ضوء تشيرنكوف، في اتجاهات تصنع مع المسار زاوية

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$.



1. لإثبات هذه الحقيقة، اعتبر جسيماً يتحرك بسرعة ثابتة $v > \frac{c}{n}$ على خط مستقيم. يمر بالنقطة A عند الزمن 0 والنقطة B عند الزمن t_1 . وبما أن المسألة متناظرة بالنسبة إلى الدوران حول AB، فيكفي النظر في الأشعة الضوئية الواقعة في مستوى يحتوي على AB.

عند أي نقطة C بين A وB، يصدر الجسيم موجة ضوئية كروية تنتشر بسرعة $\frac{c}{n}$. ونعرف جبهة الموجة عند زمن معين t بأنها السطح المغلف لجميع هذه الكرات عند ذلك الزمن.

1.1. حدّد جبهة الموجة عند الزمن t_1 ، وارسم تقاطعها مع مستوى يحتوي على مسار الجسيم.

1.2. عبّر عن الزاوية φ بين هذا التقاطع ومسار الجسيم بدلالة n و β .

2. لنعتبر حزمة من الجسيمات تتحرك بسرعة $v > \frac{c}{n}$ ، بحيث تكون الزاوية θ صغيرة، على امتداد خط مستقيم IS. تعبر الحزمة مرآة كروية مقعرة بعدها البؤري f ومركزها C، عند النقطة S. يصنع SC مع SI زاوية صغيرة α (انظر الشكل في ورقة الإجابة). وتُنشئ حزمة الجسيمات صورة حلقية في المستوى البؤري للمرآة.

فسّر سبب ذلك مستعيناً برسم تخطيطي يوضحه. وحدّد موضع المركز O ونصف القطر r للصورة الحلقية.

يُستخدم هذا الترتيب في عدّادات تشيرنكوف ذات التصوير الحلقي (RICH)، ويُسمّى الوسط الذي يجتازه الجسيم الوسط المشعّ.

ملاحظة: تُهمل في جميع أسئلة هذه المسألة الحدود من الرتبة الثانية وما فوقها في α و θ .

3. تتكوّن حزمة جسيمات ذات زخم معلوم $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ من ثلاثة أنواع من الجسيمات: البروتونات والكاونات والبيونات، وكتل سكونها هي $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$ و $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ و $M_K = 0.50 \text{ GeV}/c^2$ ، على الترتيب. تذكر أن لكل من pc و Mc^2 بُعد الطاقة، وأن 1 eV هي الطاقة التي يكتسبها إلكترون بعد تسريعه بفرق جهد 1 V، وأن $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ، و $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

تجتاز حزمة الجسيمات وسطاً من الهواء (الوسط المشعّ) تحت الضغط P . ويعتمد معامل انكسار الهواء على ضغطه P وفق العلاقة $aP = n - 1$ ، حيث $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$.

3.1. احسب لكل نوع من أنواع الجسيمات الثلاثة القيمة الدنيا $P_{\min}$ لضغط الهواء التي يصدر عندها ضوء تشيرنكوف.

3.2. احسب الضغط $P_{\frac{1}{2}}$ الذي يكون عنده نصف قطر الصورة الحلقية للكاونات مساوياً لنصف نظيره للبيونات. واحسب قيمتي θ_K و θ_π في هذه الحالة.

هل يمكن رصد الصورة الحلقية للبروتونات عند هذا الضغط؟

4. افترض الآن أن الحزمة ليست أحادية الزخم تماماً: تتوزع زخوم الجسيمات على مجال مركزه $10 \text{ GeV}/c$ ، وله نصف عرض عند نصف الارتفاع مقداره Δp . ويؤدي ذلك إلى اتساع الصورة الحلقية، ويكون لتوزيع θ ، تبعاً لذلك، نصف عرض عند نصف الارتفاع مقداره $\Delta\theta$. ضغط الوسط المشعّ هو $P_{\frac{1}{2}}$ المحدّد في 3.2.

4.1. احسب $\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p}$ و $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ ، وهما القيمتان اللتان تأخذهما $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ في حالتي البيونات والكاونات.

4.2. عندما يكون الفصل بين الصورتين الحلقيتين، $\theta_\pi - \theta_\kappa$ ، أكبر من 10 أمثال مجموع نصفَي العرض $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ ، أي عندما يكون $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$ ، يمكن تمييز الصورتين الحلقيتين جيداً. احسب القيمة القصوى لـ Δp التي تظل عندها الصورتان الحلقيتان قابلتين للتمييز جيداً.

5. اكتشف تشيرنكوف التأثير الذي يحمل اسمه أول مرة أثناء رصده زجاجة ماء بالقرب من مصدر مشعّ. فقد رأى أن الماء في الزجاجة يصدر ضوءاً.

5.1. أوجد الحد الأدنى للطاقة الحركية $T_{\min}$ لجسيم كتلة سكونه M يتحرك في الماء، بحيث يصدر ضوء تشيرنكوف. معامل انكسار الماء هو $n = 1.33$.

5.2. يصدر المصدر المشعّ الذي استخدمه تشيرنكوف إما جسيمات α (أي نوى الهيليوم) ذات كتلة السكون $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$ ، أو جسيمات β (أي الإلكترونات) ذات كتلة السكون $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$. احسب القيم العددية لـ $T_{\min}$ لجسيمات α وجسيمات β .

علماً بأن الطاقة الحركية للجسيمات المنبعثة من المصادر المشعّة لا تتجاوز أبداً بضعة MeV، حدّد أي الجسيمات يولّد الإشعاع الذي رصده تشيرنكوف.

6. أهمل في الأجزاء السابقة من المسألة اعتماد تأثير تشيرنكوف على الطول الموجي λ . نأخذ الآن في الحسبان أن إشعاع تشيرنكوف الصادر عن جسيم له طيف متصل واسع يشمل النطاق المرئي (الأطوال الموجية من $0.4 \mu\text{m}$ إلى $0.8 \mu\text{m}$). ونعلم أيضاً أن معامل الانكسار n للوسط المشعّ يتناقص خطياً بمقدار 2% من $n - 1$ عندما يزداد λ عبر هذا النطاق.

6.1. اعتبر حزمة بيونات ذات زخم محدّد مقداره $10.0 \text{ GeV}/c$ تتحرك في الهواء عند ضغط 6 atm. أوجد الفرق الزاوي $\delta\theta$ الموافق لطرفي النطاق المرئي.

6.2. بناءً على ذلك، ادرس كيفياً تأثير التشتت في الصورة الحلقية لبيونات تتوزع زخمها على مجال مركزه $p = 10 \text{ GeV}/c$ ، وله نصف عرض عند نصف الارتفاع مقداره $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$.

6.2.1. احسب الاتساع الناتج عن التشتت (تغيّر معامل الانكسار)، وذلك الناتج عن عدم أحادية زخم الحزمة (تغيّر الزخم).

6.2.2. صِف كيفية تغيّر لون الحلقة عند الانتقال من حافتها الداخلية إلى حافتها الخارجية بوضع علامات في الخانات المناسبة في ورقة الإجابة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- 1.1.** جبهة الموجة التي تشكّلها المماسات المشتركة هي مخروط دائري قائم رأسه B ومحوره AB، وينفتح إلى الخلف على امتداد المسار. ويتكوّن مقطعه المحوري من قطعتي مماس لتلّقيان عند B. وإذا بدأ الإصدار عند A، فإن الحد الخارجي الكامل يشمل أيضاً القبة الخلفية المكشوفة للموجة الكروية الأولى.
- 1.2.**

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

- 2.** لتكن F منتصف SC. يقع المركز O في المستوى البؤري المار بالنقطة F، وفي المستوى ISC، على الجانب المقابل للنقطة A بالنسبة إلى SC:

$$FO \simeq f\alpha, \quad CO \parallel IS, \quad r \simeq f\theta.$$

ينعكس الشعاع المرجعي الممتد على طول IS عند S على امتداد SO.

• 3.1

$$P_{\min} = \frac{\sqrt{1 + (Mc/p)^2} - 1}{a}.$$

ضغوط العتبة هي

$$P_{\min,p} \simeq 16.3 \text{ atm}, \quad P_{\min,\kappa} \simeq 4.63 \text{ atm}, \quad P_{\min,\pi} \simeq 0.363 \text{ atm}.$$

يتطلب الإصدار غير الصفري ضغطاً أعلى من العتبة.

• 3.2

$$P_{\frac{1}{2}} \simeq 6.05 \text{ atm}, \quad \theta_{\kappa} \simeq 0.0277 \text{ rad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 0.0554 \text{ rad}.$$

لا تنتج البروتونات حلقة عند هذا الضغط.

• 4.1

$$\frac{\Delta\theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}, \quad \frac{\Delta\theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

• 4.2. القيمة الحدية لنصف العرض هي

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

يتطلب معيار الفصل المعطى، القائم على متباينة صارمة، أن يكون $\Delta p < \Delta p_{\text{lim}}$.

• 5.1

$$T_{\min} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) = 0.5168 Mc^2 \quad (n = 1.33).$$

• 5.2

$$T_{\min,\alpha} \simeq 2.0 \text{ GeV}, \quad T_{\min,e} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

تنتج الإشعاع المرصود جسيمات β ، أي الإلكترونات.

• 6.1

$$\delta\theta = \theta(0.4 \mu\text{m}) - \theta(0.8 \mu\text{m}) \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.$$

• 6.2.1. يعطي التشتت امتداداً زاوياً للطف المرئي الكامل يبلغ نحو 0.59 mrad. ويعطي انتشار الزخم

$$\Delta\theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad (نصف العرض)}, \quad 2\Delta\theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad (FWHM)}.$$

تُستخرج العروض الشعاعية المناظرة بضرب هذه العروض الزاوية في f .

• 6.2.2. الحافة الداخلية حمراء والحافة الخارجية زرقاء/بنفسجية. وتتناقص الأطوال الموجية السائدة نحو الخارج؛ ويطمس انتشار الزخم الألوان المتجاورة ويمزجها.

الحل

تُقاس الزوايا بالراديان. وتُعالج هندسة المرآة حتى الرتبة الأولى في الزوايا الصغيرة. ويُحتفظ بعلاقة الزخم بالسرعة في النسبية وبالعلاقة تشيرنكوف عند حساب النتائج العددية.

1.1. إنشاء جبهة الموجة

لنكتب سرعة الضوء في الوسط على الصورة

$$u = \frac{c}{n}.$$

افترض أن الجسيم يمر بالنقطة C عند الزمن t_C . عند الزمن t_1 ، يكون نصف قطر الموجة الصادرة هناك

$$R_C = u(t_1 - t_C),$$

بينما يكون الجسيم قد تحرك من C إلى B قاطعاً المسافة

$$CB = v(t_1 - t_C).$$

ومن ثم،

$$\frac{R_C}{CB} = \frac{u}{v} = \frac{1}{n\beta},$$

بصرف النظر عن C.

في أي مستوى يحتوي على AB، تظهر الموجات الكروية على هيئة دوائر. وتتناسب أنصاف أقطارها مع مسافات مراكزها عن B. ولذلك تشترك في خطّ المماس نفسيهما المارّين بالنقطة B. وينتج عن تدوير هذين المماسّين حول AB مخروط دائري قائم رأسه عند B وينفتح إلى الخلف.

يُنشأ الرسم التخطيطي المطلوب كما يلي:

1. ارسم AB أفقيًا، بحيث تكون B إلى اليمين ويكون $AB = vt_1$.
2. ارسم أكبر دائرة موجية مركزها A ونصف قطرها ut_1 .
3. ارسم دوائر موجية أصغر، مراكزها نقاط وسيطة C وأنصاف أقطارها $u(t_1 - t_C)$.
4. ارسم المماسّين المشتركين العلوي والسفلي من B إلى هذه الدوائر. عيّن نقطة تماس T على الدائرة التي مركزها A، وارسم $AT \perp BT$.

بالنسبة إلى مجال الإصدار المحدود A-B، يمتد الجزء المخروطي من B إلى دائرة التماس على الكرة الأولى. وإذا أُظهر الحد الخارجي الكامل للمنطقة التي وصلها الاضطراب، فإن جزأه الخلفي هو القبة الكروية المكشوفة التي مركزها A.

1.2 زاوية جبهة الموجة وزاوية تشيرنكوف

في المثلث القائم ATB،

$$AT = \frac{c}{n} t_1, \quad AB = vt_1.$$

الزاوية الحادة بين المماس BT وخط المسار هي φ ، ولذلك

$$\sin \varphi = \frac{AT}{AB} = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}.$$

إذن

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{n\beta}.$$

الأشعة الضوئية عمودية على جبهة الموجة. ولذلك تحقق الزاوية θ بين الشعاع واتجاه حركة الجسيم إلى الأمام

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

ومن ثم

$$\cos \theta = \sin \varphi = \frac{1}{n\beta}.$$

وهذا يثبت المعادلة (1).

2. تكون الحلقة ومركزها ونصف قطرها

ترمز C هنا إلى مركز تكوّر المرآة. وبما أن المرآة كروية، فإن

$$SC = 2f.$$

لتكن F منتصف SC؛ يكون المستوى البؤري في التقريب القريب من المحور عمودياً على SC عند F.

لننظر أولاً في شعاع ضوئي مرجعي ينتشر في اتجاه حزمة الجسيمات IS ويصطدم بالمرآة عند S. العمود على المرآة عند S هو SC. ووفقاً لقانون الانعكاس، يصنع الشعاع المنعكس SO مع SC الزاوية نفسها α التي يصنعها SI، على الجانب المقابل.

وبالتالي تحقق نقطة تقاطعه O مع المستوى البؤري

$$FO = f \tan \alpha \simeq f\alpha, \quad SO \simeq f.$$

ولأن $CF = SF = f$ ، فإن الإنشاء نفسه يعطي

$$CO \parallel IS.$$

لنثبت الآن زاوية سمتية حول مسار الجسيم. تكون لجميع أشعة تشيرنكوف الصادرة عند هذه الزاوية السمتية جهة الانتشار نفسها، حتى حين تصدر من نقاط مختلفة على المسار. وهي تشكل حزمة متوازية تركّزها المرآة في نقطة واحدة في مستواها البؤري.

يؤدي تغيير الزاوية السمتية إلى تغيير اتجاه الشعاع حول مخروط نصف زاويته θ . وتحول المرآة، في التقريب القريب من المحور، الإزاحة الزاوية إلى إزاحة في المستوى البؤري تساوي حاصل ضرب f في تلك الزاوية. ومن ثم تكون إحداثيات نقاط الصورة بالنسبة إلى O على الصورة

$$X = f\theta \cos \psi, \quad Y = f\theta \sin \psi,$$

حيث ψ الزاوية السمتية. ولذلك

$$X^2 + Y^2 = f^2\theta^2,$$

وهذه دائرة:

$$\boxed{r = f\theta.}$$

لرسم المخطط، ارسم S إلى اليمين وC إلى يسارها وF في منتصف المسافة بينهما. ضع I فوق SC. ينعكس الشعاع المرجعي عند S نحو O أسفل SC. ارسم المستوى البؤري المار بالنقطة F، وعين نقطتي تقاطع الحلقة مع المستوى ISC عند المسافتين الموجهتين

$$-f\alpha + f\theta, \quad -f\alpha - f\theta$$

من F، مع اعتبار الجانب المتجه نحو I موجباً. تفصل بين هاتين النقطتين مسافة $2f\theta$ ، ومنتصفهما O. وتشكل النقاط المناظرة لجميع الزوايا السمتية الحلقة.

3.1. ضغوط العتبة

تخضع الطاقة والزخم في النسبية للعلاقتين

$$E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4, \quad \beta = \frac{pc}{E}.$$

من الملائم تعريف

$$q = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\frac{Mc}{p}\right)^2}.$$

شرط تشيرنكوف هو

$$n\beta > 1.$$

عند العتبة،

$$n_{\min} = q.$$

وباستخدام $n = 1 + aP$

$$P_{\min} = \frac{q-1}{a} = \frac{\sqrt{1+(Mc/p)^2}-1}{a}.$$

باستخدام الكتل المعطاة و $p = 10.0 \text{ GeV}/c$:

الجسيم	β	$P_{\min}$
البروتون	0.995611	16.3 atm
الكاون	0.998752	4.63 atm
البليون	0.999902	0.363 atm

عند المساواة تكون زاوية تشيرنكوف صفراً؛ ويتطلب تكوّن حلقة ذات نصف قطر غير صفري ضغطاً أعلى من العتبة.

3.2. الضغط الذي يكون عنده نصف قطر حلقة الكاون نصف قطر حلقة البليون

بما أن $r = f\theta$ ، فإن نسبة نصفي القطر المطلوبة تعطي

$$\theta_{\pi} = 2\theta_{\kappa}$$

ضمن الدقة البصرية المذكورة.

لكل نوع،

$$\cos \theta_i = \frac{q_i}{n}, \quad q_i = \sqrt{1 + \left(\frac{M_i c}{p}\right)^2}.$$

وباستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة،

$$\frac{q_{\pi}}{n} = \cos(2\theta_{\kappa}) = 2\left(\frac{q_{\kappa}}{n}\right)^2 - 1.$$

إذن

$$n^2 + q_{\pi}n - 2q_{\kappa}^2 = 0.$$

الجزر الموجب هو

$$n_* = \frac{\sqrt{q_{\pi}^2 + 8q_{\kappa}^2} - q_{\pi}}{2}.$$

عددياً،

$$q_{\kappa} = \sqrt{1 + 0.050^2}, \quad q_{\pi} = \sqrt{1 + 0.014^2},$$

مما يعطي

$$n_* \simeq 1.00163306.$$

ولذلك

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{n_* - 1}{a} \simeq 6.05 \text{ atm.}$$

الزاويتان المناظرتان هما

$$\theta_{\kappa} = \arccos \frac{q_{\kappa}}{n_*} \simeq 0.027685 \text{ rad},$$

$$\theta_{\pi} = \arccos \frac{q_{\pi}}{n_*} \simeq 0.055371 \text{ rad}.$$

ومن ثم

$$\theta_{\kappa} \simeq 27.7 \text{ mrad}, \quad \theta_{\pi} \simeq 55.4 \text{ mrad}.$$

عتبة البروتونات هي 16.3 atm، وهي أعلى بكثير من هذا الضغط. إذن

لا تتكوّن حلقة للبروتونات

4.1. الاتساع الزاوي الناتج عن انتشار الزخم

عند ثبوت الضغط، يكون n ثابتاً. نفاضل

$$\cos \theta = \frac{q}{n}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{M^2 c^2}{p^2}}.$$

وبما أن

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{M^2 c^2}{p^3 q},$$

نحصل على

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{M^2 c^2}{np^3 q \sin \theta}.$$

وباستخدام $q = 1/\beta$ و $q/n = \cos \theta$ ، يمكن كتابة ذلك أيضاً على الصورة

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{1 - \beta^2}{p} \cot \theta.$$

بالنسبة إلى توزيع ضيق للزخم، يكون تحويله خطياً محلياً، ومن ثم

$$\Delta \theta \simeq \left| \frac{d\theta}{dp} \right| \Delta p.$$

المشتقة موجبة: تؤدي زيادة الزخم إلى زيادة زاوية تشتيرنكوف.

بالحساب عند $p = 10.0 \text{ GeV}/c$ والضغط المحسوب في 3.2 نحصل على

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\kappa} \simeq 9.005 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi} \simeq 3.535 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

ولذلك

$$\frac{\Delta \theta_{\kappa}}{\Delta p} \simeq 9.0 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c},$$

$$\frac{\Delta \theta_{\pi}}{\Delta p} \simeq 3.5 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. أكبر نصف عرض مسموح به للزخم

شرط الفصل المطلوب هو

$$\theta_{\pi} - \theta_{\kappa} > 10 (\Delta \theta_{\kappa} + \Delta \theta_{\pi}).$$

بالتعويض بعلاقات الاتساع الخطية نحصل على

$$\Delta p < \frac{\theta_{\pi} - \theta_{\kappa}}{10 [(d\theta/dp)_{\kappa} + (d\theta/dp)_{\pi}]}.$$

باستخدام القيم غير المقرّبة،

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq \frac{0.027685}{10(0.0090052 + 0.00035355)} \text{ GeV}/c.$$

إذن

$$\Delta p_{\text{lim}} \simeq 0.296 \text{ GeV}/c.$$

يساوي ذلك نحو 3.0% من الزخم المركزي. وبما أن المسألة تنص على متباينة صارمة، فإن مجال التمييز الجيد هو

$$\Delta p < 0.296 \text{ GeV}/c.$$

5.1. عتبة الطاقة الحركية في الماء

الطاقة الحركية النسبية هي

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

عند عتبة تشيرنكوف،

$$\beta_{\text{min}} = \frac{1}{n}.$$

ولذلك

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

و

$$T_{\text{min}} = Mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right).$$

بالنسبة إلى الماء،

$$n = 1.33, \quad \gamma_{\text{min}} \simeq 1.51676,$$

ومن ثم

$$T_{\text{min}} \simeq 0.5168 \text{ Mc}^2.$$

يتطلب الإشعاع غير الصفري طاقة حركية أعلى من هذه العتبة.

5.2. جسيمات ألفا والإلكترونات

بالنسبة إلى جسيم ألفا،

$$T_{\text{min},\alpha} = 0.51676(3.8 \text{ GeV}) \simeq 1.96 \text{ GeV} \simeq 2.0 \text{ GeV}.$$

بالنسبة إلى إلكترون،

$$T_{\text{min},e} = 0.51676(0.51 \text{ MeV}) \simeq 0.264 \text{ MeV} \simeq 0.26 \text{ MeV}.$$

يكون جسيم ألفا الذي لا تتجاوز طاقته الحركية بضعة MeV أدنى بكثير من عتبه التي تبلغ نحو 1.960 MeV. أما الإلكترونات ذات الطاقات البالغة بضعة MeV فيمكنها تجاوز عتبتها بسهولة. وبالتالي،

$$\text{المرصود Cherenkov تنتج الإلكترونات إشعاع}$$

6.1. الفرق الزاوي عبر الطيف المرئي

عند $P = 6 \text{ atm}$

$$n = 1 + aP = 1 + (2.7 \times 10^{-4})(6) = 1.00162.$$

مقدار انخفاض معامل الانكسار عبر النطاق المرئي هو

$$\delta n = 0.02(n - 1) = 3.24 \times 10^{-5}.$$

بالنسبة إلى بيونات زخمها $10.0 \text{ GeV}/c$ ، تكون القيمة المثلثة لزاوية تشتيرنكوف

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + (0.14/10.0)^2}}{1.00162} \right) \simeq 0.05513 \text{ rad}.$$

عند ثبوت سرعة الجسيم، تعطي مفاضلة

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

بالنسبة إلى n

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dn} = -\frac{1}{\beta n^2}.$$

ومن ثم

$$\boxed{\frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n}}.$$

حتى الرتبة الأولى في تغيّر معامل الانكسار،

$$\delta \theta \simeq \frac{\cot \theta_0}{n} \delta n \simeq 5.86 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

إذن

$$\boxed{\delta \theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.59 \text{ mrad}.}$$

يوافق الطول الموجي الأقصر معامل انكسار أكبر، وبالتالي زاوية أكبر:

$$\theta(0.4 \mu\text{m}) > \theta(0.8 \mu\text{m}).$$

6.2.1. الاتساع الناتج عن التشتت والاتساع الناتج عن الزخم

الاتساع الناتج عن التشتت هو الامتداد الزاوي الكامل بين طرفي النطاق المرئي:

$$\boxed{w_{\text{disp}} = \delta \theta \simeq 0.59 \text{ mrad}.}$$

والامتداد الشعاعي المناظر هو

$$\boxed{w_{r,\text{disp}} = f \delta \theta \simeq 5.9 \times 10^{-4} f.}$$

بالنسبة إلى انتشار الزخم، نستخدم المشتقة المستخرجة في 4.1، محسوبة الآن عند 6 atm:

$$\left. \frac{d\theta}{dp} \right|_{\pi, 6 \text{ atm}} = \frac{1 - \beta_\pi^2}{p} \cot \theta_0 \simeq 3.55 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{GeV}/c}.$$

مع $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$

$$\Delta \theta_p \simeq (3.55 \times 10^{-4})(0.3) = 1.07 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

ولذلك فإن

$$\boxed{\Delta \theta_p \simeq 0.11 \text{ mrad}}$$

هو نصف العرض عند نصف الارتفاع، بينما

$$\boxed{w_{p,\text{FWHM}} = 2\Delta \theta_p \simeq 0.21 \text{ mrad}}$$

هو العرض الكامل عند نصف القيمة العظمى.

نصف العرض الشعاعي والعرض الكامل عند نصف القيمة العظمى (FWHM) المناظران هما

$$\Delta r_p \simeq 1.1 \times 10^{-4} f, \quad w_{r,p,FWHM} \simeq 2.1 \times 10^{-4} f.$$

يبلغ امتداد الطيف المرئي الناتج عن التشتت نحو 2.8 أمثال العرض الكامل عند نصف القيمة العظمى الناتج عن الزخم. ولذلك يقدم التشتت مقياس الاتساع الأكبر. ولا يمكن حساب قيمة وحيدة للعرض الكامل عند نصف القيمة العظمى الناتج عن التأثيرين معاً دون تحديد شكل توزيع الزخم والترجيح الطيفي.

6.2.2. ترتيب الألوان عبر الحلقة

بما أن

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0, \quad \frac{d\theta}{dn} = \frac{\cot \theta}{n} > 0,$$

فلإن

$$\frac{d\theta}{d\lambda} < 0.$$

وبما أن $r = f\theta$

$$\frac{dr}{d\lambda} < 0.$$

إذن تنتج الأطوال الموجية الأطول أنصاف أقطار أصغر. والاختيار الصحيح للألوان هو:

- الحافة الداخلية: حمراء، وتقابل الأطوال الموجية الأطول.
- عند التحرك نحو الخارج: تتناقص الأطوال الموجية السائدة تدريجياً، مع تداخل الألوان المتجاورة.
- الحافة الخارجية: زرقاء/بنفسجية، وتقابل أقصر الأطوال الموجية.

يطمس انتشار الزخم هذا الترتيب، لكن عرضه المميز أصغر من الامتداد اللوني، ولذلك يبقى النمط الذي يكون فيه الأحمر في الداخل والبنفسجي في الخارج.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: تغير درجة حرارة الهواء مع الارتفاع، واستقرار الغلاف الجوي وتلوث الهواء

تتحكم الحركة الرأسية للهواء في كثير من العمليات الجوية، مثل تكوّن السحب والهطول وانتشار ملوثات الهواء. فإذا كان الغلاف الجوي مستقرًا، كانت الحركة الرأسية محدودة، ومالت ملوثات الهواء إلى التراكم حول موقع انبعاثها بدلاً من الانتشار وانخفاض تركيزها. أما في الغلاف الجوي غير المستقر، فتساعد الحركة الرأسية للهواء على انتشار ملوثات الهواء رأسياً. لذلك، لا تعتمد تراكيز الملوثات على شدة مصادر الانبعاث وحدها، بل تعتمد أيضاً على استقرار الغلاف الجوي.

سنحدد استقرار الغلاف الجوي باستخدام مفهوم *الحزمة الهوائية* في علم الأرصاد الجوية، وبمقارنة درجة حرارة الحزمة الهوائية التي ترتفع أو تهبط أديباتياً في الغلاف الجوي بدرجة حرارة الهواء المحيط بها. وسنرى أن الحزمة الهوائية التي تحتوي على ملوثات الهواء وتصد من سطح الأرض تستقر، في كثير من الحالات، عند ارتفاع معين يسمى *ارتفاع الخلط*. وكلما زاد ارتفاع الخلط، انخفض تركيز ملوثات الهواء. وسنحسب ارتفاع الخلط وتركيز أول أكسيد الكربون المنبعث من الدراجات النارية في منطقة هانوي الحضرية في حالة ساعة الذروة الصباحية، حيث يكون الخلط الرأسي محدوداً بسبب انقلاب حراري (تزداد فيه درجة حرارة الهواء مع الارتفاع) عند ارتفاعات تتجاوز 119 m.

لنعتبر الهواء غازاً مثاليًا ثنائي الذرة، كتلته المولية $\mu = 29 \text{ g/mol}$.

تخضع التحولات الأديباتية شبه الاتزانة للمعادلة $pV^\gamma = \text{const}$ ، حيث $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ هي نسبة السعة الحرارية للغاز عند ثبوت الضغط إلى سعته الحرارية عند ثبوت الحجم.

يمكن للطالب استخدام المعطيات الآتية عند الحاجة:

ثابت الغازات العام هو $R = 8.31 \text{ J/(mol. K)}$.

الضغط الجوي عند سطح الأرض هو $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

تسارع الجاذبية ثابت، $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

السعة الحرارية المولية للهواء عند ثبوت الضغط هي $c_p = \frac{7}{2}R$

السعة الحرارية المولية للهواء عند ثبوت الحجم هي $c_v = \frac{5}{2}R$

تلميحات رياضية

a.

$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. حل المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (حيث A و B ثابتان) هو

$$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$$

حيث $x_1(t)$ هو حل المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

c.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. تغير الضغط مع الارتفاع.

1.1. افترض أن درجة حرارة الغلاف الجوي منتظمة وتساوي T_0 . اكتب التعبير الذي يعطي الضغط الجوي p بدلالة الارتفاع z .

1.2. افترض أن درجة حرارة الغلاف الجوي تتغير مع الارتفاع وفق العلاقة

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

حيث Λ ثابت يسمى معدل تناقص درجة الحرارة مع الارتفاع في الغلاف الجوي (التدرج الرأسى لدرجة الحرارة هو $-\Lambda$).

1.2.1. اكتب التعبير الذي يعطي الضغط الجوي p بدلالة الارتفاع z .

1.2.2. تحدث عملية تسمى الحمل الحراري الحر عندما تزداد كثافة الهواء مع الارتفاع. عند أي قيم لـ Λ يحدث الحمل الحراري الحر؟

2. تغير درجة حرارة حزمة هوائية أثناء حركتها الرأسية

اعتبر حزمة هوائية تتحرك صعوداً وهبوطاً في الغلاف الجوي. والحزمة الهوائية كتلة من الهواء ذات أبعاد كافية، يبلغ امتدادها عدة أمتار، بحيث يمكن التعامل معها بوصفها كياناً ترموديناميكياً مستقلاً، لكنها صغيرة بما يكفي لاعتبار درجة حرارتها منتظمة. ويمكن التعامل مع الحركة الرأسية للحزمة الهوائية بوصفها عملية شبه أديباتية، أي إن تبادل الحرارة مع الهواء المحيط مهملاً. فإذا ارتفعت الحزمة الهوائية في الغلاف الجوي، تمددت وبردت. وعلى العكس، إذا تحركت إلى أسفل، فإن ازدياد الضغط الخارجي يضغط الهواء داخل الحزمة، فترتفع درجة حرارته.

نظراً إلى أن حجم الحزمة ليس كبيراً، يمكن اعتبار الضغط الجوي عند النقاط المختلفة على حدود الحزمة ذا قيمة واحدة $p(z)$ ، حيث z هو ارتفاع مركز الحزمة. ودرجة الحرارة داخل الحزمة منتظمة وتساوي $T_{\text{parcel}}(z)$ ، وهي تختلف عموماً عن درجة حرارة الهواء المحيط $T(z)$. في الجزأين 2.1 و 2.2، لا نفترض أي شكل معين للدالة $T(z)$.

2.1. يُعرّف تغير درجة حرارة الحزمة T_{parcel} مع الارتفاع بالعلاقة

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G.$$

اشتق التعبير عن $G(T, T_{\text{parcel}})$.

2.2. اعتبر حالة جوية خاصة تكون فيها درجة حرارة الغلاف الجوي T عند أي ارتفاع z مساوية لدرجة حرارة الحزمة T_{parcel} ، أي $T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$. نستخدم Γ للدلالة على قيمة G عندما يكون $T = T_{\text{parcel}}$ ، أي

$$\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$$

(مع $T = T_{\text{parcel}}$). وتسمى Γ معدل التناقص الأديباتي الجاف لدرجة الحرارة مع الارتفاع.

2.2.1. اشتق التعبير عن Γ

2.2.2. احسب القيمة العددية لـ Γ .

2.2.3. اشتق التعبير عن درجة حرارة الغلاف الجوي $T(z)$ بدلالة الارتفاع.

2.3. افترض أن درجة حرارة الغلاف الجوي تعتمد على الارتفاع وفق العلاقة $T(z) = T(0) - \Lambda z$ ، حيث Λ ثابت. أوجد اعتماد درجة حرارة الحزمة $T_{\text{parcel}}(z)$ على الارتفاع z .

2.4. اكتب التعبير التقريبي عن $T_{\text{parcel}}(z)$ عندما يكون $|\Lambda z| \ll T(0)$ و $T_{\text{parcel}}(0) \approx T(0)$.

3. استقرار الغلاف الجوي.

في هذا الجزء، نفترض أن T تتغير خطياً مع الارتفاع.

3.1. اعتبر حزمة هوائية في حالة اتزان ابتدائي مع الهواء المحيط بها عند ارتفاع z_0 ، أي إن درجة حرارتها تساوي درجة حرارة الهواء المحيط $T(z_0)$. إذا أزيحت الحزمة قليلاً إلى أعلى أو إلى أسفل (بفعل الاضطراب الجوي مثلاً)، فقد تحدث إحدى الحالات الثلاث الآتية:

- تعود الحزمة الهوائية إلى ارتفاعها الأصلي z_0 ، ويكون اتزان الحزمة مستقرًا. ويقال إن الغلاف الجوي مستقر.
- تواصل الحزمة حركتها في الاتجاه الأصلي، ويكون اتزان الحزمة غير مستقر. ويكون الغلاف الجوي غير مستقر.
- تبقى الحزمة الهوائية في موضعها الجديد، ويكون اتزان الحزمة محايدًا. ويقال إن الغلاف الجوي متعادل الاستقرار.

ما الشرط على Λ لكي يكون الغلاف الجوي مستقرًا أو غير مستقر أو متعادل الاستقرار؟

3.2. درجة حرارة حزمة عند سطح الأرض $T_{\text{parcel}}(0)$ أعلى من درجة حرارة الهواء المحيط $T(0)$. ستجعل قوة الطفو الحزمة ترتفع. اشتق التعبير عن أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الحزمة في حالة غلاف جوي مستقر بدلالة Λ و Γ .

4. ارتفاع الخلط

4.1. يعرض الجدول 1 درجات حرارة الهواء التي سجلها منطاد سبر راديوي في الساعة 7:00 صباحًا في أحد أيام شهر نوفمبر في هانوي. ويمكن وصف تغير درجة الحرارة مع الارتفاع تقريباً بالصيغة $T(z) = T(0) - \Lambda z$ ، بمعدلات تناقص مختلفة Λ في الطبقات الثلاث $0 < z < 96$ m، $96 < z < 119$ m، و $119 < z < 215$ m.

اعتبر حزمة هوائية درجة حرارتها $T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$ تصعد من سطح الأرض. استنادًا إلى المعطيات الواردة في الجدول 1 وباستخدام التقريب الخطي أعلاه، احسب درجة حرارة الحزمة عند الارتفاعين 96 m و 119 m.

4.2. حدد أقصى ارتفاع H يمكن أن تبلغه الحزمة، ودرجة حرارتها $T_{\text{parcel}}(H)$.

يسمى ارتفاع الخلط. ويمكن لمكونات الهواء المنبعثة من سطح الأرض أن تختلط بالهواء في الغلاف الجوي (بفعل الرياح والاضطراب والتشتت مثلاً)، فينخفض تركيزها داخل هذه الطبقة.

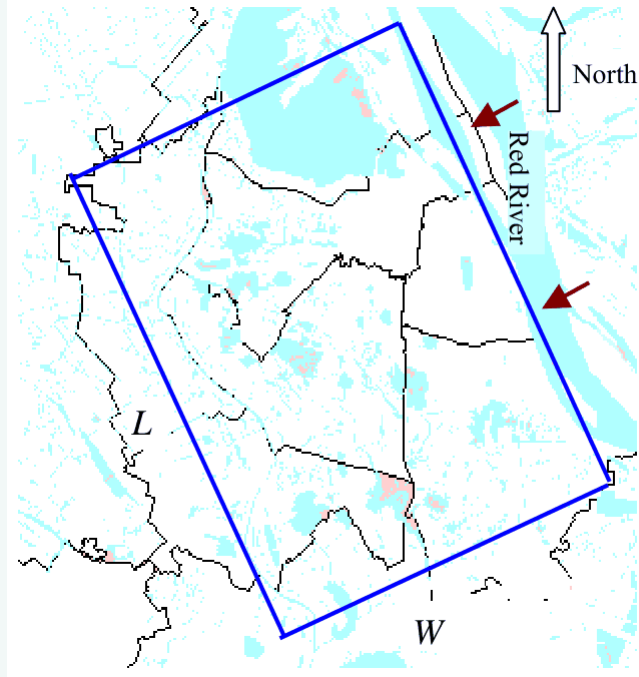
الجدول 1

معطيات سجلها منطاد سبر راديوي في الساعة 7:00 صباحًا في أحد أيام شهر نوفمبر في هانوي.

الارتفاع، m	درجة الحرارة، °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. تقدير التلوث بأول أكسيد الكربون (CO) خلال ساعة الذروة الصباحية لحركة الدراجات النارية في هانوي.

يمكن تقريب منطقة هانوي الحضرية بمستطيل بُعده L و W كما هو مبين في الشكل، ويقع أحد أضلاعه على امتداد الضفة الجنوبية الغربية للنهر الأحمر.



يُقدَّر أنه خلال ساعة الذروة الصباحية، من الساعة 7:00 صباحًا إلى الساعة 8:00 صباحًا، توجد 8×10^5 دراجة نارية على الطرق، تقطع كل منها في المتوسط 5 km وتُصدر 12 g من CO لكل كيلومتر. ويُفترض تقريبًا أن كمية ملوث CO تنبعث بانتظام مع الزمن، بمعدل ثابت M خلال ساعة الذروة. وفي الوقت نفسه، تهب رياح نظيفة من الشمال الشرقي عموديًا على النهر الأحمر (أي عموديًا على ضلعي المستطيل ذوي الطول L) بسرعة u ، وتعبّر المدينة بالسرعة نفسها، وتحمل جزءًا من الهواء الملوث بـ CO إلى خارج الغلاف الجوي للمدينة.

كذلك نستخدم النموذج التقريبي المبسط الآتي:

- ينتشر CO سريعًا في كامل حجم طبقة الخلط فوق منطقة هانوي الحضرية، بحيث يمكن افتراض أن تركيز CO، وهو $C(t)$ عند الزمن t ، ثابت في جميع أنحاء متوازي المستطيلات ذي الأبعاد L و W و H .
- يكون الهواء الداخل إلى متوازي المستطيلات من الجهة المواجهة للرياح نظيفًا، ويُفترض عدم خروج أي ملوثات من متوازي المستطيلات عبر الجوانب الموازية للرياح.
- قبل الساعة 7:00 صباحًا، يكون تركيز CO في الغلاف الجوي مهملاً.

5.1. اشتق المعادلة التفاضلية التي تحدد تركيز ملوث CO، وهو $C(t)$ ، بدلالة الزمن.

5.2. اكتب حل هذه المعادلة لإيجاد $C(t)$.

5.3. احسب القيمة العددية للتركيز $C(t)$ عند الساعة 8:00 صباحًا.

المعطيات: $L = 15$ km، و $W = 8$ km، و $u = 1$ m/s.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لنكتب $T_0 = T(0)$ ، و $T_p = T_{\text{parcel}}$ ، و $T_{p0} = T_p(0)$. تُستخدم درجات الحرارة بالكلفن في نسب درجات الحرارة. في الجزء 5، يمثل t الزمن المنقضي منذ الساعة 7:00 صباحًا.

• 1.1

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT_0}\right)$$

• 1.2.1. عندما يكون $\Lambda \neq 0$ و $T_0 - \Lambda z > 0$,

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\mu g / (R \Lambda)}$$

تعطي النهاية عند $\Lambda = 0$ نتيجة 1.1.

• 1.2.2. باستخدام معيار ازدياد الكثافة المحدد في هذا الجزء،

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 3.42 \times 10^{-2} \text{ K m}^{-1} = 34.2 \text{ K km}^{-1}$$

• 2.1.

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}$$

• 2.2.1.

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p} = \frac{2\mu g}{7R}$$

• 2.2.2.

$$\Gamma = 9.78 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = 9.78 \text{ K km}^{-1}$$

• 2.2.3.

$$T(z) = T_0 - \Gamma z$$

• 2.3.

$$T_p(z) = \begin{cases} T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}, & \Lambda \neq 0, \\ T_{p0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{T_0}\right), & \Lambda = 0. \end{cases}$$

• 2.4. حتى الرتبة الأولى في الارتفاع،

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z \simeq T_{p0} - \Gamma z$$

• 3.1.

$$\begin{aligned} \Lambda < \Gamma : & \text{مستقر,} \\ \Lambda > \Gamma : & \text{غير مستقر,} \\ \Lambda = \Gamma : & \text{متعادل الاستقرار.} \end{aligned}$$

• 3.2. في تقريب ارتفاع الخلط المقصود، مع إهمال تجاوز مستوى الاتزان بفعل القصور الذاتي،

$$z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}, \quad \Lambda < \Gamma.$$

يرد في الحل التعبير المقابل دون تقريب درجة حرارة الحزمة بعلاقة خطية.

• 4.1.

$$T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}, \quad T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}$$

• 4.2.

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ \text{C}$$

• 5.1.

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0$$

• 5.2. خلال ساعة الذروة.

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W} \right)$$

• 5.3.

$$C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}$$

يعطي الاحتفاظ بالأرقام في الخطوات الوسيطة 2.24 mg m^{-3} .

الحل

1.1. غلاف جوي متساوي الحرارة

يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي لطبقة أفقية من الغلاف الجوي أن يكون

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

للغواء المثالي، تكون الكثافة الكتلية

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

ومن ثم، عندما يكون $T = T_0$,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz.$$

بالتكامل من سطح الأرض، حيث $p = p_0$ ، إلى الارتفاع z ،

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\mu g z}{RT_0}.$$

إذن،

$$p(z) = p_0 e^{-\mu g z / (RT_0)}.$$

1.2.1. غلاف جوي ذو معدل ثابت لتناقص درجة الحرارة مع الارتفاع

عندما يكون $T(z) = T_0 - \Lambda z$ ، يصبح شرط الاتزان الهيدروستاتيكي

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

عندما يكون $\Lambda \neq 0$ ، يعطي التكامل

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln \frac{T_0 - \Lambda z}{T_0}.$$

ومن ثم

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\mu g / (R \Lambda)}.$$

تنطبق هذه الصيغة حيث تظل درجة الحرارة المطلقة موجبة.

عندما $\Lambda \rightarrow 0$

$$\frac{\mu g}{R \Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right) \rightarrow -\frac{\mu g z}{R T_0},$$

فنستعيد نتيجة الغلاف الجوي متساوي الحرارة.

1.2.2. ازدياد الكثافة مع الارتفاع

باستخدام $\rho = \mu p / (RT)$

$$\frac{d \ln \rho}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} + \frac{\Lambda}{T}.$$

إذن،

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{T} \left(\Lambda - \frac{\mu g}{R} \right).$$

بما أن $\rho, T > 0$ ، فإن الكثافة تزداد صعوداً إذا وفقط إذا كان

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R}.$$

عددياً،

$$\frac{\mu g}{R} = \frac{0.029(9.81)}{8.31} = 0.0342347 \text{ K m}^{-1},$$

ومن ثم يكون الشرط المطلوب

$$\Lambda > 34.2 \text{ K km}^{-1}.$$

هذا هو معيار انقلاب الكثافة الوارد في هذا السؤال. أما معيار عدم استقرار الحزمة الأديباتية في الجزء 3 فهو أقل تقييداً.

2.1. تغير درجة حرارة حزمة أديباتية

تحتوي الحزمة على كمية ثابتة من الغاز، وتظل في اتزان ضغطي مع محيطها، ويكون تبادلها الحراري معه مهماً. وعلاقتا التحول الأديباتي والغاز المثالي لها هما

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = nRT_p.$$

بحذف V ،

$$T_p^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const},$$

أو

$$T_p p^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const}.$$

بأخذ المشتقات اللوغاريتمية،

$$\frac{1}{T_p} \frac{dT_p}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

يتحدد تدرج الضغط بالغلاف الجوي المحيط، الذي تبلغ درجة حرارته T :

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}.$$

وبالتالي،

$$\frac{dT_p}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_p}{T}.$$

لأن $\gamma = c_p/c_V$ و $c_p - c_V = R$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}.$$

إذن

$$G(T, T_p) = \frac{\mu g}{c_p} \frac{T_p}{T}.$$

للعامل T_p/T أهمية: فمعدل تبريد الحزمة ليس ثابتاً تماماً عندما تختلف درجة حرارتها عن درجة حرارة محيطها.

2.2.1. معدل التناقص الأديباتي الجاف لدرجة الحرارة مع الارتفاع

عندما يكون $T_p = T$ ، تساوي نسبة درجتَي الحرارة في التعبير السابق الواحد:

$$\Gamma = \frac{\mu g}{c_p}.$$

للغاز ثنائي الذرة المحدد،

$$c_p = \frac{7}{2} R,$$

ومن ثم

$$\Gamma = \frac{2\mu g}{7R}.$$

2.2.2. القيمة العددية

بالتعويض نحصل على

$$\Gamma = \frac{2(0.029)(9.81)}{7(8.31)} = 0.00978133 \text{ K m}^{-1}.$$

إذن،

$$\Gamma = 9.78 \text{ K km}^{-1}.$$

2.2.3. التوزيع الرأسى لدرجة حرارة الغلاف الجوي

في ظل الشرط الخاص $T(z) = T_p(z)$ ،

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma.$$

بما أن Γ ثابت،

$$T(z) = T(0) - \Gamma z.$$

2.3. درجة حرارة الحزمة في غلاف جوي ذي Λ ثابتة

من الجزء 2.1،

$$\frac{dT_p}{dz} = -\Gamma \frac{T_p}{T_0 - \Lambda z}.$$

بفصل المتغيرات،

$$\frac{dT_p}{T_p} = -\Gamma \frac{dz}{T_0 - \Lambda z}.$$

بالتكامل،

$$\ln \frac{T_p(z)}{T_{p0}} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

ومن ثم، عندما يكون $\Lambda \neq 0$ ،

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda}}.$$

إذا كان $\Lambda = 0$ ، يكون الغلاف الجوي المحيط متساوي الحرارة. ويعطي التكامل المباشر في هذه الحالة

$$\boxed{T_p(z) = T_{p0} e^{-\Gamma z/T_0}}.$$

لطبقة تبدأ عند الارتفاع z_i ، يمكن كتابة النتيجة نفسها على الصورة

$$T_p(z) = T_p(z_i) \left[\frac{T(z)}{T(z_i)} \right]^{\Gamma/\Lambda},$$

مما يتيح وصل الطبقات المتتالية بصورة متصلة.

2.4. التقريب الخطي

بنشر نتيجة الجزء 2.3 حول $z = 0$ ،

$$T_p(z) = T_{p0} \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0} + \frac{\Gamma(\Gamma - \Lambda)z^2}{2T_0^2} + \dots \right].$$

حتى الرتبة الأولى،

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma \frac{T_{p0}}{T_0} z.$$

مع $T_{p0} \approx T_0$

$$\boxed{T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z}.$$

على وجه الدقة، هذا نشر عند الارتفاعات الصغيرة. فإذا كانت Λ صغيرة جداً، فإن الشرط المذكور $|\Lambda z| \ll T_0$ وحده لا يضمن صلاحية التقريب الخطي؛ إذ يلزم أيضاً أن يكون $\Gamma|z|/T_0 \ll 1$. وكلا التغيرين في درجة الحرارة صغير مقارنة بدرجة الحرارة المطلقة في الجزء 4.

3.1. استقرار حزمة مزاحة

لتكن الحزمة في البداية عند z_0 ، بحيث

$$T_p(z_0) = T(z_0) = T_*.$$

نزحها إلى أعلى بمسافة صغيرة ذات إشارة ξ . عند اتزانها الابتدائي، يكون تدرج درجة حرارتها الأديباتي $-\Gamma$ ، ولذلك

$$T_p(z_0 + \xi) = T_* - \Gamma \xi + O(\xi^2).$$

درجة حرارة الوسط المحيط هي

$$T(z_0 + \xi) = T_* - \Lambda \xi.$$

ومن ثم يكون فائض درجة حرارة الحزمة

$$T_p - T = (\Lambda - \Gamma)\xi + O(\xi^2).$$

عند تساوي الضغط، تتناسب الكثافة عكسياً مع درجة الحرارة المطلقة. ويكون تسارع الحزمة نحو الأعلى بفعل الطفو والجاذبية

$$a_z = g \left(\frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right) = g \left(\frac{T_p}{T} - 1 \right) \simeq \frac{g}{T_*} (\Lambda - \Gamma) \xi.$$

إذن:

- إذا كان $\Lambda < \Gamma$ ، يعاكس التسارع الإزاحة: يكون الغلاف الجوي مستقرًا.
- إذا كان $\Lambda > \Gamma$ ، يعزز التسارع الإزاحة: يكون الغلاف الجوي غير مستقر.
- إذا كان $\Lambda = \Gamma$ ، تظل درجة حرارة الحزمة وكثافتها مساويتين لدرجة حرارة محيطها وكثافته: يكون الغلاف الجوي متعادل الاستقرار.

ومن ثم

$$\boxed{\Lambda = \Gamma: \text{متعادل الاستقرار}, \quad \Lambda > \Gamma: \text{غير مستقر}, \quad \Lambda < \Gamma: \text{مستقر}}$$

3.2. الارتفاع الذي تبلغه حزمة أدفاً من محيطها في البداية

في التقريب الخطي،

$$T_p(z) \simeq T_{p0} - \Gamma z, \quad T(z) = T_0 - \Lambda z.$$

إذن،

$$T_p(z) - T(z) = (T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z.$$

في الغلاف الجوي المستقر، يكون $\Gamma - \Lambda > 0$ ، ولذلك يتناقص فائض درجة حرارة الحزمة الابتدائي مع الارتفاع. ويُحصل على مستوى الطفو المتعادل بجعل هذا الفرق مساوياً للصفر:

$$\boxed{z_{\max} \simeq \frac{T_{p0} - T_0}{\Gamma - \Lambda}}.$$

يتبع الرمز $z_{\max}$ هنا نموذج ارتفاع الخلط المقصود في المسألة، والذي يهمل تجاوز مستوى الاتزان بفعل القصور الذاتي.

استكمالاً للعرض، يمكن أيضاً إيجاد ارتفاع الطفو المتعادل دون تقريب الجزء 2.4. وبمساواة التعبير الدقيق لدرجة حرارة الحزمة بدرجة حرارة الغلاف الجوي نحصل على

$$T_{p0} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0} \right).$$

إذن، عندما يكون $\Lambda \neq 0$

$$\boxed{z_n = \frac{T_0}{\Lambda} \left[1 - \left(\frac{T_0}{T_{p0}} \right)^{\Lambda/(\Gamma-\Lambda)} \right]}.$$

عندما يكون $\Lambda = 0$ ، تكون نهايته

$$\boxed{z_n = \frac{T_0}{\Gamma} \ln \frac{T_{p0}}{T_0}}.$$

ويختزل كلا التعبيرين إلى النتيجة الخطية المذكورة عندما يكون $T_{p0} - T_0 \ll T_0$.

يلزم توضيح من الناحية الديناميكية: انعدام محصلة الطفو والثقل يعني انعدام التسارع، ولا يعني بالضرورة انعدام السرعة. فقد تتجاوز الحزمة الحرة الحركة هذا المستوى. فعلى سبيل المثال، في التقريب الخطي نفسه، تخضع حزمة أُطلقت من السكون دون تخميد للمعادلة

$$\ddot{z} \simeq \frac{g}{T_0} [(T_{p0} - T_0) - (\Gamma - \Lambda)z],$$

وتكون نقطة انقلاب اتجاه حركتها الأولى عند z_n . 2. وتستخدم الأجزاء التالية ارتفاع الخلط المقصود عند الطفو المتعادل.

4.1. درجتا حرارة الحزمة عند m 119 و m 96

نستخدم خطوطاً مستقيمة تمر بنقطتي القياس الطرفيتين لكل طبقة محددة. ومعدلات تناقص درجة الحرارة مع الارتفاع فيها هي

$$\Lambda_1 = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 0.0153846 \text{ K m}^{-1},$$

$$\Lambda_2 = 0,$$

و

$$\Lambda_3 = \frac{20.1 - 22.0}{215 - 119} = -0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

يعطي استقراء الخط الأول إلى سطح الأرض درجة حرارة

$$T(0) \simeq 21.5 + 5\Lambda_1 = 21.5769^\circ\text{C},$$

وهي قريبة من درجة حرارة الحزمة الابتدائية 22°C . وجميع التغيرات المعنية في درجة الحرارة صغيرة مقارنة بدرجة حرارة مقدارها نحو 294 K، لذا ينطبق الجزء 2.4.

بما أن فرق درجات الحرارة بالكلفن يساوي فرق درجات الحرارة بالدرجات المئوية،

$$T_p(z) \simeq 22^\circ\text{C} - \Gamma z.$$

وبالتالي،

$$T_p(96) \simeq 22 - 0.00978133(96) = 21.06099^\circ\text{C},$$

و

$$T_p(119) \simeq 22 - 0.00978133(119) = 20.83602^\circ\text{C}.$$

وفق دقة معطيات درجة الحرارة،

$$\boxed{T_p(96 \text{ m}) \simeq 21.1^\circ\text{C}}, \quad \boxed{T_p(119 \text{ m}) \simeq 20.8^\circ\text{C}}.$$

للتحقق، يعطي تطبيق الصيغة الدقيقة من الجزء 2.3 على كل من الطبقة الأولى والطبقة الثانية المتساوية الحرارة على حدة 21.059°C و 20.833°C ، على الترتيب. وبتقريبهما نحصل على الإجابتين نفسيهما.

4.2. ارتفاع الخلط

عند كلا الارتفاعين m 119 و m 119، تبلغ درجة حرارة الوسط المحيط 20.1°C . وتكون الحزمة أدفاً عند كلا الارتفاعين، لذا تواصل صعودها إلى طبقة الانقلاب الحراري فوق m 119.

لنكتب تدرج درجة الحرارة الموجب هناك على الصورة

$$k = -\Lambda_3 = \frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = 0.0197917 \text{ K m}^{-1}.$$

درجة حرارة الوسط المحيط في تلك الطبقة هي

$$T(z) = 20.1^\circ\text{C} + k(z - 119 \text{ m}).$$

عند ارتفاع الخلط، تتساوى درجة حرارة الحزمة مع درجة حرارة الغلاف الجوي:

$$22 - \Gamma H = 20.1 + k(H - 119),$$

حيث H بالأمتار ودرجات الحرارة المعروضة بالدرجات المئوية. وبالحل،

$$H = \frac{22 - 20.1 + 119k}{\Gamma + k} = \frac{4.2552083}{0.029572997} = 143.888 \text{ m}.$$

يقع هذا الارتفاع داخل طبقة الانقلاب الحراري المفترضة، كما هو مطلوب.

درجة حرارة الحزمة هناك هي

$$T_p(H) \simeq 22 - \Gamma H = 20.5926^\circ\text{C}.$$

إذن،

$$H \simeq 144 \text{ m}, \quad T_p(H) \simeq 20.6^\circ \text{C}.$$

يعطي استخدام العلاقة الدقيقة لتغير درجة حرارة الحزمة عبر طبقات الغلاف الجوي الثلاث ذات التغير الخطي في درجة الحرارة $H = 143.78 \text{ m}$ ، مما يؤكد كفاية التقريب الخطي لدرجة حرارة الحزمة.

5.1. معادلة حفظ CO

حجم الهواء المختلط بانتظام هو

$$V = LWH.$$

إذا كان $C(t)$ هو التركيز الكتلي لـ CO، فإن كتلة CO الكلية داخل متوازي المستطيلات هي

$$m_{\text{CO}} = LWH C.$$

تعبّر الرياح وجهاً عرضه L وارتفاعه H ، ولذلك يكون معدل تدفقها الحجمي

$$Q = uLH.$$

بما أن الهواء الداخل نظيف، فإن تدفق CO الداخل يساوي صفراً. ويكون معدل خروج كتلة CO

$$QC = uLH C.$$

ومن ثم يعطي حفظ CO

$$\frac{d}{dt}(LWH C) = M - uLH C.$$

أبعاد متوازي المستطيلات ثابتة، لذا

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C = \frac{M}{LWH}, \quad C(0) = 0.$$

5.2. التركيز بدلالة الزمن

أحد الحلول الخاصة الثابتة هو

$$C_{\text{ss}} = \frac{M}{uLH}.$$

يتناسب حل المعادلة المتجانسة مع $e^{-ut/W}$ ، ولذلك

$$C(t) = \frac{M}{uLH} + Ae^{-ut/W}.$$

باستخدام $C(0) = 0$ ،

$$A = -\frac{M}{uLH}.$$

إذن

$$C(t) = \frac{M}{uLH} \left(1 - e^{-ut/W}\right), \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ s}.$$

المقياس الزمني للتهوية هو W/u . وفي حد انعدام الرياح، يختزل هذا التعبير على النحو الصحيح إلى $C(t) = Mt/(LWH)$.

5.3. تركيز CO عند الساعة 8:00 صباحاً

كتلة CO الكلية المنبعثة خلال الساعة هي

$$m_{\text{emitted}} = (8 \times 10^5)(5 \text{ km})(12 \text{ g km}^{-1}) = 4.8 \times 10^7 \text{ g} = 4.8 \times 10^4 \text{ kg}.$$

إذن،

$$M = \frac{4.8 \times 10^4}{3600} = 13.3333 \text{ kg s}^{-1}.$$

باستخدام

$$L = 15000 \text{ m}, \quad W = 8000 \text{ m}, \quad u = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad H \simeq 143.888 \text{ m},$$

يكون الزمن المنقضي اللائعدي

$$\frac{ut}{W} = \frac{1(3600)}{8000} = 0.45.$$

ومن ثم

$$C(3600) = \frac{13.3333}{(1)(15000)(143.888)} (1 - e^{-0.45}) \text{ kg m}^{-3},$$

مما يعطي

$$C(3600) = 2.2386 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} = 2.2386 \text{ mg m}^{-3}.$$

بدقة مناسبة للمعطيات التقريبية،

$$\boxed{C(8:00 \text{ am}) \simeq 2.2 \text{ mg m}^{-3}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.