

IPhO 2007

理论题与解答 · 伊朗伊斯法罕 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2007/

题目 1: 量纲分析与黑洞（霍金辐射）

在物理学中，只要有等式关系，等式两边的量就应当属于同一类型，即它们必须具有相同的量纲。例如，不可能出现等式右边的量表示长度，而左边的量表示时间间隔的情况。利用这一事实，有时无需解析求解问题，就几乎能够推导出物理关系的形式。例如，若要求一个物体在恒定重力加速度 g 的作用下从高度 h 下落所需的时间，我们可以这样推理：只需用 g 和 h 构造一个表示时间间隔的量，而唯一可能的形式是 $T = a(h/g)^{1/2}$ 。注意，这一结果包含一个尚未确定的系数 a ，它是无量纲的，因此无法用这种方法确定。这个系数可以是 1 、 $1/2$ 、 $\sqrt{3}$ 、 π 这样的数，也可以是任何其他实数。这种推导物理关系的方法称为量纲分析。在量纲分析中，无量纲系数并不重要，我们无需将其写出。幸运的是，在大多数物理问题中，这些系数的数量级为 1 ，略去它们不会改变物理量的数量级。因此，对上述问题进行量纲分析，可得 $T = (h/g)^{1/2}$ 。

通常，物理量的量纲用四个基本量的量纲表示： M （质量）、 L （长度）、 T （时间）和 K （温度）。任意量 x 的量纲记作 $[x]$ 。例如，速度 v 、动能 E_k 和热容 C_V 的量纲分别写为：
 $[v] = LT^{-1}$ 、 $[E_k] = ML^2T^{-2}$ 、 $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$ 。

1 基本常数与量纲分析

1.1	用长度、质量、时间和温度的量纲表示基本常数，即普朗克常数 h 、光速 c 、万有引力常数 G 和玻尔兹曼常数 k_B 的量纲。	0.8
-----	---	-----

斯特藩—玻尔兹曼定律指出，黑体的辐射出射度，即黑体单位表面积在单位时间内辐射的总能量，等于 $\sigma\theta^4$ ，其中 σ 为斯特藩—玻尔兹曼常数， θ 为黑体的绝对温度。

1.2	用长度、质量、时间和温度的量纲表示斯特藩—玻尔兹曼常数的量纲。	0.5
-----	---------------------------------	-----

斯特藩—玻尔兹曼常数并非基本常数，可以用基本常数表示，即可写成 $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$ 。在此关系式中， a 是一个数量级为 1 的无量纲参数。如前所述，从我们的角度看， a 的精确值并不重要，因此将其取为 1 。

1.3	用量纲分析求出 α 、 β 、 γ 和 δ 。	1.0
-----	--	-----

2 黑洞物理

在本题的这一部分，我们希望用量纲分析研究黑洞的一些性质。根据物理学中称为无毛定理的一个定理，本题所考虑的黑洞的所有特征都仅取决于黑洞的质量。黑洞的一个特征是其事件视界的面积。粗略地说，事件视界就是黑洞的边界。在这一边界内部，引力强大到连光都无法从边界包围的区域中逸出。

我们希望找出黑洞质量 m 与其事件视界面积 A 之间的关系。该面积取决于黑洞的质量、光速以及万有引力常数。与 1.3 中一样，我们写出 $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ 。

2.1	用量纲分析求出 α 、 β 和 γ 。	0.8
-----	---	-----

由 2.1 的结果可知，黑洞的事件视界面积随其质量的增加而增大。从经典物理的观点来看，没有任何东西能够从黑洞中逸出，因此在所有物理过程中，事件视界的面积只能增大。类比热力学第二定律，贝肯斯坦提出，可以赋予黑洞一个熵 S ，它与黑洞的事件视界面积成正比，即 $S = \eta A$ 。其他一些论证进一步支持了这一猜想。

2.2	利用熵的热力学定义 $dS = dQ/\theta$ 求出熵的量纲。 dQ 为交换的热量， θ 为系统的绝对温度。	0.2
2.3	与 1.3 中一样，将有量纲常数 η 表示为基本常数 h 、 c 、 G 和 k_B 的函数。	1.1

在本题余下的部分中，不要使用量纲分析，但可以使用前面各部分中已经得到的结果。

3 霍金辐射

霍金采用半量子力学的方法论证指出，与经典物理的观点相反，黑洞会发出类似于黑体辐射的辐射，其对应的温度称为霍金温度。

3.1	利用以黑洞质量表示其能量的关系式 $E = mc^2$ ，以及热力学定律，将黑洞的霍金温度 θ_H 用其质量和基本常数表示。假设黑洞不对周围环境做功。	0.8
3.2	因此，孤立黑洞的质量会因霍金辐射而改变。利用斯特藩-玻尔兹曼定律，求出这一变化率对黑洞霍金温度 θ_H 的依赖关系，并用黑洞质量和基本常数表示这一变化率。	0.7
3.3	求质量为 m 的孤立黑洞完全蒸发，即失去全部质量所需的时间 t^* 。	1.1

从热力学的角度来看，黑洞表现出某些奇特的性质。例如，黑洞的热容为负。

3.4	求质量为 m 的黑洞的热容。	0.6
-----	------------------	-----

4 黑洞与宇宙背景辐射

考虑一个处于宇宙背景辐射中的黑洞。宇宙背景辐射是充满整个宇宙、温度为 θ_B 的黑体辐射。因此，总面积为 A 的物体在单位时间内接收到的能量等于 $\sigma\theta_B^4 \times A$ 。所以，黑洞一方面通过霍金辐射损失能量，另一方面从宇宙背景辐射中获得能量。

4.1	求黑洞质量的变化率，用黑洞质量、宇宙背景辐射温度和基本常数表示。	0.8
4.2	当质量取某个值 m^* 时，这一变化率为零。求 m^* ，并用 θ_B 和基本常数表示。	0.4
4.3	利用 4.2 的答案，替换 4.1 答案中的 θ_B ，将黑洞质量的变化率用 m 、 m^* 和基本常数表示。	0.2
4.4	求与宇宙背景辐射处于热平衡的黑洞的霍金温度。	0.4
4.5	这一平衡是稳定的还是不稳定的？为什么？（用数学形式表述你的答案）	0.6

题目译自官方英文原文。

答案

以下结果按题目要求，将第 1—2 部分中未确定的无量纲系数取为 1。微分和积分产生的数值因子予以保留。记 $\dot{m} = dm/dt$ 。

- 1.1: $[h] = ML^2T^{-1}$ 、 $[c] = LT^{-1}$ 、 $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ 、 $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$ 。
- 1.2: $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$ 。
- 1.3: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4)$ ，得到 $\sigma = \frac{k_B^4}{h^3c^2}$ 。

- 2.1: $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2)$, 得到 $A = \frac{G^2 m^2}{c^4}$ 。
- 2.2: $[S] = ML^2 T^{-2} K^{-1}$ 。
- 2.3: $\eta = \frac{k_B c^3}{hG}$ 。
- 3.1: $\theta_H = \frac{hc^3}{2Gk_B m}$ 。
- 3.2: $\dot{m} = -\frac{\sigma A \theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}$ 。
- 3.3: $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}$ 。
- 3.4: $C = -\frac{2Gk_B m^2}{hc} < 0$ 。
- 4.1: $\dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{hc^4}{16G^2 m^2}$ 。
- 4.2: $m^* = \frac{2Gk_B \theta_B}{hc^3}$ 。
- 4.3: $\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]$ 。
- 4.4: $\theta_H(m^*) = \theta_B$ 。
- 4.5: 不稳定。微小的质量扰动满足 $\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m$, 因此其大小随时间指数增长。

解答

我们采用题目规定的仅由质量决定的黑洞模型，以及黑体的辐射和吸收定律。所有表达式均沿用第 1–2 部分中将无量纲系数取为 1 的约定。题目没有给出任何数值输入，因此所求结果均以符号表示。

1.1

由光子能量关系式 $E = h\nu$ ，以及 $[\nu] = T^{-1}$ ，可得

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2 T^{-1}.$$

由于 c 是速度，

$$[c] = LT^{-1}.$$

由牛顿万有引力定律 $F = Gm_1 m_2 / r^2$ ，可得

$$[G] = \frac{[F]L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

乘积 $k_B \theta$ 具有能量的量纲，因此

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2 T^{-2} K^{-1}.$$

它们的国际单位制单位依次为 J s、m s⁻¹、m³ kg⁻¹ s⁻² 和 J K⁻¹。

1.2

总辐射功率的斯特藩–玻尔兹曼定律为

$$P = \sigma A \theta^4.$$

因此,

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

相应的国际单位制单位为 $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ 。

1.3

按规定取系数 $a = 1$,

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

右边的量纲为

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

令其与 $MT^{-3}K^{-4}$ 的各量纲指数相等, 得到

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

解得

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

于是

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

对于 $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$,

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

因此,

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

最后一个方程给出 $\beta = -2\alpha$; 再由长度量纲对应的方程得到 $\alpha = 2$ 。因此

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

并且

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

由熵的热力学关系式,

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

可得熵的量纲为

$$[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

其国际单位制单位为 J K^{-1} 。

2.3

由于 $S = \eta A$,

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2}K^{-1}.$$

令

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

令各量纲指数相等, 得到

$$\begin{aligned} p - r + s &= 1, \\ 2p + q + 3r + 2s &= 0, \\ -p - q - 2r - 2s &= -2, \\ -s &= -1. \end{aligned}$$

于是 $s = 1$ 、 $p = r$, 其余方程给出

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

因此,

$$\eta = \frac{k_B c^3}{hG}.$$

将此结果与视界面积结合, 得到熵作为质量的函数:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

对于黑洞的这一族热力学状态, 不含功项的热力学第一定律为

$$dE = \theta_H dS.$$

由于

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

有

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

因此,

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_B m}}.$$

温度随质量的增加而降低。

3.2

向外辐射的功率为

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

孤立黑洞的能量守恒要求

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

其中负号表示质量损失。因此,

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

代入 3.1 中的温度,

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

为仅用温度表示其依赖关系, 代入

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_H}.$$

得到

$$\boxed{\dot{m} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2}}.$$

因此, 质量损失率的大小与 θ_H^2 成正比。虽然单位面积的辐射功率与 θ_H^4 成正比, 但视界面积与 m^2 成正比, 因而与 θ_H^{-2} 成正比。

3.3

设初始质量为 m , 瞬时质量记为 $\mu(t)$ 。定义

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

质量损失方程为

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

分离变量, 并从 $\mu(0) = m$ 开始积分,

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

于是

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

因此

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

当 $\mu(t^*) = 0$ 时, 黑洞完全蒸发:

$$\boxed{t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}}.$$

这是将题目中的蒸发模型延伸至质量为零时所得到的寿命。

3.4

由于没有功项，热容为

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

利用

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

得到

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

代入 $\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$,

$$C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc}.$$

等价地,

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

热容为负：吸收能量会使质量增加、温度降低，而损失能量会使温度升高。

4.1

根据题目给定的模型，吸收功率和辐射功率分别为

$$P_{\text{in}} = \sigma A\theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A\theta_H^4.$$

由能量守恒可得

$$c^2\dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

因此

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2}(\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

代入前面推导出的表达式,

$$\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}.$$

第一项表示吸收；第二项表示辐射。

4.2

在 $m = m^*$ 时，净变化率为零：

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

对于正温度，这要求

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

利用 3.1,

$$\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B,$$

因此

$$m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_B}.$$

4.3

由 4.2,

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*}.$$

代入 4.1 得到

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

等价地,

$$\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$$

4.4

在热平衡时, 吸收功率与辐射功率相等, 因此

$$\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B.$$

4.5

保持背景温度不变, 因此 m^* 不变。令

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

求导,

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

在平衡时,

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} > 0.$$

对于微小扰动 $m = m^* + \delta m$, 线性化后得到

$$\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m,$$

其解为

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2 (m^*)^3} \right].$$

扰动随时间增长，因此

该平衡是不稳定的。

4.3 中的符号关系也直接表明同样的结果：

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

质量稍大的黑洞比背景温度低，会进一步增加质量。质量稍小的黑洞温度更高，会进一步损失质量。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：汽车安全气囊用电容式加速度计

本题研究一种加速度计的简化模型，这种加速度计用于在汽车发生碰撞时触发安全气囊。我们希望构建一个机电系统，使其在加速度超过某一限值时，系统的某个电学参数（例如电路中某一点的电压）超过阈值，从而触发安全气囊。

注意：本题忽略重力。

1 考虑图 1 所示的平行板电容器。电容器每块极板的面积为 A ，两极板之间的距离为 d 。两极板之间的距离远小于极板的尺寸。其中一块极板通过一根劲度系数为 k 的弹簧与墙壁相连，另一块极板固定。当极板间距为 d 时，弹簧既不压缩也不伸长，换言之，此时弹簧不受力。假设极板间空气的介电常数等于真空介电常数 ε_0 。电容器在这一极板间距下的电容为 $C_0 = \varepsilon_0 A/d$ 。我们使两极板分别带上电荷 $+Q$ 和 $-Q$ ，并让系统达到力学平衡。

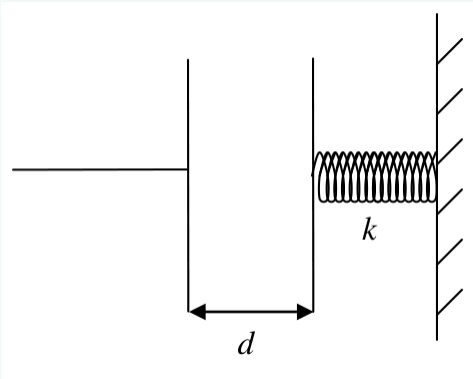


图 1

小题	问题	分值
1.1	求两极板之间相互作用的电场力 F_E 。	0.8
1.2	设与弹簧相连的极板的位移为 x 。求 x 。	0.6
1.3	在此状态下，电容器两极板间的电势差 V 为多少？用 Q 、 A 、 d 、 k 表示。	0.4
1.4	设电容器的电容为 C ，定义为电荷量与电势差之比。求 C/C_0 作为 Q 、 A 、 d 和 k 的函数。	0.3
1.5	系统中储存的总能量 U 为多少？用 Q 、 A 、 d 和 k 表示。	0.6

图 2 中，一个质量为 M 的物体与一块质量可忽略的导体板相连，并与两根劲度系数均为 k 的弹簧相连。该导体板可以在两块固定导体板之间来回运动。所有这些极板均相同，面积均为 A 。因此，这三块极板构成两个电容器。如图 2 所示，两块固定极板分别接到给定电势 V 和 $-V$ ，中间极板则通

过一个双位开关接地。连接可动极板的导线不影响极板的运动，三块极板始终保持平行。当整个装置没有加速度时，每块固定极板与可动极板之间的距离均为 d ，该距离远小于极板的尺寸。可动极板的厚度可以忽略。

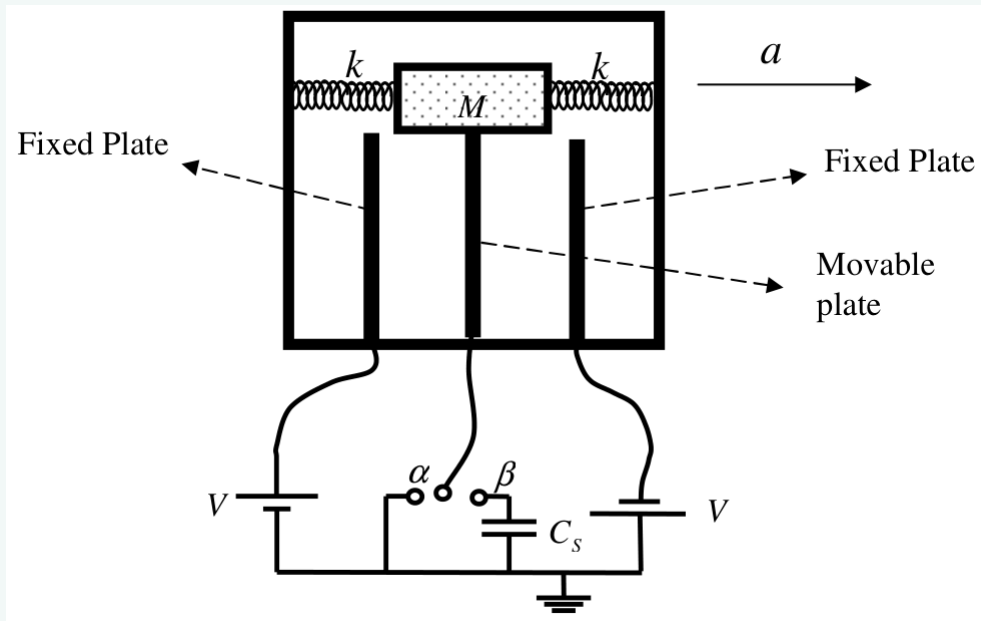


图 2

开关可以处于 α 和 β 两种状态之一。假设电容器装置随汽车一起加速运动，且加速度恒定。假设在这一恒定加速度作用期间，弹簧不发生振动，整个电容器装置的所有部件均处于各自的平衡位置，即它们彼此之间没有相对运动，因而相对于汽车也没有运动。

由于加速度的作用，可动极板将从两块固定极板的中间位置移动一定位移 x 。

2 考虑开关处于 α 状态的情形，即可动极板通过导线接地，此时

小题	问题	分值
2.1	求每个电容器的电荷量作为 x 的函数。	0.4
2.2	求可动极板所受的电场合力 F_E 作为 x 的函数。	0.4
2.3	假设 $d \gg x$ ，与 d^2 量级的项相比， x^2 量级的项可以忽略。简化上一小题的答案。	0.2
2.4	将可动极板所受的总力（电场力与弹簧力之和）写成 $-k_{\text{eff}}x$ 的形式，并给出 k_{eff} 的表达式。	0.7
2.5	将恒定加速度 a 表示为 x 的函数。	0.4

3 现在假设开关处于 β 状态，即可动极板通过一个电容为 C_S 的电容器接地（各电容器初始均不带电）。如果可动极板从中央位置移动了位移 x ，

小题	问题	分值
3.1	求电容器 C_S 两端的电势差 V_S 作为 x 的函数。	1.5
3.2	再次假设 $d \gg x$ ，并忽略相对于 d^2 量级的项而言的 x^2 量级的项。简化上一小题的答案。	0.2

4 我们希望调整本题中的参数，使安全气囊在正常制动时不会触发，而在碰撞时能够足够迅速地打开，以防驾驶员的头部撞上挡风玻璃或方向盘。如你在第 2 部分所见，弹簧和电荷对可动极板施加的力可以等效为一根劲度系数为 k_{eff} 的弹簧所施加的力。整个电容器装置类似于一个质量为 M 、劲度系数为 k_{eff} 的弹簧振子系统，受到恒定加速度 a 的影响，在本题中该加速度就是汽车的加速度。

注意：在本题的这一部分中，物体与弹簧在恒定加速度下处于平衡、因而相对于汽车静止的假设不再成立。

忽略摩擦，并采用以下参数数值：

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m},$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

小 题	问题	分 值
4.1	利用这些数据，求你在 2.3 中算出的电场力与弹簧力之比，并说明与弹簧力相比，电场力可以忽略。	0.6

虽然没有计算开关处于 β 状态时的电场力，但可以证明，在这种情况下，电场力同样很小，也可以忽略。

小 题	问题	分 值
4.2	如果汽车原先以恒定速度行驶，突然以恒定加速度 a 制动，可动极板的最大位移是多少？用参数表示你的答案。	0.6

假设开关处于 β 状态，且系统设计为当电容器两端的电压达到 $V_S = 0.15 \text{ V}$ 时触发安全气囊。我们希望在正常制动、汽车加速度小于重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 时，安全气囊不被触发，而在其他情况下被触发。

小 题	问题	分 值
4.3	为达到这一目的， C_S 应为多少？	0.6

我们希望确定安全气囊能否足够快地被触发，以防驾驶员的头部撞上挡风玻璃或方向盘。假设碰撞使汽车以大小等于 g 的加速度减速，而驾驶员的头部继续以恒定速度运动。

小 题	问题	分 值
4.4	估计驾驶员头部与方向盘之间的距离，求驾驶员头部撞上方向盘所需的时间 t_1 。	0.8
4.5	求安全气囊被触发所需的时间 t_2 ，并将其与 t_1 比较。安全气囊能否及时被触发？假设安全气囊瞬间打开。	0.9

题目译自官方英文原文。

答案

取朝向左侧固定极板的方向为 $x > 0$ 的方向。在第 2–4 部分中，该极板的电势为 $+V$ ；如图所示，取相反方向为汽车加速度 $a > 0$ 的方向。力的分量以 x 正方向为正， V_S 为可动极板相对于地的电势。记 $C_0 = \varepsilon_0 A/d$ 。

- 1.1: $F_E = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$ ，为吸引力。
- 1.2: $x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}$ ，方向朝向固定极板。

- 1.3: $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right)$ 。
- 1.4: $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d} \right)^{-1}$ 。
- 1.5: $U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}$ 。
- 2.1: 电荷量的大小: $Q_L = \frac{\varepsilon_0 AV}{d-x}$, $Q_R = \frac{\varepsilon_0 AV}{d+x}$ 。可动极板上相应的电荷分别为 $-Q_L$ 和 $+Q_R$ 。
- 2.2: $F_E = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right] = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$ 。
- 2.3: $F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x$ 。
- 2.4: $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x$, $k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}$ 。
- 2.5: $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$, 采用小位移近似。
- 3.1: $V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}$ 。
- 3.2: $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}$ 。
- 4.1: $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3} = 7.6 \times 10^{-9}$ 。因此 $k_{\text{eff}} \simeq 2k$ 。
- 4.2: $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}$ 。
- 4.3: $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}$ 。
- 4.4: $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ 。估计头部与方向盘之间的初始距离为 $L = 0.50 \text{ m}$, 得到 $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}$ 。
- 4.5: $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}$ 。由于 $t_2 \ll t_1$, 在题设假定下, 安全气囊能及时被触发。

解答

由于极板间距远小于极板尺寸, 以下始终忽略边缘电场。

1.1

面电荷密度为 $\sigma = Q/A$ 。均匀带电极板在另一极板处产生的电场大小为 $\sigma/(2\varepsilon_0)$ 。每块极板受到另一极板所产生电场的作用力, 因此吸引力的大小为

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

在电荷量固定时, 在平行板近似下, 该力与极板间距无关。

1.2

吸引力使可动极板向固定极板移动, 并使弹簧伸长 x 。力学平衡要求

$$kx = F_E.$$

因此,

$$x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}.$$

极板保持分离的解要求 $x < d$, 即

$$Q^2 < 2k\varepsilon_0 Ad.$$

1.3

极板间的电场为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

平衡时极板间距为 $d - x$, 因此

$$V = E(d - x).$$

代入位移得

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right).$$

1.4

根据给定的定义,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}.$$

由于 $C_0 = \varepsilon_0 A/d$,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 Ad} \right)^{-1}.$$

1.5

平衡时, 储存的能量由电容器的电场能和弹簧的弹性势能组成:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\varepsilon_0 A} + \frac{1}{2}kx^2.$$

利用 $x = Q^2/(2k\varepsilon_0 A)$,

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\varepsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \\ &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}. \end{aligned}$$

2.1

取朝向左侧极板的方向为 x 的正方向, 则左右两侧的间隙分别为 $d - x$ 和 $d + x$ 。因此, 两电容器的电容为

$$C_L = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\varepsilon_0 A}{d + x}.$$

当开关处于 α 位置时，可动极板接地。每个电容器的电压大小均为 V ，故

$$Q_L = C_L V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}.$$

左侧固定极板带电 $+Q_L$ ，可动极板与其相对的表面带电 $-Q_L$ 。右侧固定极板带电 $-Q_R$ ，可动极板与其相对的表面带电 $+Q_R$ 。

2.2

每块固定极板都吸引可动极板。左侧的吸引力沿 x 正方向，右侧的吸引力沿 x 负方向。利用 1.1 中的力的表达式，

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

因此

$$F_E = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right].$$

通分得

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 A V^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

该力与 x 同号：电吸引力倾向于增大可动极板朝较近极板方向的位移。

2.3

将精确结果改写为

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right)^{-2}.$$

当 $|x| \ll d$ 时，忽略 x^2/d^2 得

$$F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x.$$

2.4

两根弹簧均提供回复力。一根被压缩，另一根被拉伸，它们的合力为

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

加上线性化后的电场力，

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

因此，

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}.$$

电相互作用减小了回复力的等效劲度系数。小位移响应稳定的条件为 $k_{\text{eff}} > 0$ 。

2.5

汽车的加速度方向与 x 正方向相反。因此，在汽车参考系中，物体所受的惯性力为 $+Ma$ 。相对平衡要求

$$-k_{\text{eff}}x + Ma = 0.$$

所以

$$a = \frac{k_{\text{eff}}x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

该表达式采用了 2.3 中引入的小位移近似。

3.1

在 β 位置，可动极板、与其相连的导线以及 C_S 与导线相连的那块极板构成一个孤立导体。其总电荷初始为零，此后始终保持为零。

设其相对于地的电势为 V_S 。其三个电容器表面上的电荷分别为

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

由电荷守恒得

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

因此，

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

又有

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ad}{d^2 - x^2}.$$

代入得

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}.$$

特别地，在中央位置有 $V_S = 0$ ，向电势为 $+V$ 的极板移动时有 $V_S > 0$ 。

3.2

在分母中忽略相对于 d^2 而言的 x^2 ：

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S d^2}.$$

利用 $C_0 = \varepsilon_0 A/d$,

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$$

因此，在这一近似下，测得的电压与位移成正比。

4.1

电场力与弹簧力方向相反。两者的大小之比为

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 AV^2/d^3)|x|}{2k|x|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3}.$$

取 $d = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

电场力的贡献可以忽略，因此

$$\boxed{k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m.}}$$

根据题意，在 β 位置时我们也忽略电场力。

4.2

制动前，物体位于中央，且相对于汽车静止：

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

恒定加速度突然开始作用后，物体在汽车参考系中的运动方程为

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

定义

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

满足初始条件的解为

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

第一次达到最大位移时 $\omega t = \pi$ ，于是

$$\boxed{x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$$

最大位移为静态平衡位移的两倍，因为无阻尼的物体会越过其新的平衡位置。

4.3

设触发电压为

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V}.$$

要将触发边界设在 $a = g$ ，在恒定加速度 g 作用期间的最大电压必须等于 V_{th} 。

相应的最大位移为

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

因此

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

这说明小位移近似是合理的。

由 3.2 得，

$$V_{\text{th}} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

解出所需电容，

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{\text{th}}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{\text{th}}} - 1 \right).$$

这里,

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

且

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

因此,

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

按所给数据的精度,

$$\boxed{C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.}$$

在这一恒定加速度制动模型中, 最大电压与 a 成正比, 因此, 小于 g 的加速度不会使电压达到阈值, 而等于或大于 g 的加速度则会。

作为比较, 保留 3.1 中的精确几何关系得

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (Vx_g/V_{\text{th}} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

其舍入后的数值相同。

4.4

设 L 为驾驶员头部与方向盘沿运动方向的初始距离。

初始时两者速度相同。头部继续做匀速运动, 而方向盘随汽车一起以大小为 g 的加速度减速。因此, 两者的相对加速度大小为 g , 经过时间 t 后, 两者间距减小了

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2}gt^2.$$

当这一距离等于 L 时发生碰撞:

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}}.$$

取合理估计值 $L = 0.50 \text{ m}$,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

在 $a = g$ 时, 所选电容使电压在最大位移 x_g 处达到触发电压。运动规律为

$$x(t) = \frac{Mg}{2k}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

由于 $x_g = Mg/k$, 首次触发时满足

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

即

$$\omega t_2 = \pi.$$

因此,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

代入数值得

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

与估计的头部碰撞时间相比,

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

触发之前, 头部与方向盘的间距仅减小了

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

因此, 按题设假定气囊瞬间打开, **安全气囊在头部到达方向盘之前很早就已被触发。**

解答已与官方解答核对。

题目 3: 双星

两颗绕其质心转动的恒星构成一个双星系统。我们银河系中几乎一半的恒星属于双星系统。从地球上不容易辨认出这些恒星系统中的大多数具有双星性质, 因为两颗恒星之间的距离远小于它们到我们的距离, 因此无法用望远镜将它们分辨开来。所以, 我们必须利用光度测量或光谱测量, 观测某颗恒星的光强或光谱的变化, 以判断它是否为双星系统。

双星的光度测量

如果我们恰好位于两颗恒星的运动平面内, 那么在某些时刻, 一颗恒星会遮掩另一颗恒星(从其前方经过), 从我们的观测位置看, 整个系统的光强就会随时间变化。这类双星系统称为食双星。

1 假设两颗恒星以恒定的角速度 ω 绕它们的共同质心做圆周运动, 而我们恰好位于该双星系统的运动平面内。再假设两颗恒星的表面温度分别为 T_1 和 T_2 ($T_1 > T_2$), 相应的半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 > R_2$)。图 1 给出了在地球上测得的总光强随时间的变化。精确测量表明, 在两个极小值处, 来自恒星的入射光强分别为接收到的两颗恒星的总光强 I_0 的 90% 和 63%, 其中 ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$)。图 1 的纵轴表示比值 I/I_0 , 横轴以天为单位。

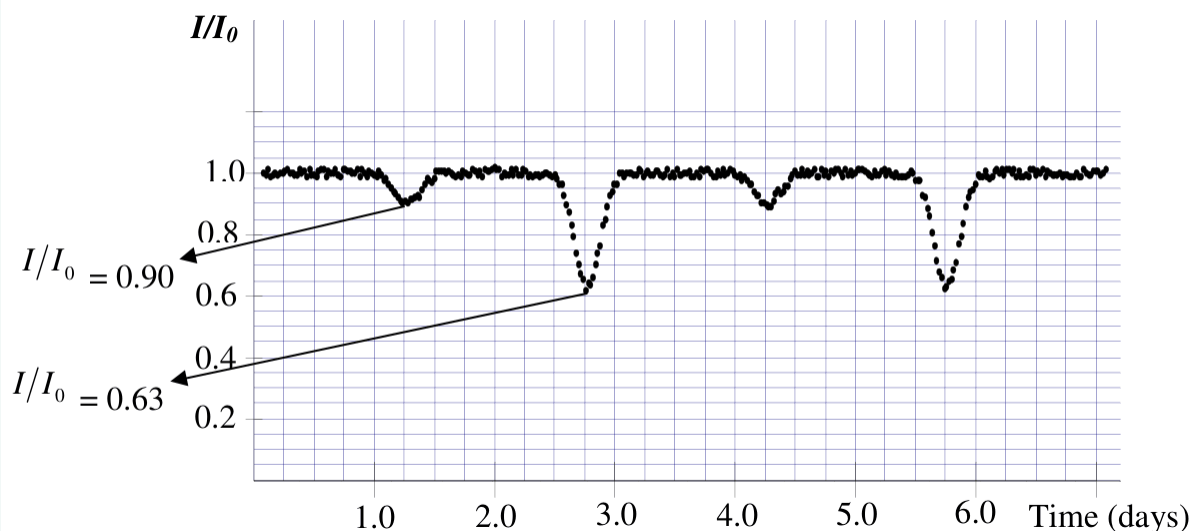


图 1. 接收到的双星系统的相对光强随时间的变化。纵轴以 $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ 归一化。时间以天为单位。

1.1 — 0.8 分

求轨道运动的周期。答案以秒为单位，保留两位有效数字。

该系统的角频率是多少？以 rad/sec 为单位。

作为良好的近似，可以把接收到的恒星辐射看作来自一个平面圆盘的均匀黑体辐射，该圆盘的半径等于恒星的半径。因此，接收到的恒星辐射功率正比于 AT^4 ，其中 A 是圆盘的面积， T 是恒星的表面温度。

1.2 — 1.6 分

利用图 1 求比值 T_1/T_2 和 R_1/R_2 。

双星系统的光谱测量

在本节中，我们将利用双星系统的光谱测量实验数据，计算双星的天文学参数。

原子在特定的特征波长处吸收或发射辐射。因此，观测到的恒星光谱中含有由恒星大气中的原子产生的吸收线。钠有一条特征黄色谱线（ D_1 线），波长为 $5895.9 \text{ \AA}$ （ $10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$ ）。我们考察上一节中的双星系统在这一波长处的钠原子吸收光谱。由于恒星相对于我们运动，我们接收到的双星光谱会发生多普勒频移。两颗恒星的速率不同，因此每颗恒星的吸收波长的偏移量也不同。由于恒星的速率远小于光速，必须进行非常精确的波长测量才能观测到多普勒频移。本题所考虑的双星系统的质心速率远小于恒星的轨道速率。因此，所有多普勒频移都可以归因于恒星的轨道速度。表 1 给出了我们观测到的双星系统中两颗恒星的光谱测量结果。

表 1: 双星系统的钠 D_1 线吸收光谱

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(注：不需要将此表中的数据绘制成图)

2 利用表 1,

2.1 — 1.8 分

设 v_1 和 v_2 分别为两颗恒星的轨道速率。求 v_1 和 v_2 。
光速为 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。忽略所有相对论效应。

2.2 — 0.7 分

求两颗恒星的质量比 (m_1/m_2)。

2.3 — 0.8 分

设 r_1 和 r_2 分别为两颗恒星到它们质心的距离。
求 r_1 和 r_2 。

2.4 — 0.2 分

设 r 为两颗恒星之间的距离。求 r 。

3 两颗恒星之间仅有万有引力作用。

3.1 — 1.2 分

求每颗恒星的质量，保留一位有效数字。
万有引力常量为 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 。

恒星的一般特征

4 大多数恒星通过相同的机制产生能量。因此，恒星的质量 M 与光度 L 之间存在一个经验关系，其中光度是恒星的总辐射功率。该关系可写成 $L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha$ 。

这里， $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 为太阳质量， $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 为太阳光度。图 2 用双对数坐标图表示了这一关系。

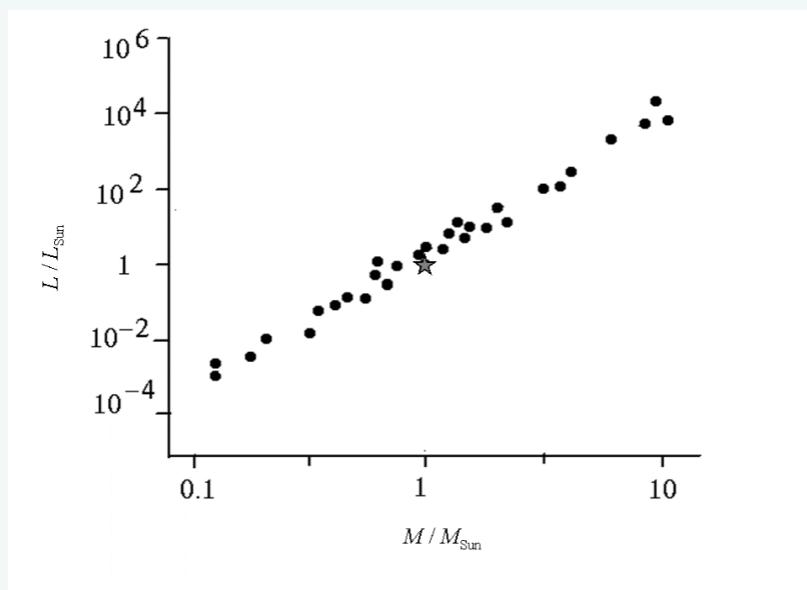


图 2. 恒星的光度随质量按幂律变化。该图采用双对数坐标。星形符号表示太阳，其质量为 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，光度为 $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 。

4.1 — 0.6 分

求 α ，保留一位有效数字。

4.2 — 0.6 分

设 L_1 和 L_2 分别为前面各节所研究的双星系统中两颗恒星的光度。求 L_1 和 L_2 。

4.3 — 0.9 分

该恒星系统到我们的距离 d 是多少光年？

求距离时可以利用图 1。一光年是光在一年内传播的距离。

4.4 — 0.4 分

从我们的观测位置看，两颗恒星之间的最大角距离 θ 是多少？

4.5 — 0.4 分

能够分辨这两颗恒星的光学望远镜，其最小口径 D 是多少？

题目译自官方英文原文。

答案

后续结果使用未经舍入的中间值。

- 1.1: $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$; $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。
- 1.2: $T_1/T_2 \simeq 1.39$; $R_1/R_2 \simeq 1.56$ 。
- 2.1: $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}$; $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}$ 。
- 2.2: $m_1/m_2 \simeq 1.7$ 。
- 2.3: $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}$; $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}$ 。
- 2.4: $r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}$ 。
- 3.1: 保留一位有效数字， $m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}$, $m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}$ 。
- 4.1: $\alpha \simeq 4$ 。
- 4.2: $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}$; $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}$ 。
- 4.3: $d \simeq 82 \text{ 光年} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}$ 。
- 4.4: $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$, 或 $2.7 \times 10^{-3} \text{ 角秒}$ 。
- 4.5: $D_{\min} \simeq 54 \text{ m}$, 采用瑞利判据，并使用给定的钠谱线波长 589.59 nm 。

解答

1.1

轨道周期是相邻两个深度相同的极小值之间的时间间隔。由图 1 可得，周期约为 3.0 天。相邻的两个深度不同的极小值对应两次不同的合，相隔半个周期。

因此

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

设两颗恒星在未被遮掩时对地球处光强的贡献分别为

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

其中，两颗恒星的 C 相同，因为可以认为它们到我们的距离相同。在食以外的时段，

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

视线位于轨道平面内的几何条件使得食发生时两星中心重合。由于 $R_1 > R_2$ ，较大的恒星能够完全遮住较小的恒星。在这次食中，损失的光强为 I_2 。

在另一次食中，较小的恒星挡住较热恒星上与自身视圆面大小相同的一块区域。此时损失的光强为

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

由于 $T_1 > T_2$ ，所以 $B > I_2$ 。因此，较浅的极小值对应恒星 2 被遮住的那次食。

由较浅的极小值可得

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

由较深的极小值可得

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

将 B 除以 I_2 ，得

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

所以

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

同理，

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

因此

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

对于非相对论运动，多普勒频移满足

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

其中 u 为视向速度，远离我们时取正值，且

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ \AA}.$$

当视线位于圆轨道平面内时，视向速度在 $-v_i$ 与 $+v_i$ 之间按正弦规律变化。因此，波长变化的振幅决定轨道速率：

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

利用表中列出的极值,

$$\Delta\lambda_1 = \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ \AA} = 1.8 \text{ \AA},$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ \AA} = 3.1 \text{ \AA}.$$

因此,

$$v_1 = 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.$$

所以

$$v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

2.2

在质心参考系中, 两颗恒星的动量大小相等、方向相反:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

因此,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7.$$

2.3

两颗恒星具有相同的角频率。对于匀速圆周运动,

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

使用前面计算中未经舍入的数值, 得到

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

因此,

$$r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}.$$

2.4

质心位于两颗恒星之间, 因此它们之间的距离为

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}.$$

所以, 保留两位有效数字, 得

$$r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3.1

万有引力为每颗恒星提供向心力:

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2.$$

由此可得

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

代入数值并保留中间计算的位数，得到

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

因此，按要求保留一位有效数字的答案为

$$\boxed{m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

下文将保留计算所得的未经舍入的质量值，因为过早对质量值进行舍入，再对其求幂，会引入较大的数值误差。

4.1

对经验关系取对数，得

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

因此， α 是双对数坐标图中趋势线的斜率。

趋势线近似经过

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = (1, 1) \quad \text{和} \quad (10, 10^4).$$

因此

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

取 $\alpha = 4$ ，有

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}}\right)^4.$$

使用通过动力学计算得到的未经舍入的质量值，

$$\begin{aligned} L_1 &= 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}}\right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W}, \\ L_2 &= 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}}\right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}. \end{aligned}$$

因此，

$$\boxed{L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}}.$$

作为一致性检验，这些结果给出 $L_1/L_2 \simeq 8.8$ ，接近光度测量得到的比值 $I_1/I_2 = 9$ ，这与经验定律的近似性及测量数据的精度相符。

4.3

对于各向同性辐射，光度为 L 的恒星在距离 d 处产生的光强为 $L/(4\pi d^2)$ 。在食以外的时段，两颗恒星的辐射通量均完整地贡献于总光强：

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

因此

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

取一年约为 365 天,

$$1 \text{ 光年} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

因此,

$$d \simeq 82 \text{ 光年} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}.$$

4.4

当两颗恒星的连线垂直于视线时, 它们的投影间距最大, 此时其值为 r 。

由于 $r \ll d$, 由小角度近似可得

$$\theta_{\max} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad}.$$

因此

$$\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

或近似为

$$\theta_{\max} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ 角秒}.$$

4.5

对于具有圆形孔径、分辨率达到衍射极限的理想望远镜, 瑞利判据给出的最小可分辨角距离为:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

因此, 能够在两颗恒星角距离最大时将它们分辨开的最小口径满足

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

使用题目给出的钠谱线波长,

$$\lambda = 5895.9 \text{ \AA} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ m},$$

得到

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ m} \simeq \boxed{54 \text{ m}}.$$

更一般地, 其对波长的依赖关系为

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ m} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

解答已与官方解答核对。