

IPhO 2007

Teorik sorular ve çözümler · İsfahan, İran · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2007/

Soru 1: Boyut analizi ve kara delikler (Hawking ışıması)

Fizikte bir eşitlik bağıntısı söz konusu olduğunda, denklemin her iki tarafı aynı türden olmalı, yani aynı boyutlara sahip olmalıdır. Örneğin, denklemin sağ tarafındaki niceliğin bir uzunluğu, sol tarafındaki niceliğin ise bir zaman aralığını temsil ettiği bir durum olamaz. Bu olgudan yararlanarak, bazen problemi analitik olarak çözmeden bir fiziksel bağıntının biçimini neredeyse tamamen çıkarabiliriz. Örneğin, sabit bir yer çekimi ivmesi g etkisinde bir cismin h yüksekliğinden düşmesi için geçen süreyi bulmamız istenseydi, yalnızca g ve h niceliklerini kullanarak bir zaman aralığını temsil eden bir nicelik oluşturmamız gerektiğini ve bunu yapmanın tek olası yolunun $T = a(h/g)^{1/2}$ olduğunu ileri sürebilirdik. Bu çözümün, henüz belirlenmemiş, *boyutsuz* bir a katsayısı içerdiğine ve dolayısıyla bu katsayının bu yöntemle belirlenemeyeceğine dikkat edin. Bu katsayı 1 , $1/2$, $\sqrt{3}$, π gibi bir sayı ya da herhangi bir başka gerçek sayı olabilir. Fiziksel bağıntıları çıkarmaya yarayan bu yöntemle *boyut analizi* denir. Boyut analizinde boyutsuz katsayılar önemli değildir ve bunları yazmamız gerekmez. Neyse ki çoğu fizik probleminde bu katsayılar 1 mertebesinde ve bunların çıkarılması fiziksel niceliklerin büyüklük mertebelerini değiştirmez. Dolayısıyla, yukarıdaki probleme boyut analizi uygulandığında $T = (h/g)^{1/2}$ elde edilir.

Genellikle bir fiziksel niceliğin boyutları, dört temel niceliğin boyutları cinsinden yazılır: M (kütle), L (uzunluk), T (zaman) ve K (sıcaklık). Herhangi bir x niceliğinin boyutları $[x]$ ile gösterilir. Örneğin, v hızının, E_k kinetik enerjisinin ve C_V ısı kapasitesinin boyutlarını ifade etmek için şöyle yazarız: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1 Temel Sabitler ve Boyut Analizi

1.1	Temel sabitlerin, yani Planck sabiti h , ışık hızı c , evrensel kütle çekim sabiti G ve Boltzmann sabiti k_B 'nin boyutlarını uzunluk, kütle, zaman ve sıcaklık boyutları cinsinden bulun.	0.8
-----	--	-----

Stefan-Boltzmann yasasına göre, bir kara cismin birim yüzey alanından birim zamanda yayılan toplam enerji olan kara cismin ışıma gücü yoğunluğu, σ Stefan-Boltzmann sabiti ve θ kara cismin mutlak sıcaklığı olmak üzere $\sigma\theta^4$ 'e eşittir.

1.2	Stefan-Boltzmann sabitinin boyutlarını uzunluk, kütle, zaman ve sıcaklık boyutları cinsinden belirleyin.	0.5
-----	--	-----

Stefan-Boltzmann sabiti temel bir sabit değildir ve temel sabitler cinsinden yazılabilir; yani $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$ yazılabilir. Bu bağıntıda a , 1 mertebesinde boyutsuz bir parametredir. Daha önce belirtildiği gibi, a 'nın tam değeri bizim açımızdan önemli değildir; bu nedenle onu 1 'e eşit alacağız.

1.3	Boyut analizini kullanarak α , β , γ ve δ 'yi bulun.	1.0
-----	---	-----

2 Kara Delik Fiziği

Sorunun bu bölümünde, boyut analizini kullanarak kara deliklerin bazı özelliklerini bulmak istiyoruz. Fizikte *saçsızlık teoremi* olarak bilinen bir teoreme göre, bu soruda ele aldığımız kara deliğin bütün özellikleri yalnızca kara deliğin kütesine bağlıdır. Bir kara deliğin özelliklerinden biri, *olay ufkunun* alanıdır. Kabaca söylemek gerekirse, olay ufku kara deliğin sınırıdır. Bu sınırın içinde kütle çekimi o kadar güçlüdür ki ışık bile sınırın çevrelediği bölgeden dışarı çıkamaz.

Bir kara deliğin kütlesi m ile olay ufkunun alanı A arasında bir bağıntı bulmak istiyoruz. Bu alan kara deliğin kütesine, ışık hızına ve evrensel kütle çekim sabitine bağlıdır. 1.3'te olduğu gibi $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ yazacağız.

2.1	Boyut analizini kullanarak α , β ve γ 'yı bulun.	0.8
-----	--	-----

2.1'in sonucundan, bir kara deliğin olay ufkunun alanının kütlesiyle birlikte arttığı anlaşılır. Klasik bakış açısına göre, bir kara delikten hiçbir şey çıkmaz ve dolayısıyla bütün fiziksel süreçlerde olay ufkunun alanı yalnızca artabilir. Termodinamiğin ikinci yasasıyla benzerlik kuran Bekenstein, kara deliğe olay ufkunun alanıyla orantılı bir S entropisi atamayı, yani $S = \eta A$ bağıntısını önerdi. Başka argümanlar da bu varsayımı daha makul hâle getirmiştir.

2.2	Entropinin boyutlarını bulmak için entropinin termodinamik tanımı olan $dS = dQ/\theta$ bağıntısını kullanın. dQ alışverişi yapılan ısı, θ ise sistemin mutlak sıcaklığıdır.	0.2
2.3	1.3'te olduğu gibi, boyutlu η sabitini h , c , G ve k_B temel sabitlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edin.	1.1

Sorunun geri kalanında boyut analizi kullanmayın; ancak önceki bölümlerde elde ettiğiniz sonuçları kullanabilirsiniz.

3 Hawking Işınması

Hawking, yarı kuantum mekanik bir yaklaşımla, klasik bakış açısının aksine kara deliklerin, *Hawking sıcaklığı* adı verilen bir sıcaklıktaki kara cismin ışınmasına benzer bir ışınma yaptığını ileri sürdü.

3.1	Kara deliğin enerjisini kütlesi cinsinden veren $E = mc^2$ bağıntısını ve termodinamik yasalarını kullanarak bir kara deliğin Hawking sıcaklığı θ_H 'yi kütlesi ve temel sabitler cinsinden ifade edin. Kara deliğin çevresi üzerinde iş yapmadığını varsayın.	0.8
3.2	Yalıtılmış bir kara deliğin kütlesi, Hawking ışıması nedeniyle değişir. Stefan-Boltzmann yasasını kullanarak bu değişim hızının kara deliğin Hawking sıcaklığı θ_H 'ye bağımlılığını bulun ve bunu kara deliğin kütlesi ve temel sabitler cinsinden ifade edin.	0.7
3.3	Kütlesi m olan yalıtılmış bir kara deliğin tamamen buharlaşması, yani bütün kütesini kaybetmesi için geçen t^* süresini bulun.	1.1

Termodinamik açıdan kara delikler bazı sıra dışı davranışlar sergiler. Örneğin, bir kara deliğin ısı kapasitesi negatiftir.

3.4	Kütlesi m olan bir kara deliğin ısı kapasitesini bulun.	0.6
-----	---	-----

4 Kara Delikler ve Kozmik Arka Plan Işıması

Kozmik arka plan ışımasına maruz kalan bir kara delik düşünün. Kozmik arka plan ışıması, tüm evreni dolduran, θ_B sıcaklığındaki bir kara cisim ışımasıdır. Dolayısıyla toplam alanı A olan bir cisim, birim zamanda $\sigma\theta_B^4 \times A$ 'ya eşit bir enerji alır. Bu nedenle bir kara delik, Hawking ışıması yoluyla enerji kaybederken kozmik arka plan ışımasından enerji kazanır.

4.1	Bir kara deliğin kütlesinin değişim hızını, kara deliğin kütlesi, kozmik arka plan ışımasının sıcaklığı ve temel sabitler cinsinden bulun.	0.8
4.2	Belirli bir m^* kütlesinde bu değişim hızı sıfır olacaktır. m^* 'ı bulun ve θ_B ile temel sabitler cinsinden ifade edin.	0.4
4.3	4.2'deki cevabınızı kullanarak 4.1 bölümündeki cevabınızda θ_B 'nin yerine karşılığını yazın ve bir kara deliğin kütlesinin değişim hızını m , m^* ve temel sabitler cinsinden ifade edin.	0.2
4.4	Kozmik arka plan ışımasıyla ısı dengede olan bir kara deliğin Hawking sıcaklığını bulun.	0.4
4.5	Denge kararlı mı, kararsız mı? Neden? (Cevabınızı matematiksel olarak ifade edin.)	0.6

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Bu sonuçlarda, belirtildiği üzere, Bölüm 1–2'deki belirlenmemiş boyutsuz katsayılar 1'e eşit alınmıştır. Türev ve integral işlemlerinden kaynaklanan sayısal çarpanlar korunmuştur. $\dot{m} = dm/dt$ yazalım.

- 1.1: $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- 1.2: $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.
- 1.3: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4)$; buradan $\sigma = \frac{k_B^4}{h^3c^2}$ elde edilir.
- 2.1: $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2)$; buradan $A = \frac{G^2m^2}{c^4}$ elde edilir.
- 2.2: $[S] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- 2.3: $\eta = \frac{k_Bc^3}{hG}$.
- 3.1: $\theta_H = \frac{hc^3}{2Gk_Bm}$.
- 3.2: $\dot{m} = -\frac{\sigma A\theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2\theta_H^2}{4hc^2} = -\frac{hc^4}{16G^2m^2}$.
- 3.3: $t^* = \frac{16G^2m^3}{3hc^4}$.
- 3.4: $C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc} < 0$.
- 4.1: $\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}$.
- 4.2: $m^* = \frac{2Gk_B\theta_B}{hc^3}$.
- 4.3: $\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]$.

- **4.4:** $\theta_H(m^*) = \theta_B$.

- **4.5: Kararsızdır.** Küçük bir kütle pertürbasyonu $\delta\dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} \delta m$ bağıntısını sağlar; dolayısıyla büyüklüğü üstel olarak artar.

Çözüm

Soruda belirtilen, yalnızca kütleyle bağlı kara delik modelini ve kara cisim ışıma ve soğurma yasalarını kullanıyoruz. Bütün ifadelerde, Bölüm 1–2'de boyutsuz katsayılar için benimsenen normalizasyon geçerlidir. Sayısal girdi değerleri verilmediğinden, istenen sonuçlar semboliktir.

1.1

Foton enerjisi bağıntısı $E = h\nu$, $[\nu] = T^{-1}$ olmak üzere,

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2T^{-1}.$$

sonucunu verir.

c bir hız olduğundan,

$$[c] = LT^{-1}.$$

Newton'un kütle çekim yasası $F = Gm_1m_2/r^2$,

$$[G] = \frac{[F]L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

sonucunu verir.

$k_B\theta$ çarpımı enerji boyutuna sahiptir; dolayısıyla

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

Bunların SI birimleri sırasıyla J s, $m s^{-1}$, $m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ve $J K^{-1}$ 'dir.

1.2

Toplam ışıma gücü için Stefan–Boltzmann yasası şöyledir:

$$P = \sigma A\theta^4.$$

Buna göre,

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

Buna karşılık gelen SI birimi $W m^{-2} K^{-4}$ 'tür.

1.3

Belirtilen $a = 1$ katsayısıyla,

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

Sağ tarafın boyutları şöyledir:

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

Bunları $MT^{-3}K^{-4}$ ile eşleştirmek şu denklemleri verir:

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

Çözüldüğünde,

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

Böylece

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ için,

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

Dolayısıyla,

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

Son denklem $\beta = -2\alpha$ sonucunu verir; ardından uzunluk boyutuna ait denklemden $\alpha = 2$ elde edilir.

Böylece

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

ve

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

Termodinamik entropi bağıntısı

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

uyarınca entropinin boyutları şöyledir:

$$\boxed{[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2 T^{-2} K^{-1}}.$$

SI birimi $J K^{-1}$ 'dir.

2.3

$S = \eta A$ olduğundan,

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2} K^{-1}.$$

Şöyle yazalım:

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

Boyutları eşitlemek şu denklemleri verir:

$$\begin{aligned}
p - r + s &= 1, \\
2p + q + 3r + 2s &= 0, \\
-p - q - 2r - 2s &= -2, \\
-s &= -1.
\end{aligned}$$

Böylece $s = 1$, $p = r$ olur ve kalan denklemlerden

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\eta = \frac{k_B c^3}{hG}.$$

Bu sonuç olay ufkunun alanıyla birleştirildiğinde, entropi kütlenin bir fonksiyonu olarak elde edilir:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

Kara deliğin termodinamik durumlar ailesi için, iş terimi bulunmadığında birinci yasa şöyledir:

$$dE = \theta_H dS.$$

Şu bağıntılardan,

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

şunları elde ederiz:

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

Buna göre,

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_B m}}.$$

Kütle arttıkça sıcaklık azalır.

3.2

Dışarıya yayılan ışımanın gücü şöyledir:

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

Yalıtılmış bir kara delik için enerjinin korunumu

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

bağıntısını gerektirir; burada eksi işareti kütle kaybını ifade eder. Dolayısıyla,

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

3.1'deki sıcaklık yerine yazıldığında,

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

Yalnızca sıcaklığa olan bağımlılığı ifade etmek için şu bağıntıyı yerine yazalım:

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H}.$$

Bu işlem şu sonucu verir:

$$\dot{m} = -\frac{k_B^2\theta_H^2}{4hc^2}.$$

Böylece kütle kaybı hızının büyüklüğü θ_H^2 ile orantılıdır. Birim alan başına ışıma θ_H^4 ile orantılı olsa da olay ufkunun alanı m^2 ile, dolayısıyla θ_H^{-2} ile orantılıdır.

3.3

Başlangıç kütlesi m olsun ve anlık kütleyi $\mu(t)$ ile gösterelim. Şu tanımlı yapalım:

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

Kütle kaybı denklemi şöyledir:

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

Değişkenleri ayırıp $\mu(0) = m$ başlangıç koşulundan itibaren integral alırsak,

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

dolayısıyla

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

Böylece

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

Tam buharlaşma $\mu(t^*) = 0$ olduğunda gerçekleşir:

$$t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2m^3}{3hc^4}.$$

Bu, sorudaki buharlaşma modelinin sıfır kütleye kadar uzatılmasıyla elde edilen yaşam süresidir.

3.4

İş terimi bulunmadığından ısı kapasitesi şöyledir:

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

Şu bağıntıyı kullanarak,

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

şunu elde ederiz:

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

$\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$ yerine yazıldığında,

$$C = -\frac{2Gk_B m^2}{hc}.$$

Eşdeğer olarak,

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

Isı kapasitesi negatiftir: enerji soğurmak kütleyi artırıp sıcaklığı düşürürken, enerji kaybetmek sıcaklığı yükseltir.

4.1

Belirtilen modele göre soğurulan ve yayılan güçler şöyledir:

$$P_{\text{in}} = \sigma A \theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

Enerjinin korunumu şu bağıntıyı verir:

$$c^2 \dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

dolayısıyla

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2} (\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

Daha önce türetilen ifadeler yerine yazıldığında,

$$\dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{hc^4}{16G^2 m^2}.$$

İlk terim soğurmayı, ikinci terim ise ışımayı temsil eder.

4.2

$m = m^*$ olduğunda net değişim hızı sıfırdır:

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

Pozitif sıcaklıklar için bu koşul şunu gerektirir:

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

3.1 kullanıldığında,

$$\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B,$$

ve dolayısıyla

$$m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_B}.$$

4.3

4.2'den,

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*}.$$

4.1'de yerine yazıldığında şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right).\end{aligned}$$

Eşdeğer olarak,

$$\boxed{\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]}.$$

4.4

Isıl dengede soğurulan ve yayılan güçler eşittir; dolayısıyla

$$\boxed{\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B}.$$

4.5

Arka plan sıcaklığını sabit tutalım; böylece m^* da sabittir. Şöyle yazalım:

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

Türev alındığında,

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

Dengede,

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} > 0.$$

Küçük bir $m = m^* + \delta m$ pertürbasyonu için doğrusallaştırma dolayısıyla

$$\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m,$$

bağıntısını verir; bunun çözümü şöyledir:

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2 (m^*)^3} \right].$$

Pertürbasyon büyür; dolayısıyla

$$\boxed{\text{denge kararsızdır}}.$$

4.3'teki işaretler aynı sonucu doğrudan gösterir:

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

Biraz daha ağır bir kara delik, arka plandan daha soğuktur ve daha da fazla kütle kazanır. Biraz daha hafif olan ise daha sıcaktır ve daha da fazla kütle kaybeder.

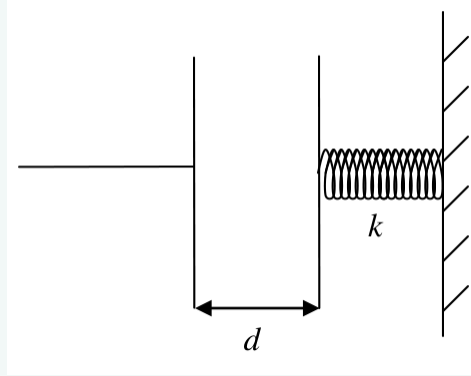
Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Otomobil hava yastığı için kapasitif ivmeölçer

Bu soruda, çarpışma sırasında otomobillerin güvenlik hava yastıklarını etkinleştirmek üzere tasarlanmış ivmeölçerlerin basitleştirilmiş bir modelini ele alıyoruz. İvme belirli bir sınırı aştığında, devrenin belirli bir noktasındaki gerilim gibi sistemin elektriksel parametrelerinden birinin bir eşik değerini aşacağı ve bunun sonucunda hava yastığının etkinleşeceği bir elektromekanik sistem kurmak istiyoruz.

Not: Bu soruda yerçekimini ihmal ediniz.

1 Şekil 1'deki gibi paralel levhalı bir kondansatörü ele alınız. Kondansatördeki her bir levhanın alanı A , iki levha arasındaki uzaklık ise d 'dir. İki levha arasındaki uzaklık, levhaların boyutlarından çok küçüktür. Bu levhalardan biri, yay sabiti k olan bir yay aracılığıyla bir duvara bağlıdır; diğer levha ise sabittir. Levhalar arasındaki uzaklık d iken yay ne sıkışmış ne de uzamıştır; başka bir deyişle, bu durumda yaya kuvvet uygulanmaz. Levhalar arasındaki havanın elektriksel geçirgenliğinin boşluğun elektriksel geçirgenliği ϵ_0 olduğunu varsayınız. Kondansatörün, levhalar arasındaki bu uzaklığa karşılık gelen sığası $C_0 = \epsilon_0 A/d$ 'dir. Levhalara $+Q$ ve $-Q$ yüklerini verip sistemin mekanik dengeye gelmesini bekliyoruz.

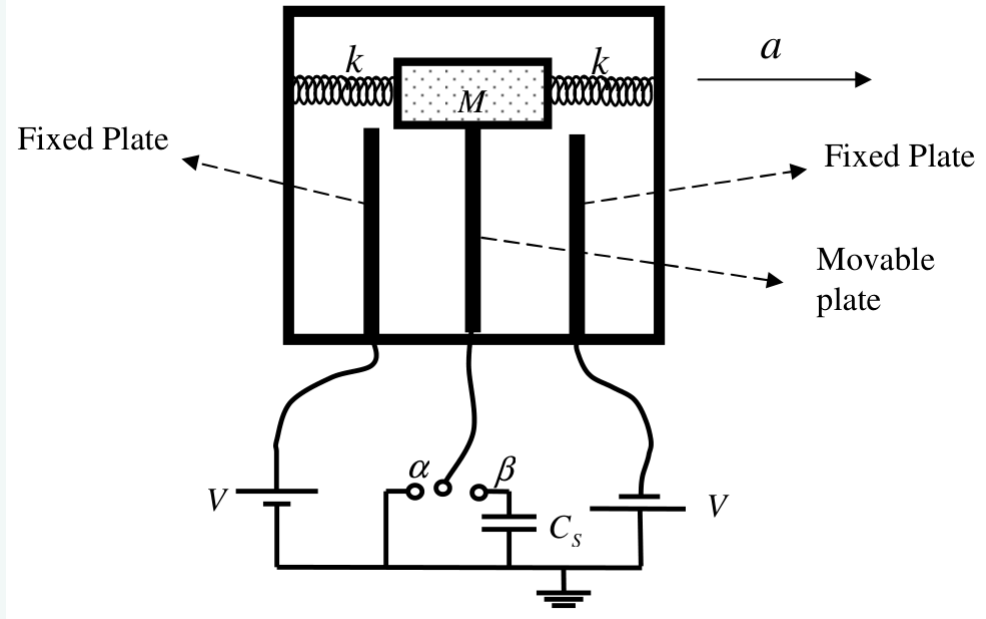


Şekil 1

Kısım	Soru	Puan
1.1	Levhaların birbirine uyguladığı elektriksel kuvveti, F_E , hesaplayınız.	0.8
1.2	Yaya bağlı levhanın yer değiştirmesi x olsun. x 'i bulunuz.	0.6
1.3	Bu durumda kondansatörün levhaları arasındaki elektriksel potansiyel farkı V , Q , A , d , k cinsinden nedir?	0.4
1.4	Kondansatörün, yükün potansiyel farkına oranı olarak tanımlanan sığası C olsun. C/C_0 'ı Q , A , d ve k 'nin fonksiyonu olarak bulunuz.	0.3
1.5	Sistemde depolanan toplam enerji U , Q , A , d ve k cinsinden nedir?	0.6

Şekil 2, kütlesi ihmal edilebilen iletken bir levhaya ve yay sabitleri aynı k değerinde olan iki yaya bağlı bir M kütlesini göstermektedir. İletken levha, iki sabit iletken levha arasındaki boşlukta ileri geri hareket edebilir. Bu levhaların hepsi birbirine benzer ve aynı A alanına sahiptir. Böylece bu üç levha iki kondansatör oluşturur. Şekil 2'de gösterildiği gibi, sabit levhalar verilen V ve $-V$ potansiyellerine bağlanmış, ortadaki levha ise iki konumlu bir anahtar üzerinden topraklanmıştır.

Hareketli levhaya bağlı tel, levhanın hareketini etkilemez ve üç levha her zaman paralel kalır. Düzeneğin bütünü ivmelenmiyorken her bir sabit levhadan hareketli levhaya olan uzaklık d 'dir ve bu uzaklık levhaların boyutlarından çok küçüktür. Hareketli levhanın kalınlığı ihmal edilebilir.



Şekil 2

Anahtar, α ve β konumlarından birinde olabilir. Kondansatör düzeneğinin otomobile birlikte ivmelendiğini ve ivmenin sabit olduğunu varsayınız. Bu sabit ivmelenme sırasında yayın salınmadığını ve bu bileşik kondansatörün tüm bileşenlerinin denge konumlarında olduğunu, yani birbirlerine ve dolayısıyla otomobile göre hareket etmediklerini varsayınız.

İvmelenme nedeniyle hareketli levha, iki sabit levhanın ortasından belirli bir x miktarı kadar yer değiştirecektir.

2 Anahtarın α konumunda olduğu, yani hareketli levhanın bir tel aracılığıyla topraklandığı durumu ele alınız; bu durumda

Kısım	Soru	Puan
2.1	Her bir kondansatörün yükünü x 'in fonksiyonu olarak bulunuz.	0.4
2.2	Hareketli levha üzerindeki net elektriksel kuvveti, F_E , x 'in fonksiyonu olarak bulunuz.	0.4
2.3	$d \gg x$ olduğunu ve x^2 mertebesindeki terimlerin d^2 mertebesindeki terimlere göre ihmal edilebileceğini varsayınız. Önceki kısma verdiğiniz cevabı sadeleştiriniz.	0.2
2.4	Hareketli levha üzerindeki toplam kuvveti (elektriksel kuvvet ile yay kuvvetlerinin toplamını) $-k_{\text{eff}}x$ biçiminde yazınız ve k_{eff} 'in ifadesini veriniz.	0.7
2.5	Sabit ivme a 'yı x 'in fonksiyonu olarak ifade ediniz.	0.4

3 Şimdi anahtarın β konumunda olduğunu, yani hareketli levhanın sığası C_s olan bir kondansatör üzerinden topraklandığını varsayınız (başlangıçta kondansatörler üzerinde yük yoktur). Hareketli levha merkez konumundan x miktarı kadar yer değiştirirse,

Kısım	Soru	Puan
3.1	C_s kondansatörünün uçları arasındaki elektriksel potansiyel farkı V_S 'yi x 'in fonksiyonu olarak bulunuz.	1.5

Kısım	Soru	Puan
3.2	Yine $d \gg x$ olduğunu varsayınız ve x^2 mertebesindeki terimleri d^2 mertebesindeki terimlere göre ihmal ediniz. Önceki kısma verdiğiniz cevabı sadeleştiriniz.	0.2

4 Sorudaki parametreleri, hava yastığı normal frenleme sırasında etkinleşmeyecek, ancak bir çarpışma sırasında sürücünün başının ön cama veya direksiyon simidine çarpmasını önleyecek kadar hızlı açılacak şekilde ayarlamak istiyoruz. Kısım 2'de gördüğünüz gibi, yayların ve elektrik yüklerinin hareketli levhaya uyguladığı kuvvet, etkin yay sabiti k_{eff} olan bir yayın kuvveti olarak ifade edilebilir. Kondansatör düzeneğinin bütünü, bu soruda otomobilin ivmesi olan sabit bir a ivmesinin etkisi altındaki, kütlesi M ve yay sabiti k_{eff} olan bir *kütle-yay sistemine* benzer.

Not: Sorunun bu kısmında, kütle ve yayın sabit ivme altında dengede olduğu ve dolayısıyla otomobile göre sabit kaldığı varsayımı artık geçerli değildir.

Sürtünmeyi ihmal ediniz ve sorunun parametreleri için aşağıdaki sayısal değerleri kullanınız:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m},$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

Kısım	Soru	Puan
4.1	Bu verileri kullanarak, 2.3 kısmında hesapladığınız elektriksel kuvvetin yayların kuvvetine oranını bulunuz ve elektriksel kuvvetlerin yay kuvvetlerine göre ihmal edilebileceğini gösteriniz.	0.6

Anahtarın β konumunda olduğu durum için elektriksel kuvvetleri hesaplamamış olsak da, bu durumda da benzer şekilde elektriksel kuvvetlerin aynı ölçüde küçük olduğu ve ihmal edilebileceği gösterilebilir.

Kısım	Soru	Puan
4.2	Sabit hızla ilerleyen otomobil aniden sabit bir a ivmesiyle fren yaparsa, hareketli levhanın en büyük yer değiştirmesi ne olur? Cevabınızı parametreler cinsinden veriniz.	0.6

Anahtarın β konumunda olduğunu ve sistemin, kondansatörün uçları arasındaki elektriksel gerilim $V_S = 0.15 \text{ V}$ 'a ulaştığında hava yastığını etkinleştirecek şekilde tasarlandığını varsayınız. Otomobilin ivmesinin yerçekimi ivmesi $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 'den küçük olduğu normal frenleme sırasında hava yastığının etkinleşmemesini, diğer durumlarda ise etkinleşmesini istiyoruz.

Kısım	Soru	Puan
4.3	Bu amaçla C_S ne kadar olmalıdır?	0.6

Hava yastığının, sürücünün başının ön cama veya direksiyon simidine çarpmasını önleyecek kadar hızlı etkinleşip etkinleşmeyeceğini bulmak istiyoruz. Çarpışma sonucunda otomobilin g 'ye eşit bir yavaşlama ivmesine maruz kaldığını, ancak sürücünün başının sabit hızla hareket etmeyi sürdürdüğünü varsayınız.

Kısım	Soru	Puan
4.4	Sürücünün başı ile direksiyon simidi arasındaki uzaklığı tahmin ederek, sürücünün başının direksiyon simidine çarpmasına kadar geçen t_1 süresini bulunuz.	0.8
4.5	Hava yastığının etkinleşmesine kadar geçen t_2 süresini bulunuz ve bunu t_1 ile karşılaştırınız. Hava yastığı zamanında etkinleşir mi? Hava yastığının anında açıldığını	0.9

Kısım	Soru	Puan
	varsayınız.	

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$x > 0$ yönünü soldaki sabit levhaya doğru seçiniz. 2–4 kısımlarında bu, $+V$ potansiyelindeki levhadır; otomobilin $a > 0$ ivmesini, şekilde gösterildiği gibi, ters yönde seçiniz. Kuvvet bileşenleri pozitif x yönünde pozitifdir ve V_S , hareketli levhanın toprağa göre potansiyelidir. $C_0 = \epsilon_0 A/d$ yazınız.

- 1.1: $F_E = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$, çekicidir.
- 1.2: $x = \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A}$, sabit levhaya doğrudur.
- 1.3: $V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right)$.
- 1.4: $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A d} \right)^{-1}$.
- 1.5: $U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\epsilon_0^2 A^2}$.
- 2.1: Yüklerin büyüklükleri: $Q_L = \frac{\epsilon_0 AV}{d-x}$, $Q_R = \frac{\epsilon_0 AV}{d+x}$. Hareketli levha üzerindeki karşılık gelen yükler $-Q_L$ ve $+Q_R$ 'dir.
- 2.2: $F_E = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right] = \frac{2\epsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$.
- 2.3: $F_E \simeq \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3} x$.
- 2.4: $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x$, $k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3}$.
- 2.5: Küçük yer değiştirme yaklaşımında $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\epsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$.
- 3.1: $V_S = \frac{2\epsilon_0 AV x}{2\epsilon_0 A d + C_S(d^2 - x^2)}$.
- 3.2: $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{V x}{d}$.
- 4.1: $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{k d^3} = 7.6 \times 10^{-9}$. Dolayısıyla $k_{\text{eff}} \simeq 2k$.
- 4.2: $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}$.
- 4.3: $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}$.
- 4.4: $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Baş ile direksiyon simidi arasındaki başlangıç uzaklığı $L = 0.50 \text{ m}$ olarak tahmin edildiğinde $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}$ elde edilir.

- **4.5:** $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}$. $t_2 \ll t_1$ olduğundan, belirtilen varsayımlar altında hava yastığı zamanında etkinleşir.

Çözüm

Levhalar arasındaki uzaklıkların levha boyutlarına göre küçük olması nedeniyle, çözüm boyunca kenar etkilerinden kaynaklanan alanları ihmal ediyoruz.

1.1

Yüzey yük yoğunluğu $\sigma = Q/A$ 'dır. Düzgün yüklü bir levha, diğer levhanın bulunduğu yerde büyüklüğü $\sigma/(2\epsilon_0)$ olan bir alan oluşturur. Bir levhaya, diğer levhanın alanından dolayı kuvvet etki eder; dolayısıyla çekim kuvvetinin büyüklüğü

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

olur. Yük sabitken bu kuvvet, paralel levha yaklaşımı çerçevesinde levhalar arasındaki uzaklıktan bağımsızdır.

1.2

Çekim, hareketli levhayı sabit levhaya doğru hareket ettirir ve yayı x kadar uzatır. Mekanik denge için

$$kx = F_E.$$

olmalıdır. Sonuç olarak,

$$x = \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A}.$$

Levhaların birbirinden ayrı kaldığı çözümün geçerli olması için $x < d$, yani

$$Q^2 < 2k\epsilon_0 Ad.$$

olmalıdır.

1.3

Levhalar arasındaki elektrik alan

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

şeklindedir. Dengedeki uzaklıkları $d - x$ olduğundan

$$V = E(d - x).$$

Yer değiştirme yerine yazıldığında

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right).$$

elde edilir.

1.4

Verilen tanıma göre,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}.$$

$C_0 = \varepsilon_0 A/d$ olduğundan,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d}\right)^{-1}.$$

1.5

Dengede depolanan enerji, kondansatörün elektrik alan enerjisi ile yayın esneklik enerjisinden oluşur:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\varepsilon_0 A} + \frac{1}{2}kx^2.$$

$x = Q^2/(2k\varepsilon_0 A)$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\varepsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \\ &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}. \end{aligned}$$

2.1

x sola, soldaki levhaya doğru pozitif alındığında, sol ve sağ aralıklar $d - x$ ve $d + x$ 'tir. Dolayısıyla sığalar

$$C_L = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\varepsilon_0 A}{d + x}.$$

olur. Anahtar α konumundayken hareketli levha topraklanmıştır. Her bir kondansatörün gerilim büyüklüğü V olduğundan

$$Q_L = C_L V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}.$$

elde edilir. Soldaki sabit levha $+Q_L$ yükünü, hareketli levhanın ona bakan yüzeyi ise $-Q_L$ yükünü taşır. Sağdaki sabit levha $-Q_R$ yükünü, hareketli levhanın ona bakan yüzeyi ise $+Q_R$ yükünü taşır.

2.2

Her bir sabit levha hareketli levhayı çeker. Soldaki çekim pozitif x yönünde, sağdaki çekim ise negatif x yönünde etki eder. 1.1'deki kuvvet kullanılarak,

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Böylece

$$F_E = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right].$$

Kesirler birleştirildiğinde

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 A V^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

elde edilir. Kuvvetin işareti x ile aynıdır: elektriksel çekim, daha yakın levhaya doğru olan yer değiştirmeyi artırma eğilimindedir.

2.3

Tam sonucu şu biçimde yeniden yazalım:

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right)^{-2}.$$

$|x| \ll d$ için x^2/d^2 ihmal edildiğinde

$$F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

elde edilir.

2.4

Her iki yay da geri çağırıcı kuvvet uygular. Biri sıkıştır, diğeri uzar ve toplam kuvvetleri

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

olur. Doğrusallaştırılmış elektriksel kuvvet eklendiğinde,

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

Dolayısıyla,

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}.$$

Elektriksel etkileşim, geri çağırıcı kuvvete karşılık gelen etkin yay sabitini azaltır. Küçük yer değiştirmeler karşısında kararlı bir tepki için $k_{\text{eff}} > 0$ olmalıdır.

2.5

Otomobil, pozitif x yönünün tersine ivmelenir. Bu nedenle otomobilin referans sisteminde kütleye etki eden eylemsizlik kuvveti $+Ma$ 'dır. Bağlı denge için

$$-k_{\text{eff}} x + Ma = 0.$$

olmalıdır. Buradan

$$a = \frac{k_{\text{eff}} x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

elde edilir. Bu ifadede, 2.3'te yapılan küçük yer değiştirme yaklaşımı kullanılmıştır.

3.1

β konumunda hareketli levha, ona bağlı tel ve C_S 'nin bu tele bağlı levhası, yalıtılmış bir iletken oluşturur. Başlangıçta sıfır olan toplam yükü sıfır kalır.

Bu iletkenin toprağa göre potansiyeli V_S olsun. Üç kondansatör yüzeyindeki yükler

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

şeklinde. Yükün korunumundan

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

Şimdi

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ad}{d^2 - x^2}.$$

Yerine koyulduğunda

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}.$$

elde edilir. Özellikle, merkez konumunda $V_S = 0$ 'dır ve $+V$ levhasına doğru yer değiştirme için $V_S > 0$ 'dır.

3.2

Paydada x^2 'yi d^2 'ye göre ihmal edelim:

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S d^2}.$$

$C_0 = \varepsilon_0 A/d$ kullanılarak,

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$$

Böylece bu yaklaşımda ölçülen gerilim, yer değiştirmeye orantılıdır.

4.1

Elektriksel kuvvet ile yay kuvvetleri birbirine zıt yönlüdür. Büyüklüklerinin oranı

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 AV^2/d^3)|x|}{2k|x|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3}.$$

olur. $d = 1.0 \times 10^{-2}$ m ile,

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

Elektriksel katkı ihmal edilebilir, dolayısıyla

$$k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m}.$$

Soru metninde izin verildiği üzere, β konumunda da elektriksel kuvvetleri ihmal ediyoruz.

4.2

Frenlemeden önce kütle merkezdedir ve otomobile göre durmaktadır:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Sabit ivmelenmenin aniden başlamasından sonra, otomobilin referans sistemindeki hareket denklemi

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

olur. Şu tanımları yapalım:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

Başlangıç koşullarını sağlayan çözüm

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

şeklinde. İlk maksimum $\omega t = \pi$ anında gerçekleşir ve

$$x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$$

elde edilir. Sönümsüz kütle yeni denge konumunu aşıp geçtiğinden, en büyük yer değiştirme statik denge yer değiştirmesinin iki katıdır.

4.3

Tetikleme gerilimi

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V}.$$

olsun. Etkinleşme sınırını $a = g$ olarak belirlemek için, sabit g ivmesi sırasında ulaşılan en büyük gerilim V_{th} 'ye eşit olmalıdır.

Buna karşılık gelen en büyük yer değiştirme

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

olur. Böylece

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

olması, küçük yer değiştirme yaklaşımını destekler.

3.2'den,

$$V_{\text{th}} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

Gerekli sığa için çözüldüğünde,

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{\text{th}}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{\text{th}}} - 1 \right).$$

Burada,

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

ve

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

Sonuç olarak,

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

Verilerin hassasiyetine göre,

$$C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

Bu sabit ivmeli frenleme modelinde, en büyük gerilim a ile orantılıdır; dolayısıyla g 'nin altındaki ivmelerde eşiğe ulaşılmazken, g 'ye eşit veya daha büyük ivmelerde ulaşılır.

Karşılaştırma amacıyla, 3.1'deki tam geometri korunduğunda

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (Vx_g/V_{\text{th}} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

elde edilir; bunun yuvarlatılmış değeri de aynıdır.

4.4

Sürücünün başı ile direksiyon simidi arasındaki hareket doğrultusundaki başlangıç uzaklığı L olsun.

Başlangıçta ikisi de aynı hıza sahiptir. Baş sabit hızla hareketini sürdürürken, direksiyon simidi otomobille birlikte büyüklüğü g olan bir ivmeyle yavaşlar. Bu nedenle bağlı ivmelerinin büyüklüğü g 'dir ve t süresi sonunda aralarındaki uzaklığın azalma miktarı

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2}gt^2.$$

olur. Bu miktar L 'ye eşit olduğunda çarpma gerçekleşir:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Makul bir tahmin olarak $L = 0.50 \text{ m}$ alınırsa,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

Kondansatör, $a = g$ olduğunda tetikleme gerilimine en büyük yer değiştirme x_g 'de ulaşılacak şekilde seçilmiştir. Hareket

$$x(t) = \frac{Mg}{2k}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

şeklindedir. $x_g = Mg/k$ olduğundan, ilk tetikleme

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

ya da

$$\omega t_2 = \pi.$$

olduğunda gerçekleşir. Dolayısıyla,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Sayısal olarak,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

Başın tahmini çarpma süresiyle karşılaştırıldığında,

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

Etkinleşmeden önce başın direksiyon simidine yaklaşma miktarı yalnızca

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

olur. Dolayısıyla, belirtildiği gibi anında açıldığı varsayımı altında, **hava yastığı baş direksiyon simidine ulaşmadan çok önce etkinleşir.**

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

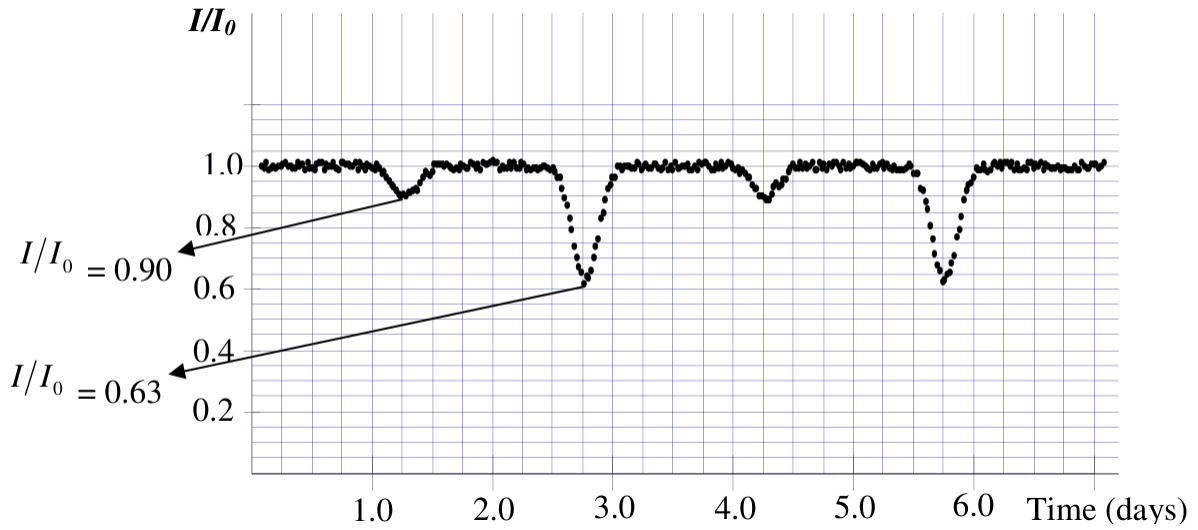
Soru 3: Çift yıldızlar

Kütle merkezleri etrafında dolanan iki yıldız, bir çift yıldız sistemi oluşturur. Galaksimizdeki yıldızların neredeyse yarısı çift yıldız sistemlerindedir. Bu yıldız sistemlerinin çoğunun çift yıldız olduğunu Dünya'dan anlamak kolay değildir; çünkü iki yıldız arasındaki uzaklık, bize olan uzaklıklarından çok daha küçüktür ve bu nedenle yıldızlar teleskoplarla ayrı ayrı seçilemez. Bu yüzden, belirli bir yıldızın çift yıldız sistemi olup olmadığını anlamak için fotometri veya spektrometri kullanarak ışık şiddetindeki ya da tayfındaki değişimleri gözlemlememiz gerekir.

Çift Yıldızların Fotometrisi

Tam olarak iki yıldızın hareket düzleminde bulunuyorsak, belirli zamanlarda bir yıldız diğerini örter (onun önünden geçer) ve gözlem noktamızdan ölçülen tüm sistemin ışık şiddeti zamanla değişir. Bu çift yıldız sistemlerine örten çift yıldızlar denir.

1 İki yıldızın ortak kütle merkezleri etrafında dairesel yörüngelerde sabit bir ω açısal hızıyla hareket ettiğini ve bizim tam olarak çift yıldız sisteminin hareket düzleminde bulunduğumuzu varsayın. Ayrıca yıldızların yüzey sıcaklıklarının sırasıyla T_1 ve T_2 ($T_1 > T_2$), bunlara karşılık gelen yarıçaplarının ise R_1 ve R_2 ($R_1 > R_2$) olduğunu varsayın. Dünya'da ölçülen toplam ışık şiddetinin zamana bağlı grafiği Şekil 1'de verilmiştir. Dikkatli ölçümler, minimumlara karşılık gelen yıldızlardan gelen ışık şiddetlerinin, her iki yıldızdan alınan maksimum ışık şiddeti I_0 'ın sırasıyla yüzde 90'ı ve yüzde 63'ü olduğunu göstermektedir ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). Şekil 1'deki düşey eksen I/I_0 oranını gösterir; yatay eksen ise gün cinsinden işaretlenmiştir.



Şekil 1. Çift yıldız sisteminden alınan bağıl ışık şiddetinin zamana bağlı değişimi. Düşey eksen $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ ile ölçeklendirilmiştir. Zaman gün cinsinden verilmiştir.

1.1 — 0.8 puan

Yörünge hareketinin periyodunu bulun. Cevabınızı iki anlamlı basamakla **saniye** cinsinden verin. Sistemin **rad/saniye** cinsinden açısal frekansı nedir?

İyi bir yaklaşımla, bir yıldızdan alınan ışınlam, yarıçapı yıldızın yarıçapına eşit olan düz bir diskten gelen düzgün kara cisim ışınlamı olarak kabul edilebilir. Dolayısıyla yıldızdan alınan güç, AT^4 ile orantılıdır; burada A diskin alanı, T ise yıldızın yüzey sıcaklığıdır.

1.2 — 1.6 puan

Şekil 1'deki grafiği kullanarak T_1/T_2 ve R_1/R_2 oranlarını bulun.

Çift Yıldız Sistemlerinin Spektrometrisi

Bu bölümde, çift yıldız sisteminin deneysel spektrometri verilerini kullanarak bir çift yıldızın astronomik özelliklerini hesaplayacağız.

Atomlar, kendilerine özgü belirli dalga boylarında ışınlam soğurur veya yayar. Bu nedenle, bir yıldızın gözlenen tayfı, yıldızın atmosferindeki atomlardan kaynaklanan *soğurma çizgileri* içerir. Sodyumun, dalga boyu 5895.9 Å olan karakteristik bir sarı tayf çizgisi (D_1 çizgisi) vardır ($10 \text{ Å} = 1 \text{ nm}$). Önceki bölümdeki çift yıldız sistemi için atomik sodyumun bu dalga boyundaki soğurma tayfını inceliyoruz. Yıldızlar bize göre hareket ettiğinden, çift yıldızdan aldığımız ışığın tayfı Doppler kaymasına uğrar. Her yıldızın sürati farklıdır. Buna bağlı olarak, her yıldızın soğurma dalga boyu farklı miktarda kayar. Yıldızların sürati ışık hızından çok daha küçük olduğundan, Doppler kaymasını gözlemlemek için çok yüksek doğrulukta dalga boyu ölçümleri gerekir. Bu soruda ele aldığımız çift yıldız sisteminin kütle merkezinin sürati, yıldızların yörünge süratlerinden çok daha küçüktür. Dolayısıyla tüm Doppler kaymaları yıldızların yörünge hareketine bağlanabilir. Tablo 1, gözlemlediğimiz çift yıldız sistemindeki yıldızların ölçülen tayfını göstermektedir.

Tablo 1: Çift yıldız sisteminin sodyum D_1 çizgisine ait soğurma tayfı

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1 (\text{Å})$	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(Not: Bu tablodaki verilerin grafiğini çizmeniz gerekmez.)

2 Tablo 1'i kullanarak,

2.1 – 1.8 puan

Yıldızların yörünge süratleri v_1 ve v_2 olsun. v_1 ve v_2 'yi bulun.

Işık hızı $c = 3.0 \times 10^8$ m/s'dir. Tüm görelilik etkilerini ihmal edin.

2.2 – 0.7 puan

Yıldızların kütle oranını (m_1/m_2) bulun.

2.3 – 0.8 puan

Yıldızların kütle merkezlerine olan uzaklıkları r_1 ve r_2 olsun.

r_1 ve r_2 'yi bulun.

2.4 – 0.2 puan

Yıldızlar arasındaki uzaklık r olsun. r 'yi bulun.

3 Yıldızlar arasında etki eden tek kuvvet kütle çekim kuvvetidir.

3.1 – 1.2 puan

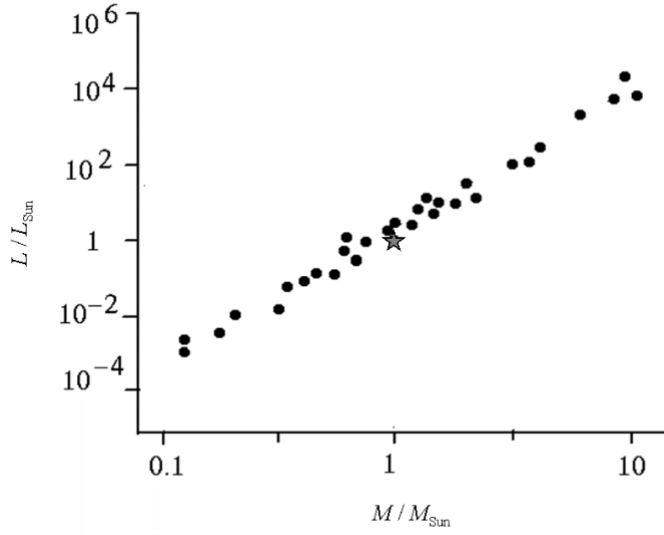
Her yıldızın kütlesini bir anlamlı basamakla bulun.

Evrensel kütle çekim sabiti $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻²'dir.

Yıldızların Genel Özellikleri

4 Yıldızların çoğu aynı mekanizmayla enerji üretir. Bu nedenle, kütleleri M ile yıldızın toplam ışıyım gücünü ifade eden ışıyım güçleri L arasında deneysel bir bağıntı vardır. Bu bağıntı $L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha$ biçiminde yazılabilir.

Burada $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30}$ kg Güneş'in kütlesi, $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26}$ W ise Güneş'in ışıyım gücüdür. Bu bağıntı Şekil 2'de çift logaritmik bir grafikte gösterilmiştir.



Şekil 2. Bir yıldızın ışınlm gücü, kütlesine bağı olarak bir kuvvet yasasına göre değışir. Grafik çift logaritmiktir. Yıldız simgesi, kütlesi 2.0×10^{30} kg ve ışınlm gücü 3.9×10^{26} W olan Güneş'i temsil eder.

4.1 — 0.6 puan

α 'yı bir anlamlı basamakla bulun.

4.2 — 0.6 puan

Önceki bölümlerde incelenen çift yıldız sistemindeki yıldızların ışınlm güçleri L_1 ve L_2 olsun. L_1 ve L_2 'yi bulun.

4.3 — 0.9 puan

Yıldız sisteminin bize olan uzaklığı d , ışık yılı cinsinden nedir?

Uzaklığı bulmak için Şekil 1'deki grafiğı kullanabilirsiniz. Bir ışık yılı, ışığın bir yılda aldığı yoldur.

4.4 — 0.4 puan

Gözlem noktamızdan bakıldığında yıldızlar arasındaki en büyük açısal uzaklık θ nedir?

4.5 — 0.4 puan

Bu iki yıldız ayrı ayrı seçebilen bir optik teleskobun en küçük açıklık çapı D nedir?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Sonraki sonuçlarda yuvarlanmamış ara değerler kullanılmıştır.

- **1.1:** $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$; $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.
- **1.2:** $T_1/T_2 \simeq 1.39$; $R_1/R_2 \simeq 1.56$.
- **2.1:** $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}$; $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- **2.2:** $m_1/m_2 \simeq 1.7$.
- **2.3:** $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}$; $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}$.
- **2.4:** $r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}$.

- **3.1:** Bir anlamlı basamakla, $m_1 \simeq 6 \times 10^{30}$ kg, $m_2 \simeq 4 \times 10^{30}$ kg.
- **4.1:** $\alpha \simeq 4$.
- **4.2:** $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28}$ W; $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27}$ W.
- **4.3:** $d \simeq 82$ ışık yılı $\simeq 7.7 \times 10^{17}$ m.
- **4.4:** $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8}$ rad veya 2.7×10^{-3} yay saniyesi.
- **4.5:** $D_{\min} \simeq 54$ m; verilen 589.59 nm sodyum dalga boyunda Rayleigh ölçütü kullanılmıştır.

Çözüm

1.1

Yörünge periyodu, **aynı derinlikteki** ardışık minimumlar arasındaki zaman aralığıdır. Şekil 1'den yaklaşık 3.0 gün bulunur. Farklı derinliklerdeki komşu minimumlar, iki farklı kavuşuma karşılık gelir ve aralarında yarım periyot vardır.

Böylece

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

Açısal frekans

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

Yıldızların örtülmedikleri durumda Dünya'daki ışık şiddetine katkıları

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

olsun; burada C , yıldızlar pratikte aynı uzaklıkta oldukları için her ikisi için de aynıdır. Tutulma dışında,

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

Yörünge düzleminden bakılması, merkezî tutulmalara yol açar. $R_1 > R_2$ olduğundan, büyük yıldız küçük yıldız tamamen gizleyebilir. Bu tutulma sırasında kaybolan ışık şiddeti I_2 'dir.

Diğer tutulmada küçük yıldız, daha sıcak yıldızın kendi diskiyle aynı büyüklükteki bir bölgesini örter. Bu durumda kaybolan ışık şiddeti

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

$T_1 > T_2$ olduğundan, $B > I_2$ 'dir. Dolayısıyla daha sık minimum, 2 numaralı yıldızın gizlendiği tutulmadır.

Sık minimumdan

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

Derin minimumdan

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

B 'yi I_2 'ye bölersek,

$$\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

dolayısıyla

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

Benzer biçimde,

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

buradan

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

Görelili olmayan hareket için Doppler kayması

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

şeklindedir; burada u , uzaklaşma durumunda pozitif alınan görüş doğrultusundaki hızdır ve

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ Å}.$$

Yörünge düzleminden gözlenen dairesel bir yörüngede, görüş doğrultusundaki hız $-v_i$ ile $+v_i$ arasında sinüzoidal olarak değişir. Dolayısıyla dalga boyu değişiminin genliği yörünge süratini belirler:

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

Tablodaki uç değerler kullanılarak,

$$\Delta\lambda_1 = \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ Å} = 1.8 \text{ Å},$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ Å} = 3.1 \text{ Å}.$$

Dolayısıyla,

$$v_1 = 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.$$

Böylece

$$\boxed{v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}}.$$

2.2

Kütle merkezi referans sisteminde yıldızların momentumları eşit büyüklükte ve zıt yönlüdür:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Bu nedenle,

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7}.$$

2.3

Her iki yıldızın açısal frekansı aynıdır. Düzgün çembersel hareket için,

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

Önceki hesaplamalardaki yuvarlanmamış değerler kullanılarak,

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

Dolayısıyla,

$$r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}.$$

2.4

Kütle merkezi yıldızların arasında yer alır; dolayısıyla aralarındaki uzaklık

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}.$$

Böylece, iki anlamlı basamakla,

$$r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3.1

Kütle çekim kuvveti, her yıldız için merkezci kuvveti sağlar:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\omega^2r_1 = m_2\omega^2r_2.$$

Buradan

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

Ara hesaplamalardaki basamaklar korunarak değerler yerine konulduğunda,

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Dolayısıyla istenen bir anlamlı basamaklı cevaplar

$$m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Aşağıda, hesaplanan kütlelerin yuvarlanmamış değerleri kullanılacaktır; çünkü erken yuvarlanan kütlelerin kuvvetini almak önemli sayısal hatalara yol açar.

4.1

Deneysel bağıntının logaritması alınırsa

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

Dolayısıyla α , çift logaritmik grafikteki eğilim doğrusunun eğimidir.

Eğilim doğrusu yaklaşık olarak

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = (1, 1) \quad \text{ve} \quad (10, 10^4).$$

noktalarından geçer. Buradan

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

$\alpha = 4$ için,

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}} \right)^4.$$

Dinamikten elde edilen yuvarlanmamış kütleler kullanılarak,

$$L_1 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W},$$

$$L_2 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}}.$$

Tutarlılık kontrolü olarak, bu değerler $L_1/L_2 \simeq 8.8$ verir; bu da yaklaşık deneysel yasa ve ölçülen veriler için beklendiği üzere fotometrik oran olan $I_1/I_2 = 9$ 'a yakındır.

4.3

İzotropik ışınım için, L ışınım gücü d uzaklığında $L/(4\pi d^2)$ ışık şiddeti oluşturur. Tutulma dışında, her iki yıldızın akısının tamamı alınır:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

Böylece

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

Bir yıl yaklaşık 365 gün alınırsa,

$$1 \text{ ışık yılı} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{d \simeq 82 \text{ ışık yılı} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}}.$$

4.4

İzdüşüm uzaklığı, yıldızları birleştiren doğru görüş doğrultusuna dik olduğunda en büyüktür. Bu durumda değeri r 'dir.

$r \ll d$ olduğundan, küçük açı yaklaşımıyla

$$\theta_{\text{max}} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad}.$$

Buradan

$$\boxed{\theta_{\text{max}} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}}$$

veya yaklaşık olarak

$$\theta_{\max} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ yay saniyesi}.$$

4.5

Dairesel açıklığa sahip, ayırma gücü kırınım ile sınırlı ideal bir teleskop için Rayleigh ölçütü, ayırt edilebilen en küçük açısal uzaklığı verir:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

Dolayısıyla yıldızları en büyük açısal uzaklıklarında ayrı ayrı seçebilen en küçük açıklık çapı şu bağıntıyı sağlar:

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

Soruda verilen sodyum dalga boyunu kullanarak,

$$\lambda = 5895.9 \text{ \AA} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ m},$$

şunu elde ederiz:

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ m} \simeq \boxed{54 \text{ m}}.$$

Daha genel olarak, dalga boyuna bağımlılık

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ m} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.