

IPhO 2007

Теоретические задачи и решения · Исфахан, Иран · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphO/2007/

Задача 1: Анализ размерностей и чёрные дыры (излучение Хокинга)

В физике всякий раз, когда записывается равенство, обе части уравнения должны быть величинами одного рода, то есть иметь одинаковые размерности. Например, недопустима ситуация, когда величина в правой части уравнения представляет собой длину, а величина в левой части — промежуток времени. Используя этот факт, иногда можно практически установить вид физической зависимости, не решая задачу аналитически. Например, если бы нам предложили найти время падения тела с высоты h при постоянном ускорении свободного падения g , мы могли бы рассуждать так: достаточно составить величину, представляющую собой промежуток времени, из величин g и h , и единственный возможный способ сделать это — записать $T = a(h/g)^{1/2}$. Заметим, что это решение содержит пока не определённый коэффициент a , который является *безразмерным* и потому не может быть определён этим методом. Этот коэффициент может быть числом, например 1 , $1/2$, $\sqrt{3}$, π , или любым другим действительным числом. Такой метод установления физических зависимостей называется *анализом размерностей*. При анализе размерностей безразмерные коэффициенты несущественны, и их можно не записывать. К счастью, в большинстве физических задач эти коэффициенты имеют порядок 1 , и их исключение не меняет порядка величины физических величин. Поэтому, применяя анализ размерностей к приведённой выше задаче, получаем $T = (h/g)^{1/2}$.

Обычно размерности физической величины выражают через размерности четырёх основных величин: M (масса), L (длина), T (время) и K (температура). Размерность произвольной величины x обозначается $[x]$. Например, для размерностей скорости v , кинетической энергии E_k и теплоёмкости C_V записывают: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1 Фундаментальные постоянные и анализ размерностей

1.1	Найдите размерности <i>фундаментальных постоянных</i> , то есть постоянной Планка h , скорости света c , гравитационной постоянной G и постоянной Больцмана k_B , через размерности длины, массы, времени и температуры.	0.8
-----	--	-----

Закон Стефана — Больцмана утверждает, что энергетическая светимость абсолютно чёрного тела, то есть полная энергия, излучаемая единицей площади поверхности абсолютно чёрного тела за единицу времени, равна $\sigma\theta^4$, где σ — постоянная Стефана — Больцмана, а θ — абсолютная температура абсолютно чёрного тела.

1.2	Определите размерность постоянной Стефана — Больцмана через размерности длины, массы, времени и температуры.	0.5
-----	--	-----

Постоянная Стефана — Больцмана не является фундаментальной постоянной, и её можно выразить через фундаментальные постоянные, то есть записать $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$. В этом соотношении a — безразмерный параметр порядка 1. Как отмечалось выше, точное значение a для нас несущественно, поэтому положим его равным 1.

1.3	Найдите α , β , γ и δ с помощью анализа размерностей.	1.0
-----	--	-----

2 Физика чёрных дыр

В этой части задачи мы хотим установить некоторые свойства чёрных дыр с помощью анализа размерностей. Согласно одной из физических теорем, известной как *теорема об отсутствии волос*, все характеристики чёрной дыры, рассматриваемой в этой задаче, зависят только от её массы. Одной из характеристик чёрной дыры является площадь её *горизонта событий*. Грубо говоря, горизонт событий — это граница чёрной дыры. Внутри этой границы гравитация настолько сильна, что даже свет не может выйти из ограниченной ею области.

Мы хотим найти связь между массой чёрной дыры m и площадью её горизонта событий A . Эта площадь зависит от массы чёрной дыры, скорости света и гравитационной постоянной. Как и в 1.3, запишем $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1	С помощью анализа размерностей найдите α , β и γ .	0.8
-----	--	-----

Из результата 2.1 следует, что площадь горизонта событий чёрной дыры растёт с увеличением её массы. С классической точки зрения из чёрной дыры ничто не выходит, поэтому во всех физических процессах площадь горизонта событий может только увеличиваться. По аналогии со вторым началом термодинамики Бекенштейн предложил приписать чёрной дыре энтропию S , пропорциональную площади её горизонта событий, то есть $S = \eta A$. Дополнительные аргументы сделали эту гипотезу более правдоподобной.

2.2	Используя термодинамическое определение энтропии $dS = dQ/\theta$, найдите размерность энтропии. dQ — количество теплоты, которым обменивается система с окружающей средой, а θ — абсолютная температура системы.	0.2
2.3	Как и в 1.3, выразите размерную постоянную η через фундаментальные постоянные h , c , G и k_B .	1.1

В оставшейся части задачи не используйте анализ размерностей, однако можете пользоваться результатами, полученными в предыдущих частях.

3 Излучение Хокинга

Используя полуквантовый подход, Хокинг показал, что, вопреки классической точке зрения, чёрные дыры испускают излучение, подобное излучению абсолютно чёрного тела при температуре, которую называют *температурой Хокинга*.

3.1	Используя соотношение $E = mc^2$, выражающее энергию чёрной дыры через её массу, и законы термодинамики, выразите температуру Хокинга θ_H чёрной дыры через её	0.8
-----	--	-----

	массу и фундаментальные постоянные. Считайте, что чёрная дыра не совершает работы над окружающей средой.	
3.2	Таким образом, масса изолированной чёрной дыры изменяется вследствие излучения Хокинга. Используя закон Стефана — Больцмана, найдите зависимость скорости изменения массы от температуры Хокинга чёрной дыры θ_H и выразите эту скорость через массу чёрной дыры и фундаментальные постоянные.	0.7
3.3	Найдите время t^* , за которое изолированная чёрная дыра массой m полностью испарится, то есть потеряет всю свою массу.	1.1

С точки зрения термодинамики чёрные дыры обладают некоторыми необычными свойствами. Например, теплоёмкость чёрной дыры отрицательна.

3.4	Найдите теплоёмкость чёрной дыры массой m .	0.6
-----	---	-----

4 Чёрные дыры и реликтовое излучение

Рассмотрим чёрную дыру, на которую падает реликтовое излучение. Реликтовое излучение представляет собой излучение абсолютно чёрного тела с температурой θ_B , заполняющее всю Вселенную. Поэтому объект с полной площадью поверхности A получает за единицу времени энергию, равную $\sigma\theta_B^4 \times A$. Таким образом, чёрная дыра теряет энергию вследствие излучения Хокинга и получает энергию от реликтового излучения.

4.1	Найдите скорость изменения массы чёрной дыры, выразив её через массу чёрной дыры, температуру реликтового излучения и фундаментальные постоянные.	0.8
4.2	При некоторой массе m^* эта скорость изменения обращается в нуль. Найдите m^* и выразите её через θ_B и фундаментальные постоянные.	0.4
4.3	Используя ответ к 4.2, подставьте выражение для θ_B в ответ к пункту 4.1 и выразите скорость изменения массы чёрной дыры через m , m^* и фундаментальные постоянные.	0.2
4.4	Найдите температуру Хокинга чёрной дыры, находящейся в тепловом равновесии с реликтовым излучением.	0.4
4.5	Является ли это равновесие устойчивым или неустойчивым? Почему? (Выразите ответ математически.)	0.6

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В этих результатах неопределённые безразмерные коэффициенты в частях 1–2 положены равными 1, как предписано условием. Числовые множители, возникающие при дифференцировании и интегрировании, сохранены. Обозначим $\dot{m} = dm/dt$.

- 1.1: $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- 1.2: $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.
- 1.3: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4)$, откуда $\sigma = \frac{k_B^4}{h^3c^2}$.
- 2.1: $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2)$, откуда $A = \frac{G^2m^2}{c^4}$.

- 2.2: $[S] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- 2.3: $\eta = \frac{k_B c^3}{hG}$.
- 3.1: $\theta_H = \frac{hc^3}{2Gk_B m}$.
- 3.2: $\dot{m} = -\frac{\sigma A \theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}$.
- 3.3: $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}$.
- 3.4: $C = -\frac{2Gk_B m^2}{hc} < 0$.
- 4.1: $\dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{hc^4}{16G^2 m^2}$.
- 4.2: $m^* = \frac{2Gk_B \theta_B}{hc^4}$.
- 4.3: $\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]$.
- 4.4: $\theta_H(m^*) = \theta_B$.
- 4.5: **Неустойчивое.** Малое возмущение массы удовлетворяет уравнению $\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m$, поэтому его модуль растёт экспоненциально.

Решение

Используем заданную в условии модель чёрной дыры, свойства которой определяются только массой, а также указанные законы излучения и поглощения абсолютно чёрного тела. Во всех выражениях используется нормировка безразмерных коэффициентов, принятая в частях 1–2. Числовые значения исходных величин не заданы, поэтому искомые результаты получены в символьном виде.

1.1

Из соотношения для энергии фотона $E = h\nu$, где $[\nu] = T^{-1}$, получаем

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2T^{-1}.$$

Поскольку c — скорость,

$$[c] = LT^{-1}.$$

Закон всемирного тяготения Ньютона $F = Gm_1m_2/r^2$ даёт

$$[G] = \frac{[F]L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

Произведение $k_B\theta$ имеет размерность энергии, поэтому

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

Их единицы СИ соответственно равны $J\,s$, $m\,s^{-1}$, $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$ и $J\,K^{-1}$.

1.2

Закон Стефана — Больцмана для полной мощности излучения имеет вид

$$P = \sigma A \theta^4.$$

Следовательно,

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

Соответствующая единица СИ — $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$.

1.3

При заданном коэффициенте $a = 1$

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

Размерность правой части равна

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

Приравнивая её к $MT^{-3}K^{-4}$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

Решая систему, находим

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

Для $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

Следовательно,

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

Из последнего уравнения получаем $\beta = -2\alpha$; тогда уравнение для размерности длины даёт $\alpha = 2$. Отсюда

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

и

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

Из термодинамического соотношения для энтропии

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

следует, что энтропия имеет размерность

$$[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

Её единица СИ — J K^{-1} .

2.3

Поскольку $S = \eta A$,

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2}K^{-1}.$$

Запишем

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

Приравнивая размерности, получаем

$$\begin{aligned} p - r + s &= 1, \\ 2p + q + 3r + 2s &= 0, \\ -p - q - 2r - 2s &= -2, \\ -s &= -1. \end{aligned}$$

Таким образом, $s = 1$, $p = r$, а остальные уравнения дают

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{k_B c^3}{hG}.$$

Объединяя этот результат с выражением для площади горизонта, получаем энтропию как функцию массы:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

Для семейства термодинамических состояний чёрной дыры первое начало термодинамики при отсутствии работы имеет вид

$$dE = \theta_H dS.$$

Поскольку

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

имеем

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

Следовательно,

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_B m}}.$$

Температура убывает с увеличением массы.

3.2

Мощность испускаемого излучения равна

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

Для изолированной чёрной дыры закон сохранения энергии требует

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

где знак минус выражает потерю массы. Поэтому

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

Подставляя температуру из 3.1, получаем

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

Чтобы выразить зависимость только от температуры, подставим

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_H}.$$

Это даёт

$$\boxed{\dot{m} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2}}.$$

Таким образом, модуль скорости потери массы пропорционален θ_H^2 . Хотя мощность излучения с единицы площади пропорциональна θ_H^4 , площадь горизонта пропорциональна m^2 , а значит, θ_H^{-2} .

3.3

Пусть начальная масса равна m , а текущую массу обозначим $\mu(t)$. Введём

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

Уравнение потери массы имеет вид

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя с начальным условием $\mu(0) = m$, получаем

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

так что

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

Отсюда

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

Полное испарение происходит при $\mu(t^*) = 0$:

$$t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2m^3}{3hc^4}.$$

Это время жизни получено путём продолжения заданной в задаче модели испарения до нулевой массы.

3.4

Поскольку работа не совершается, теплоёмкость равна

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

Используя

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

получаем

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

Подставляя $\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$, находим

$$C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc}.$$

Эквивалентная запись:

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

Теплоёмкость отрицательна: поглощение энергии увеличивает массу и понижает температуру, тогда как потеря энергии повышает температуру.

4.1

Согласно заданной модели, мощности поглощаемого и испускаемого излучения равны

$$P_{\text{in}} = \sigma A\theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A\theta_H^4.$$

Закон сохранения энергии даёт

$$c^2\dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

так что

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2}(\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

Подставляя ранее полученные выражения, находим

$$\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}.$$

Первое слагаемое описывает поглощение, второе — излучение.

4.2

При $m = m^*$ результирующая скорость изменения массы обращается в нуль:

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

При положительных температурах это требует

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

Используя 3.1, получаем

$$\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B,$$

и, следовательно,

$$m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_B}.$$

4.3

Из 4.2

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*}.$$

Подстановка в 4.1 даёт

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Эквивалентная запись:

$$\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$$

4.4

При тепловом равновесии мощности поглощаемого и испускаемого излучения равны, поэтому

$$\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B.$$

4.5

Будем считать температуру реликтового излучения постоянной; тогда m^* также постоянна. Запишем

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

Дифференцируя, получаем

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

В состоянии равновесия

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} > 0.$$

Поэтому для малого возмущения $m = m^* + \delta m$ линеаризация даёт

$$\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} \delta m,$$

с решением

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2(m^*)^3} \right].$$

Возмущение растёт, поэтому

равновесие неустойчиво.

Знаки в 4.3 непосредственно приводят к тому же результату:

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

Чёрная дыра с немного большей массой холоднее реликтового излучения и набирает ещё больше массы. Чёрная дыра с немного меньшей массой горячее и теряет ещё больше массы.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Ёмкостный акселерометр для автомобильной подушки безопасности

В этой задаче рассматривается упрощённая модель акселерометров, предназначенных для срабатывания автомобильных подушек безопасности при столкновении. Мы хотим построить электромеханическую систему так, чтобы при превышении ускорением некоторого предельного значения один из электрических параметров системы, например напряжение в определённой точке цепи, превышал пороговое значение, в результате чего срабатывала бы подушка безопасности.

Примечание: в этой задаче пренебрегайте силой тяжести.

1 Рассмотрим конденсатор с параллельными пластинами, показанный на рисунке 1. Площадь каждой пластины конденсатора равна A , а расстояние между пластинами равно d . Расстояние между пластинами намного меньше их размеров. Одна из пластин соединена со стенкой пружиной жёсткостью k , а другая закреплена. Когда расстояние между пластинами равно d , пружина не сжата и не растянута, то есть в этом состоянии на пружину не действует сила. Считайте, что диэлектрическая проницаемость воздуха между пластинами равна диэлектрической проницаемости вакуума ε_0 . Ёмкость, соответствующая этому расстоянию между пластинами конденсатора, равна $C_0 = \varepsilon_0 A/d$. Сообщим пластинам заряды $+Q$ и $-Q$ и дадим системе прийти в механическое равновесие.

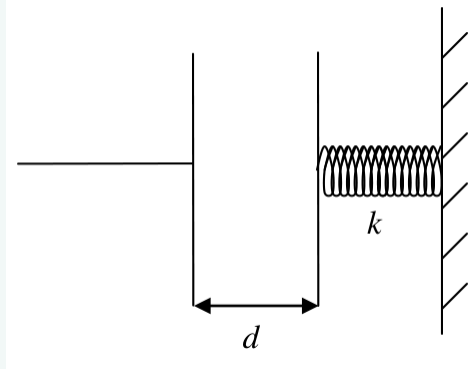


Рисунок 1

Часть	Вопрос	Баллы
1.1	Вычислите электрическую силу F_E , с которой пластины действуют друг на друга.	0.8
1.2	Пусть x — смещение пластины, соединённой с пружиной. Найдите x .	0.6
1.3	Какова в этом состоянии разность электрических потенциалов V между пластинами конденсатора? Выразите её через Q , A , d , k .	0.4
1.4	Пусть C — ёмкость конденсатора, определяемая как отношение заряда к разности потенциалов. Найдите C/C_0 как функцию Q , A , d и k .	0.3
1.5	Какова полная энергия U , запасённая в системе? Выразите её через Q , A , d и k .	0.6

На рисунке 2 показан груз массой M , прикрепленный к проводящей пластине пренебрежимо малой массы, а также к двум пружинам одинаковой жёсткости k . Проводящая пластина может двигаться вперёд и назад в пространстве между двумя неподвижными проводящими пластинами. Все эти пластины одинаковы и имеют одну и ту же площадь A . Таким образом, три пластины образуют два конденсатора. Как показано на рисунке 2, неподвижные пластины подключены к заданным потенциалам V и $-V$, а средняя пластина соединена с землёй через двухпозиционный переключатель. Провод, соединённый с подвижной пластиной, не мешает её движению, и все три пластины всегда остаются параллельными. Когда вся система не испытывает ускорения, расстояние от каждой неподвижной пластины до подвижной равно d , что намного меньше размеров пластин. Толщиной подвижной пластины можно пренебречь.

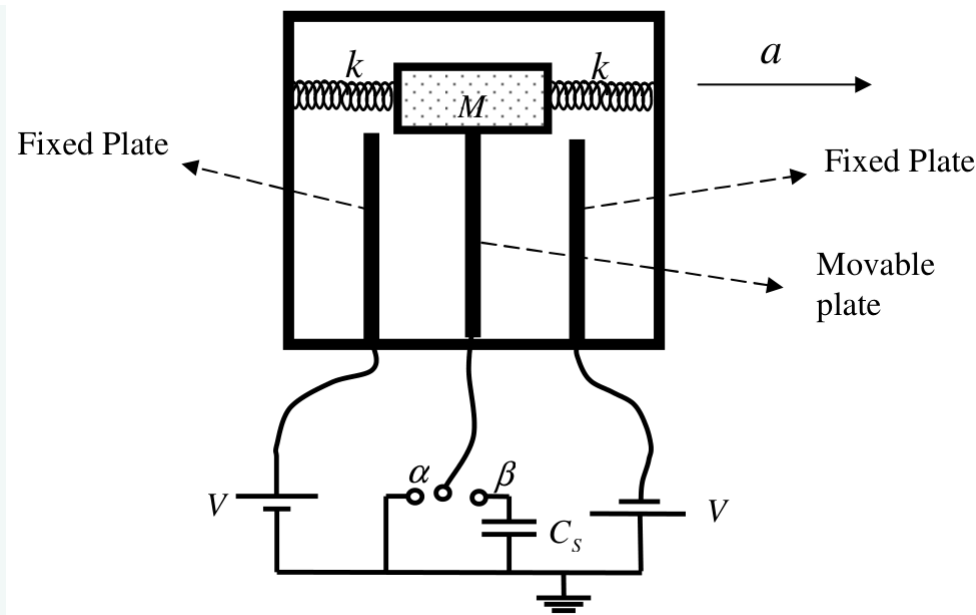


Рисунок 2

Переключатель может находиться в одном из двух положений: α или β . Предположим, что система конденсаторов движется с ускорением вместе с автомобилем и это ускорение постоянно. Считайте, что при этом постоянном ускорении пружина не колеблется, а все элементы системы конденсаторов находятся в положениях равновесия, то есть не движутся друг относительно друга и, следовательно, относительно автомобиля.

Из-за ускорения подвижная пластина сместится на некоторую величину x относительно середины промежутка между двумя неподвижными пластинами.

2 Рассмотрим случай, когда переключатель находится в положении α , то есть подвижная пластина соединена с землёй проводом. Тогда

Часть	Вопрос	Баллы
2.1	Найдите заряд каждого конденсатора как функцию x .	0.4
2.2	Найдите результирующую электрическую силу, действующую на подвижную пластину, F_E , как функцию x .	0.4
2.3	Считайте, что $d \gg x$ и членами порядка x^2 можно пренебречь по сравнению с членами порядка d^2 . Упростите ответ на предыдущий пункт.	0.2
2.4	Запишите полную силу, действующую на подвижную пластину (сумму электрической силы и сил пружин), в виде $-k_{\text{eff}}x$ и приведите выражение для k_{eff} .	0.7
2.5	Выразите постоянное ускорение a как функцию x .	0.4

3 Теперь предположим, что переключатель находится в положении β , то есть подвижная пластина соединена с землёй через конденсатор ёмкостью C_S (первоначально конденсаторы не заряжены). Если подвижная пластина смещена на величину x относительно своего центрального положения,

Часть	Вопрос	Баллы
3.1	Найдите V_S , разность электрических потенциалов на конденсаторе C_S , как функцию x .	1.5

Часть	Вопрос	Баллы
3.2	Снова считайте, что $d \gg x$, и пренебрегите членами порядка x^2 по сравнению с членами порядка d^2 . Упростите ответ на предыдущий пункт.	0.2

4 Мы хотим подобрать параметры задачи так, чтобы подушка безопасности не срабатывала при обычном торможении, но при столкновении раскрывалась достаточно быстро, предотвращая удар головы водителя о ветровое стекло или рулевое колесо. Как вы видели в части 2, силу, действующую на подвижную пластину со стороны пружин и электрических зарядов, можно представить как силу пружины с эффективной жёсткостью k_{eff} . Вся система конденсаторов подобна системе «груз — пружина» с массой M и жёсткостью пружины k_{eff} , испытывающей постоянное ускорение a , которое в этой задаче является ускорением автомобиля.

Примечание: в этой части задачи предположение о том, что груз и пружина находятся в равновесии при постоянном ускорении и потому неподвижны относительно автомобиля, больше не выполняется.

Пренебрегите трением и используйте следующие численные значения параметров задачи:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m}, \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

Часть	Вопрос	Баллы
4.1	Используя эти данные, найдите отношение электрической силы, вычисленной в пункте 2.3, к силе пружин и покажите, что электрическими силами можно пренебречь по сравнению с силами пружин.	0.6

Хотя мы не вычисляли электрические силы для случая, когда переключатель находится в положении β , можно показать, что и в этой ситуации электрические силы столь же малы и ими можно пренебречь.

Часть	Вопрос	Баллы
4.2	Если автомобиль, двигавшийся с постоянной скоростью, внезапно начинает тормозить с постоянным ускорением a , каково максимальное смещение подвижной пластины? Выразите ответ через параметры задачи.	0.6

Предположим, что переключатель находится в положении β , а система спроектирована так, что подушка безопасности срабатывает, когда напряжение на конденсаторе достигает $V_S = 0.15 \text{ V}$. Мы хотим, чтобы подушка безопасности не срабатывала при обычном торможении, когда ускорение автомобиля меньше ускорения свободного падения $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, но срабатывала в остальных случаях.

Часть	Вопрос	Баллы
4.3	Какой должна быть ёмкость C_S для этого?	0.6

Мы хотим выяснить, сработает ли подушка безопасности достаточно быстро, чтобы предотвратить удар головы водителя о ветровое стекло или рулевое колесо. Предположим, что в результате столкновения автомобиль замедляется с ускорением, равным по модулю g , а голова водителя продолжает двигаться с постоянной скоростью.

Часть	Вопрос	Баллы
4.4	Оценив расстояние между головой водителя и рулевым колесом, найдите время t_1 , через которое голова водителя ударится о рулевое колесо.	0.8
4.5	Найдите время t_2 до срабатывания подушки безопасности и сравните его с t_1 . Сработает ли подушка безопасности вовремя? Считайте, что подушка раскрывается мгновенно.	0.9

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Выберем $x > 0$ в направлении левой неподвижной пластины. В частях 2–4 это пластина с потенциалом $+V$; положительное ускорение автомобиля $a > 0$ направим в противоположную сторону, как показано на рисунке. Проекция сил положительны в направлении положительных x , а V_S — потенциал подвижной пластины относительно земли. Обозначим $C_0 = \varepsilon_0 A/d$.

- 1.1: $F_E = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$, сила притяжения.
- 1.2: $x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}$, в направлении неподвижной пластины.
- 1.3: $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right)$.
- 1.4: $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d} \right)^{-1}$.
- 1.5: $U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}$.
- 2.1: Модули зарядов: $Q_L = \frac{\varepsilon_0 AV}{d-x}$, $Q_R = \frac{\varepsilon_0 AV}{d+x}$. Соответствующие заряды на подвижной пластине равны $-Q_L$ и $+Q_R$.
- 2.2: $F_E = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right] = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$.
- 2.3: $F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x$.
- 2.4: $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x$, $k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}$.
- 2.5: $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$, в приближении малых смещений.
- 3.1: $V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}$.
- 3.2: $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}$.
- 4.1: $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3} = 7.6 \times 10^{-9}$. Следовательно, $k_{\text{eff}} \simeq 2k$.
- 4.2: $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}$.

- **4.3:** $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}$.
- **4.4:** $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Оценка начального расстояния от головы до рулевого колеса как $L = 0.50 \text{ m}$ даёт $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}$.
- **4.5:** $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}$. Поскольку $t_2 \ll t_1$, при сделанных предположениях подушка безопасности срабатывает вовремя.

Решение

Во всём решении пренебрегаем краевыми эффектами, что оправдано малостью расстояний между пластинами по сравнению с их размерами.

1.1

Поверхностная плотность заряда равна $\sigma = Q/A$. Равномерно заряженная пластина создаёт у другой пластины поле напряжённостью $\sigma/(2\epsilon_0)$. На пластину действует сила со стороны поля другой пластины, поэтому модуль силы притяжения равен

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

При фиксированном заряде эта сила в приближении плоского конденсатора не зависит от расстояния между пластинами.

1.2

Притяжение перемещает подвижную пластину к неподвижной и растягивает пружину на x . Для механического равновесия необходимо

$$kx = F_E.$$

Следовательно,

$$x = \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A}.$$

Для решения, при котором пластины не соприкасаются, требуется $x < d$, то есть

$$Q^2 < 2k\epsilon_0 Ad.$$

1.3

Напряжённость электрического поля между пластинами равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

Расстояние между ними в равновесии равно $d - x$, поэтому

$$V = E(d - x).$$

Подставляя смещение, получаем

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right).$$

1.4

Согласно данному определению,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}.$$

Поскольку $C_0 = \varepsilon_0 A/d$,

$$\boxed{\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d}\right)^{-1}}.$$

1.5

В равновесии запасённая энергия складывается из энергии электрического поля конденсатора и потенциальной энергии упругой деформации пружины:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\varepsilon_0 A} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Используя $x = Q^2/(2k\varepsilon_0 A)$, получаем

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\varepsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \\ &= \boxed{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}}. \end{aligned}$$

2.1

Если положительное направление x выбрано в сторону левой пластины, левый и правый зазоры равны $d - x$ и $d + x$. Поэтому ёмкости соответствующих конденсаторов равны

$$C_L = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\varepsilon_0 A}{d + x}.$$

В положении переключателя α подвижная пластина заземлена. Модуль напряжения на каждом конденсаторе равен V , откуда

$$\boxed{Q_L = C_L V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}}.$$

Левая неподвижная пластина несёт заряд $+Q_L$, а обращённая к ней поверхность подвижной пластины — заряд $-Q_L$. Правая неподвижная пластина несёт заряд $-Q_R$, а обращённая к ней поверхность подвижной пластины — заряд $+Q_R$.

2.2

Каждая неподвижная пластина притягивает подвижную. Сила притяжения к левой пластине направлена в сторону положительных x , а к правой — в сторону отрицательных x . Используя выражение для силы из пункта 1.1, получаем

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Таким образом,

$$F_E = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right].$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получаем

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

Знак силы совпадает со знаком x : электрическое притяжение стремится увеличить смещение в сторону ближайшей пластины.

2.3

Перепишем точный результат в виде

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right)^{-2}.$$

При $|x| \ll d$, пренебрегая x^2/d^2 , получаем

$$F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

2.4

Обе пружины создают возвращающие силы. Одна из них сжата, а другая растянута, и их суммарная сила равна

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

Добавляя линейризованную электрическую силу, получаем

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

Следовательно,

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}.$$

Электрическое взаимодействие уменьшает эффективную жёсткость. Для устойчивости при малых смещениях требуется $k_{\text{eff}} > 0$.

2.5

Ускорение автомобиля направлено противоположно положительному направлению x . Поэтому в системе отсчёта автомобиля сила инерции, действующая на груз, равна $+Ma$. Для относительного равновесия необходимо

$$-k_{\text{eff}} x + Ma = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{k_{\text{eff}} x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

В этом выражении используется приближение малых смещений, введённое в пункте 2.3.

3.1

В положении β подвижная пластина, соединяющий её провод и подключённая к нему обкладка конденсатора C_S образуют изолированный проводник. Его суммарный заряд, первоначально равный нулю, остаётся нулевым.

Обозначим его потенциал относительно земли через V_S . Заряды на трёх его поверхностях, образующих обкладки конденсаторов, равны

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

Закон сохранения заряда даёт

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

Следовательно,

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

При этом

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}.$$

Подстановка даёт

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S(d^2 - x^2)}.$$

В частности, $V_S = 0$ в центральном положении, а $V_S > 0$ при смещении в сторону пластины с потенциалом $+V$.

3.2

Пренебрежём x^2 по сравнению с d^2 в знаменателе:

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S d^2}.$$

Используя $C_0 = \varepsilon_0 A/d$, получаем

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$$

Таким образом, в этом приближении измеряемое напряжение пропорционально смещению.

4.1

Электрическая сила и сила пружин направлены противоположно. Отношение их модулей равно

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 A V^2 / d^3) |x|}{2k|x|} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3}.$$

При $d = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

Электрический вклад пренебрежимо мал, поэтому

$$k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m.}$$

Как допускается в условии, в положении β мы также пренебрегаем электрическими силами.

4.2

До торможения груз находится в центре и покоится относительно автомобиля:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

После внезапного возникновения постоянного ускорения уравнение его движения в системе отсчёта автомобиля имеет вид

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

Введём обозначения

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

Первый максимум достигается при $\omega t = \pi$, откуда

$$x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$$

Максимальное смещение вдвое больше смещения статического равновесия, поскольку при отсутствии затухания груз проходит новое положение равновесия и продолжает движение.

4.3

Обозначим пороговое напряжение срабатывания через

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V.}$$

Чтобы граница срабатывания соответствовала $a = g$, максимальное напряжение при постоянном ускорении g должно равняться V_{th} .

Соответствующее максимальное смещение равно

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Таким образом,

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

что подтверждает применимость приближения малых смещений.

Из пункта 3.2 получаем

$$V_{\text{th}} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

Выражая требуемую ёмкость, получаем

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{\text{th}}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{\text{th}}} - 1 \right).$$

Здесь

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

а

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

Следовательно,

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

С точностью исходных данных

$$C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

В этой модели торможения с постоянным ускорением максимальное напряжение пропорционально a , поэтому при ускорениях меньше g порог не достигается, а при ускорениях, равных или превышающих g , достигается.

Для сравнения, при точном учёте геометрии согласно пункту 3.1 получаем

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (Vx_g/V_{\text{th}} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

что после округления даёт то же значение.

4.4

Пусть L — начальное расстояние между головой водителя и рулевым колесом вдоль направления движения.

Первоначально они имеют одинаковую скорость. Голова продолжает двигаться с постоянной скоростью, а рулевое колесо замедляется вместе с автомобилем с ускорением, модуль которого равен g . Поэтому модуль их относительного ускорения равен g , а расстояние, на которое они сближаются за время t , равно

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2}gt^2.$$

Удар происходит, когда это расстояние становится равным L :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Принимая разумную оценку $L = 0.50 \text{ m}$, получаем

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

При $a = g$ ёмкость конденсатора выбрана так, чтобы пороговое напряжение достигалось при максимальном смещении x_g . Закон движения имеет вид

$$x(t) = \frac{Mg}{2k}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

Поскольку $x_g = Mg/k$, первое срабатывание происходит, когда

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

то есть

$$\omega t_2 = \pi.$$

Следовательно,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Численно

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

Сравнивая с оценённым временем до удара головы, получаем

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

До срабатывания голова приближается к рулевому колесу всего на

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

Таким образом, **подушка безопасности срабатывает задолго до того, как голова достигнет рулевого колеса**, при условии мгновенного раскрытия, как указано в задаче.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Двойные звёзды

Две звезды, обращающиеся вокруг своего центра масс, образуют двойную звёздную систему. Почти половина звёзд в нашей Галактике входит в двойные звёздные системы. Установить двойственность большинства таких систем при наблюдении с Земли непросто, поскольку расстояние между двумя звёздами намного меньше расстояния от них до нас, и поэтому телескопы не позволяют различить эти звёзды по отдельности. Следовательно, чтобы выяснить, является ли наблюдаемая звезда двойной системой, необходимо с помощью фотометрии или спектрометрии наблюдать изменения интенсивности её излучения или её спектра.

Фотометрия двойных звёзд

Если мы находимся точно в плоскости движения двух звёзд, то в определённые моменты одна звезда будет закрывать другую (проходить перед ней), и интенсивность излучения всей системы, наблюдаемая из нашей точки, будет меняться со временем. Такие двойные системы называются затменными двойными звёздами.

1 Предположим, что две звезды движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с постоянной угловой скоростью ω , а мы находимся точно в плоскости движения двойной системы. Предположим также, что температуры поверхностей звёзд равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), а соответствующие радиусы равны R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$). На рисунке 1 показана

зависимость суммарной интенсивности света, измеренной на Земле, от времени. Точные измерения показывают, что интенсивности приходящего от звёзд света в минимумах составляют соответственно 90 и 63 процента от максимальной интенсивности I_0 , получаемой от обеих звёзд ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). По вертикальной оси на рисунке 1 отложено отношение I/I_0 , а по горизонтальной — время в сутках.

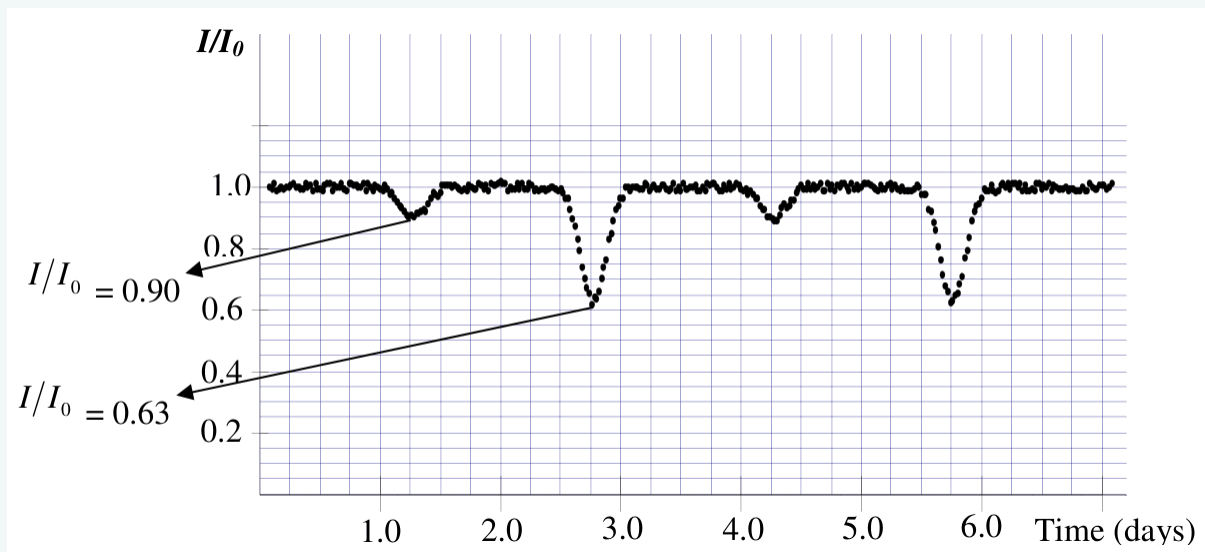


Рисунок 1. Зависимость относительной интенсивности излучения, получаемого от двойной звёздной системы, от времени. Значения по вертикальной оси нормированы на $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$. Время указано в сутках.

1.1 — 0.8 балла

Найдите период орбитального движения. Дайте ответ в **секундах** с точностью до двух значащих цифр.

Какова угловая частота системы в **рад/с**?

В хорошем приближении принимаемое излучение звезды можно считать равномерным излучением абсолютно чёрного тела в виде плоского диска, радиус которого равен радиусу звезды. Поэтому мощность излучения, получаемого от звезды, пропорциональна AT^4 , где A — площадь диска, а T — температура поверхности звезды.

1.2 — 1.6 балла

Используя график на рисунке 1, найдите отношения T_1/T_2 и R_1/R_2 .

Спектрометрия двойных систем

В этом разделе мы вычислим астрономические характеристики двойной звезды, используя экспериментальные спектрометрические данные для двойной системы.

Атомы поглощают или испускают излучение на определённых характерных для них длинах волн. Поэтому наблюдаемый спектр звезды содержит *линии поглощения*, обусловленные атомами в её атмосфере. В спектре натрия имеется характерная жёлтая линия (линия D_1) с длиной волны $5895.9 \text{ \AA}$ ($10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$). Рассмотрим спектр поглощения атомарного натрия на этой длине волны для двойной системы из предыдущего раздела. Спектр света, который мы получаем от двойной звезды, испытывает доплеровское смещение, поскольку звёзды движутся относительно нас. Скорости звёзд различны. Соответственно, длина волны линии

поглощения каждой звезды смещается на разную величину. Для наблюдения доплеровского смещения необходимы высокоточные измерения длины волны, поскольку скорости звёзд намного меньше скорости света. Скорость центра масс двойной системы, рассматриваемой в этой задаче, намного меньше орбитальных скоростей звёзд. Поэтому все доплеровские смещения можно считать обусловленными орбитальным движением звёзд. В таблице 1 приведены результаты измерения спектра звёзд наблюдаемой нами двойной системы.

Таблица 1: Спектр поглощения двойной звёздной системы для линии D₁ натрия

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(Примечание: строить график по данным этой таблицы не требуется)

2 Используя таблицу 1,

2.1 — 1.8 балла

Пусть v_1 и v_2 — орбитальные скорости звёзд. Найдите v_1 и v_2 .

Скорость света $c = 3.0 \times 10^8$ м/с. Пренебрегите всеми релятивистскими эффектами.

2.2 — 0.7 балла

Найдите отношение масс звёзд (m_1/m_2).

2.3 — 0.8 балла

Пусть r_1 и r_2 — расстояния от каждой звезды до общего центра масс.

Найдите r_1 и r_2 .

2.4 — 0.2 балла

Пусть r — расстояние между звёздами. Найдите r .

3 Сила тяготения — единственная сила, действующая между звёздами.

3.1 — 1.2 балла

Найдите массу каждой звезды с точностью до одной значащей цифры.

Гравитационная постоянная $G = 6.7 \times 10^{-11}$ м³ кг⁻¹ с⁻².

Общие характеристики звёзд

4 Большинство звёзд вырабатывает энергию посредством одного и того же механизма.

Поэтому существует эмпирическая зависимость между их массой M и светимостью L , то есть полной мощностью излучения звезды. Эту зависимость можно записать в виде

$$L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha.$$

Здесь $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ — масса Солнца, а $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ — светимость Солнца. Эта зависимость представлена на рисунке 2 в двойном логарифмическом масштабе.

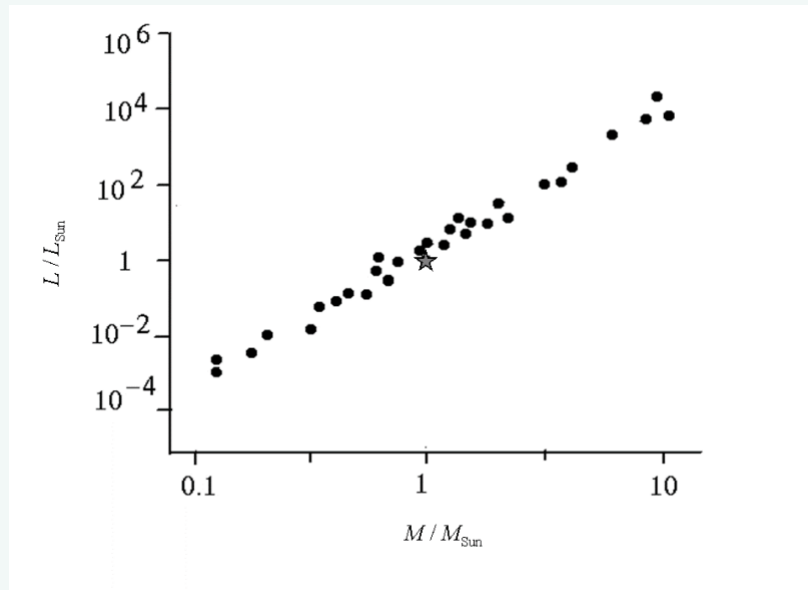


Рисунок 2. Светимость звезды зависит от её массы по степенному закону. Обе оси графика имеют логарифмический масштаб. Символом звёздочки обозначено Солнце с массой $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ и светимостью $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$.

4.1 — 0.6 балла

Найдите α с точностью до одной значащей цифры.

4.2 — 0.6 балла

Пусть L_1 и L_2 — светимости звёзд двойной системы, рассмотренной в предыдущих разделах. Найдите L_1 и L_2 .

4.3 — 0.9 балла

Каково расстояние d от нас до звёздной системы в световых годах?

Для нахождения расстояния можно использовать график на рисунке 1. Один световой год — это расстояние, которое свет проходит за один год.

4.4 — 0.4 балла

Каково максимальное угловое расстояние θ между звёздами при наблюдении из нашей точки?

4.5 — 0.4 балла

Каков наименьший диаметр апертуры оптического телескопа D , позволяющего разрешить эти две звезды?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В последующих результатах используются неокруглённые промежуточные значения.

- **1.1:** $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$; $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.
- **1.2:** $T_1/T_2 \simeq 1.39$; $R_1/R_2 \simeq 1.56$.
- **2.1:** $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}$; $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- **2.2:** $m_1/m_2 \simeq 1.7$.
- **2.3:** $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}$; $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}$.
- **2.4:** $r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}$.
- **3.1:** С точностью до одной значащей цифры $m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}$, $m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}$.
- **4.1:** $\alpha \simeq 4$.
- **4.2:** $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}$; $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}$.
- **4.3:** $d \simeq 82 \text{ световых года} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}$.
- **4.4:** $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$, или 2.7×10^{-3} угловой секунды.
- **4.5:** $D_{\min} \simeq 54 \text{ m}$, при использовании критерия Рэлея для заданной длины волны линии натрия 589.59 nm .

Решение

1.1

Орбитальный период равен промежутку времени между последовательными минимумами **одинаковой глубины**. По рисунку 1 он составляет приблизительно 3.0 суток. Соседние минимумы разной глубины соответствуют двум различным соединениям и разделены половиной периода.

Таким образом,

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

Угловая частота равна

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

Обозначим вклады незатенённых звёзд в интенсивность излучения на Земле через

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

где C одинаково для обеих звёзд, поскольку они находятся практически на одном расстоянии от нас. Вне затмения

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

При наблюдении в плоскости орбит затмения являются центральными. Поскольку $R_1 > R_2$, большая звезда может полностью закрыть меньшую. Во время этого затмения интенсивность уменьшается на I_2 .

При другом затмении меньшая звезда закрывает участок диска более горячей звезды, равный по площади собственному диску. Уменьшение интенсивности тогда равно

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

Поскольку $T_1 > T_2$, имеем $B > I_2$. Следовательно, менее глубокий минимум соответствует затмению, при котором скрыта звезда 2.

Из менее глубокого минимума получаем

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

Из глубокого минимума получаем

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

Разделив B на I_2 , получаем

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

так что

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

Аналогично,

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

откуда

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

При нерелятивистском движении доплеровское смещение определяется выражением

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

где u — лучевая скорость, положительная при удалении, а

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ \AA}.$$

При движении по круговой орбите, наблюдаемой с ребра, лучевая скорость изменяется синусоидально от $-v_i$ до $+v_i$. Поэтому амплитуда изменения длины волны определяет орбитальную скорость:

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

Используя экстремальные значения из таблицы, получаем

$$\Delta\lambda_1 = \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ \AA} = 1.8 \text{ \AA},$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ \AA} = 3.1 \text{ \AA}.$$

Следовательно,

$$v_1 = 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.$$

Таким образом,

$$v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

2.2

В системе отсчёта центра масс импульсы звёзд равны по модулю и противоположны по направлению:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Следовательно,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7.$$

2.3

Обе звезды имеют одинаковую угловую частоту. Для равномерного движения по окружности

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

Используя неокруглённые значения из предыдущих вычислений, получаем

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}.$$

2.4

Центр масс находится между звёздами, поэтому расстояние между ними равно

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}.$$

Таким образом, с точностью до двух значащих цифр

$$r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3.1

Сила тяготения является центростремительной силой для каждой звезды:

$$\frac{G m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Отсюда следует, что

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

Подстановка с сохранением промежуточных цифр даёт

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Следовательно, требуемые ответы с точностью до одной значащей цифры имеют вид

$$m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Далее будем использовать неокруглённые вычисленные массы, поскольку возведение преждевременно округлённых масс в степень привело бы к существенной численной погрешности.

4.1

Логарифмируя эмпирическую зависимость, получаем

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

Таким образом, α — угловой коэффициент линии зависимости на графике в двойном логарифмическом масштабе.

Линия зависимости проходит приблизительно через точки

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = (1, 1) \quad \text{и} \quad (10, 10^4).$$

Следовательно,

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

При $\alpha = 4$

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}} \right)^4.$$

Используя неокруглённые массы, определённые из динамики движения, получаем

$$L_1 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W},$$
$$L_2 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}.$$

Следовательно,

$$\boxed{L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}}.$$

Для проверки согласованности отметим, что эти значения дают $L_1/L_2 \simeq 8.8$, что близко к фотометрическому отношению $I_1/I_2 = 9$, как и следует ожидать с учётом приближённого характера эмпирического закона и измеренных данных.

4.3

При изотропном излучении светимость L создаёт на расстоянии d интенсивность $L/(4\pi d^2)$. Вне затмения излучение обеих звёзд поступает к нам полностью:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

Таким образом,

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

Принимая продолжительность года приблизительно равной 365 суткам, получаем

$$1 \text{ световой год} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$d \simeq 82 \text{ световых года} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ м}.$$

4.4

Расстояние между проекциями звёзд на плоскость неба максимально, когда соединяющая их прямая перпендикулярна лучу зрения. Тогда оно равно r .

Поскольку $r \ll d$, приближение малых углов даёт

$$\theta_{\max} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad}.$$

Следовательно,

$$\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

или приблизительно

$$\theta_{\max} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ угловой секунды}.$$

4.5

Для идеального телескопа с круглой апертурой, разрешение которого ограничено дифракцией, критерий Рэлея задаёт минимальное разрешаемое угловое расстояние:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

Следовательно, наименьший диаметр апертуры, позволяющей разрешить звёзды при максимальном расстоянии между их изображениями, удовлетворяет соотношению

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

Используя указанную в условии длину волны линии натрия,

$$\lambda = 5895.9 \text{ \AA} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ м},$$

получаем

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ м} \simeq \boxed{54 \text{ м}}.$$

В более общем виде зависимость от длины волны имеет вид

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ м} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

Решение проверено по официальному решению.