

IPhO 2007

Problemas teóricos y soluciones · Isfahán, Irán · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2007/

Problema 1: Análisis dimensional y agujeros negros (radiación de Hawking)

En física, siempre que tenemos una relación de igualdad, ambos miembros de la ecuación deben ser del mismo tipo, es decir, deben tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, no puede darse una situación en la que la magnitud del miembro derecho de la ecuación represente una longitud y la del miembro izquierdo represente un intervalo de tiempo. A partir de este hecho, a veces se puede deducir casi por completo la forma de una relación física sin resolver el problema analíticamente. Por ejemplo, si se nos pidiera hallar el tiempo que tarda un objeto en caer desde una altura de h bajo la influencia de una aceleración gravitatoria constante g , podríamos argumentar que solo hace falta construir una magnitud que represente un intervalo de tiempo a partir de las magnitudes g y h , y que la única forma posible de hacerlo es $T = a(h/g)^{1/2}$. Obsérvese que esta solución incluye un coeficiente a , aún indeterminado, que es *adimensional* y, por tanto, no puede determinarse mediante este método. Este coeficiente puede ser un número como 1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π o cualquier otro número real. Este método para deducir relaciones físicas se denomina *análisis dimensional*. En el análisis dimensional, los coeficientes adimensionales no son importantes y no es necesario escribirlos. Afortunadamente, en la mayoría de los problemas físicos estos coeficientes son del orden de 1 y su eliminación no modifica el orden de magnitud de las magnitudes físicas. Por tanto, al aplicar el análisis dimensional al problema anterior, se obtiene $T = (h/g)^{1/2}$.

En general, las dimensiones de una magnitud física se escriben en función de las dimensiones de cuatro magnitudes fundamentales: M (masa), L (longitud), T (tiempo) y K (temperatura). Las dimensiones de una magnitud arbitraria x se denotan por $[x]$. Por ejemplo, para expresar las dimensiones de la velocidad v , la energía cinética E_k y la capacidad calorífica C_V , escribimos: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1 Constantes fundamentales y análisis dimensional

1.1	Halle las dimensiones de <i>las constantes fundamentales</i> , es decir, la constante de Planck, h , la velocidad de la luz, c , la constante de gravitación universal, G , y la constante de Boltzmann, k_B , en función de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.	0.8
-----	---	-----

La ley de Stefan-Boltzmann establece que el poder emisivo de un cuerpo negro, que es la energía total radiada por unidad de superficie de un cuerpo negro y por unidad de tiempo, es igual a $\sigma\theta^4$, donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y θ es la temperatura absoluta del cuerpo negro.

1.2	Determine las dimensiones de la constante de Stefan-Boltzmann en función de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.	0.5
-----	--	-----

La constante de Stefan-Boltzmann no es una constante fundamental y puede escribirse en función de las constantes fundamentales, es decir, puede escribirse $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$. En esta relación, a es un parámetro adimensional del orden de 1. Como se ha mencionado antes, el valor exacto de a no es significativo desde nuestro punto de vista, por lo que lo tomaremos igual a 1.

1.3	Halle α , β , γ y δ mediante el análisis dimensional.	1.0
-----	--	-----

2 Física de los agujeros negros

En esta parte del problema, queremos averiguar algunas propiedades de los agujeros negros mediante el análisis dimensional. Según un teorema de la física conocido como el *teorema de ausencia de pelo*, todas las características del agujero negro que estamos considerando en este problema dependen únicamente de su masa. Una característica de un agujero negro es el área de su *horizonte de sucesos*. A grandes rasgos, el horizonte de sucesos es la frontera del agujero negro. Dentro de esta frontera, la gravedad es tan intensa que ni siquiera la luz puede salir de la región delimitada por ella.

Queremos hallar una relación entre la masa de un agujero negro, m , y el área de su horizonte de sucesos, A . Esta área depende de la masa del agujero negro, de la velocidad de la luz y de la constante de gravitación universal. Como en 1.3, escribiremos $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1	Utilice el análisis dimensional para hallar α , β y γ .	0.8
-----	---	-----

Del resultado de 2.1 se desprende que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro aumenta con su masa. Desde un punto de vista clásico, nada sale de un agujero negro y, por tanto, en todos los procesos físicos el área del horizonte de sucesos solo puede aumentar. Por analogía con el segundo principio de la termodinámica, Bekenstein propuso asignar a un agujero negro una entropía, S , proporcional al área de su horizonte de sucesos, es decir, $S = \eta A$. Otros argumentos han reforzado la plausibilidad de esta conjetura.

2.2	Utilice la definición termodinámica de entropía $dS = dQ/\theta$ para hallar las dimensiones de la entropía. dQ es el calor intercambiado y θ es la temperatura absoluta del sistema.	0.2
2.3	Como en 1.3, exprese la constante dimensional η en función de las constantes fundamentales h , c , G y k_B .	1.1

No utilice el análisis dimensional en el resto del problema, aunque puede utilizar los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

3 Radiación de Hawking

Mediante un enfoque semicuántico, Hawking argumentó que, contrariamente al punto de vista clásico, los agujeros negros emiten una radiación similar a la de un cuerpo negro a una temperatura denominada *temperatura de Hawking*.

3.1	Utilice $E = mc^2$, que da la energía del agujero negro en función de su masa, y los principios de la termodinámica para expresar la temperatura de Hawking θ_H de un agujero negro en función de su masa y de las constantes fundamentales. Suponga que el agujero negro no realiza trabajo sobre su entorno.	0.8
3.2	Por tanto, la masa de un agujero negro aislado cambiará debido a la radiación de Hawking. Utilice la ley de Stefan-Boltzmann para hallar cómo depende esta tasa de variación de la	0.7

	temperatura de Hawking del agujero negro, θ_H , y exprésela en función de la masa del agujero negro y de las constantes fundamentales.	
3.3	Halle el tiempo t^* que tarda un agujero negro aislado de masa m en evaporarse por completo, es decir, en perder toda su masa.	1.1

Desde el punto de vista de la termodinámica, los agujeros negros presentan ciertos comportamientos exóticos. Por ejemplo, la capacidad calorífica de un agujero negro es negativa.

3.4	Halle la capacidad calorífica de un agujero negro de masa m .	0.6
-----	---	-----

4 Los agujeros negros y la radiación cósmica de fondo

Considere un agujero negro expuesto a la radiación cósmica de fondo. La radiación cósmica de fondo es una radiación de cuerpo negro con una temperatura θ_B que llena todo el universo. Por tanto, un objeto con un área total A recibirá una energía igual a $\sigma\theta_B^4 \times A$ por unidad de tiempo. Así pues, un agujero negro pierde energía mediante la radiación de Hawking y gana energía de la radiación cósmica de fondo.

4.1	Halle la tasa de variación de la masa de un agujero negro en función de la masa del agujero negro, de la temperatura de la radiación cósmica de fondo y de las constantes fundamentales.	0.8
4.2	Para una determinada masa, m^* , esta tasa de variación se anulará. Halle m^* y exprésela en función de θ_B y de las constantes fundamentales.	0.4
4.3	Utilice su respuesta a 4.2 para sustituir θ_B en su respuesta al apartado 4.1 y exprese la tasa de variación de la masa de un agujero negro en función de m , m^* y de las constantes fundamentales.	0.2
4.4	Halle la temperatura de Hawking de un agujero negro en equilibrio térmico con la radiación cósmica de fondo.	0.4
4.5	¿Es estable o inestable el equilibrio? ¿Por qué? (Exprese su respuesta matemáticamente)	0.6

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

En estos resultados se toman iguales a 1 los coeficientes adimensionales indeterminados de las Partes 1–2, tal como se indica. Se conservan los factores numéricos que surgen de la derivación y la integración. Escribimos $\dot{m} = dm/dt$.

- **1.1:** $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- **1.2:** $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.
- **1.3:** $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4)$, lo que da $\sigma = \frac{k_B^4}{h^3c^2}$.
- **2.1:** $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2)$, lo que da $A = \frac{G^2m^2}{c^4}$.
- **2.2:** $[S] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- **2.3:** $\eta = \frac{k_Bc^3}{hG}$.
- **3.1:** $\theta_H = \frac{hc^3}{2Gk_Bm}$.

- **3.2:** $\dot{m} = -\frac{\sigma A \theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}.$
- **3.3:** $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}.$
- **3.4:** $C = -\frac{2Gk_B m^2}{hc} < 0.$
- **4.1:** $\dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{hc^4}{16G^2 m^2}.$
- **4.2:** $m^* = \frac{2Gk_B \theta_B}{hc^4}.$
- **4.3:** $\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$
- **4.4:** $\theta_H(m^*) = \theta_B.$
- **4.5: Inestable.** Una pequeña perturbación de la masa satisface $\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m$, por lo que su magnitud crece exponencialmente.

Solución

Utilizamos el modelo de agujero negro que depende únicamente de la masa y las leyes de emisión y absorción de cuerpo negro especificadas en el problema. Todas las expresiones mantienen la normalización de los coeficientes adimensionales adoptada en las Partes 1–2. No se proporcionan valores numéricos de entrada, por lo que los resultados solicitados son simbólicos.

1.1

La relación para la energía del fotón $E = h\nu$, con $[\nu] = T^{-1}$, da

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2 T^{-1}.$$

Como c es una velocidad,

$$[c] = LT^{-1}.$$

La ley de gravitación de Newton, $F = Gm_1 m_2 / r^2$, da

$$[G] = \frac{[F]L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

El producto $k_B \theta$ tiene dimensiones de energía, por lo que

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2 T^{-2} K^{-1}.$$

Sus unidades en el SI son, respectivamente, J s, m s⁻¹, m³ kg⁻¹ s⁻² y J K⁻¹.

1.2

La ley de Stefan–Boltzmann para la potencia total radiada es

$$P = \sigma A \theta^4.$$

Por consiguiente,

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

La unidad correspondiente en el SI es $W m^{-2} K^{-4}$.

1.3

Con el coeficiente prescrito $a = 1$,

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

Las dimensiones del miembro derecho son

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

Al igualarlas a $MT^{-3}K^{-4}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

Al resolver,

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

Así,

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

Para $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$,

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

Por tanto,

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

La última ecuación da $\beta = -2\alpha$; la ecuación correspondiente a la longitud da entonces $\alpha = 2$. Por tanto,

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

y

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

A partir de la relación termodinámica de la entropía,

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

la entropía tiene dimensiones

$$\boxed{[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}}.$$

Su unidad en el SI es J K^{-1} .

2.3

Como $S = \eta A$,

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2}K^{-1}.$$

Escribimos

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

Al igualar las dimensiones, se obtiene

$$\begin{aligned} p - r + s &= 1, \\ 2p + q + 3r + 2s &= 0, \\ -p - q - 2r - 2s &= -2, \\ -s &= -1. \end{aligned}$$

Así, $s = 1$, $p = r$, y las ecuaciones restantes dan

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\eta = \frac{k_B c^3}{hG}}.$$

Al combinar este resultado con el área del horizonte, se obtiene la entropía en función de la masa:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

Para la familia termodinámica de estados del agujero negro, el primer principio sin término de trabajo es

$$dE = \theta_H dS.$$

Como

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

tenemos

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

Por consiguiente,

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_B m}}.$$

La temperatura disminuye al aumentar la masa.

3.2

La potencia radiada hacia el exterior es

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

La conservación de la energía para un agujero negro aislado exige

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

donde el signo menos expresa la pérdida de masa. Por tanto,

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

Al sustituir la temperatura de 3.1,

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

Para expresar la dependencia únicamente en función de la temperatura, sustituimos

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_H}.$$

Esto da

$$\boxed{\dot{m} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2}}.$$

Así, la magnitud de la tasa de pérdida de masa es proporcional a θ_H^2 . Aunque la emisión por unidad de área es proporcional a θ_H^4 , el área del horizonte es proporcional a m^2 y, por tanto, a θ_H^{-2} .

3.3

Sea m la masa inicial, y denotemos la masa instantánea por $\mu(t)$. Definimos

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

La ecuación de pérdida de masa es

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

Separando variables e integrando desde $\mu(0) = m$,

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

por lo que

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

Por tanto,

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

La evaporación completa se produce cuando $\mu(t^*) = 0$:

$$\boxed{t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}}.$$

Este es el tiempo de vida que se obtiene al extender el modelo de evaporación del problema hasta una masa nula.

3.4

Como no hay término de trabajo, la capacidad calorífica es

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

Utilizando

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

obtenemos

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

Al sustituir $\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$,

$$C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc}.$$

De forma equivalente,

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

La capacidad calorífica es negativa: absorber energía aumenta la masa y disminuye la temperatura, mientras que perder energía aumenta la temperatura.

4.1

Las potencias absorbida y emitida son, según el modelo indicado,

$$P_{\text{in}} = \sigma A\theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A\theta_H^4.$$

La conservación de la energía da

$$c^2\dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

por lo que

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2}(\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

Al sustituir las expresiones obtenidas anteriormente,

$$\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}.$$

El primer término representa la absorción; el segundo representa la emisión.

4.2

En $m = m^*$, la tasa neta se anula:

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

Para temperaturas positivas, esto exige

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

Utilizando 3.1,

$$\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B,$$

y, por tanto,

$$m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_B}.$$

4.3

A partir de 4.2,

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*}.$$

Al sustituir en 4.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

De forma equivalente,

$$\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$$

4.4

En el equilibrio térmico, las potencias absorbida y emitida son iguales, por lo que

$$\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B.$$

4.5

Mantenemos fija la temperatura de fondo, de modo que m^* es fija. Escribimos

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

Al derivar,

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

En el equilibrio,

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} > 0.$$

Para una pequeña perturbación $m = m^* + \delta m$, la linealización da, por tanto,

$$\dot{\delta m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m,$$

cuya solución es

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2(m^*)^3} \right].$$

La perturbación crece, por lo que

el equilibrio es inestable.

Los signos de 4.3 muestran directamente el mismo resultado:

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

Un agujero negro ligeramente más masivo está más frío que el fondo y gana aún más masa. Uno ligeramente menos masivo está más caliente y pierde aún más masa.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Acelerómetro capacitivo para el airbag de un automóvil

En este problema estudiamos un modelo simplificado de los acelerómetros diseñados para activar los airbags de seguridad de los automóviles durante una colisión. Queremos construir un sistema electromecánico de tal manera que, cuando la aceleración supere cierto límite, uno de los parámetros eléctricos del sistema, como la tensión en un punto determinado del circuito, supere un umbral y, como consecuencia, se active el airbag.

Nota: Desprecie la gravedad en este problema.

1 Considere un condensador de placas paralelas como el de la Figura 1. El área de cada placa del condensador es A y la distancia entre las dos placas es d . La distancia entre las dos placas es mucho menor que las dimensiones de las placas. Una de estas placas está unida a una pared mediante un muelle de constante elástica k , y la otra placa está fija. Cuando la distancia entre las placas es d , el muelle no está comprimido ni estirado; en otras palabras, en este estado no se ejerce ninguna fuerza sobre el muelle. Suponga que la permitividad del aire entre las placas es la del vacío ε_0 . La capacidad correspondiente a esta distancia entre las placas del condensador es $C_0 = \varepsilon_0 A/d$. Depositamos cargas $+Q$ y $-Q$ en las placas y dejamos que el sistema alcance el equilibrio mecánico.

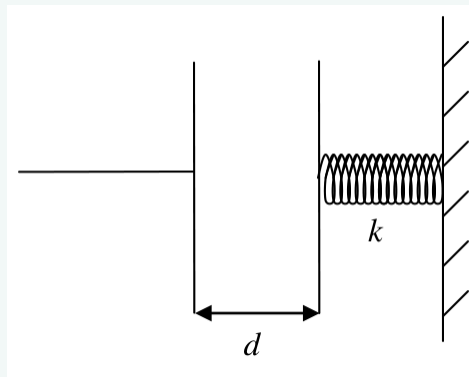


Figura 1

Parte	Pregunta	Puntos
1.1	Calcule la fuerza eléctrica, F_E , que las placas ejercen entre sí.	0.8
1.2	Sea x el desplazamiento de la placa unida al muelle. Halle x .	0.6
1.3	En este estado, ¿cuál es la diferencia de potencial eléctrico V entre las placas del condensador en función de Q , A , d , k ?	0.4
1.4	Sea C la capacidad del condensador, definida como el cociente entre la carga y la diferencia de potencial. Halle C/C_0 en función de Q , A , d y k .	0.3
1.5	¿Cuál es la energía total, U , almacenada en el sistema en función de Q , A , d y k ?	0.6

La Figura 2 muestra una masa M unida a una placa conductora de masa despreciable y también a dos muelles con la misma constante elástica k . La placa conductora puede moverse de un lado a otro en el espacio entre dos placas conductoras fijas. Todas estas placas son similares y tienen la misma área A . Por tanto, estas tres placas constituyen dos condensadores. Como se muestra en la Figura 2, las placas fijas están conectadas a los potenciales dados V y $-V$, y la placa central está conectada a tierra a través de un conmutador de dos posiciones. El cable conectado a la placa móvil no perturba el movimiento de la placa y las tres placas permanecerán siempre paralelas. Cuando el conjunto no está acelerando, la distancia de cada placa fija a la placa móvil es d , que es mucho menor que las dimensiones de las placas. El espesor de la placa móvil puede despreciarse.

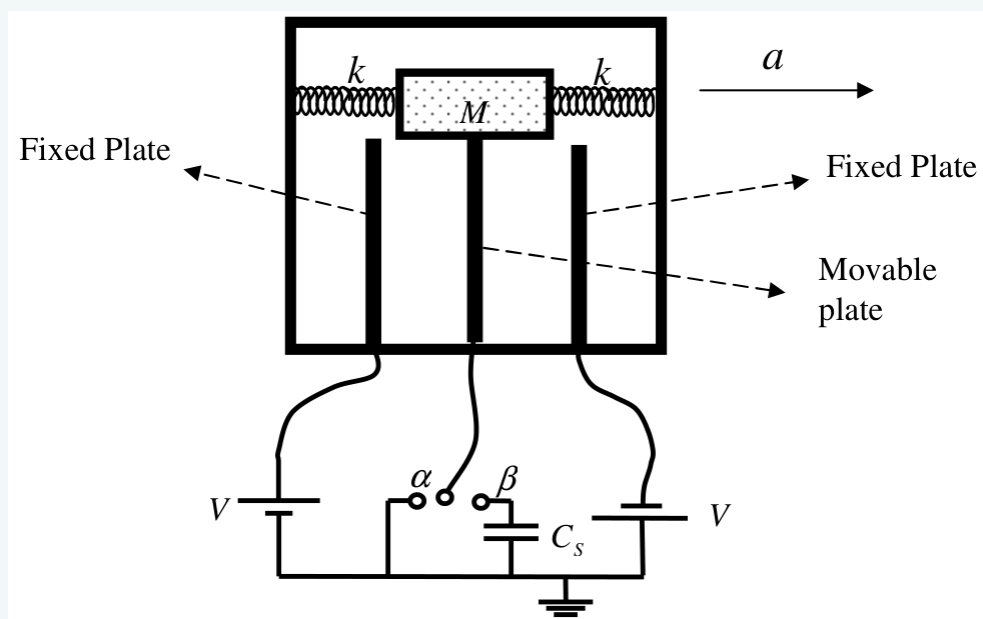


Figura 2

El conmutador puede encontrarse en cualquiera de las dos posiciones α y β . Suponga que el conjunto de condensadores acelera junto con el automóvil y que la aceleración es constante. Suponga que, durante esta aceleración constante, el muelle no oscila y todos los componentes de este conjunto de condensadores se encuentran en sus posiciones de equilibrio, es decir, no se mueven unos respecto de otros ni, por tanto, respecto del automóvil.

Debido a la aceleración, la placa móvil se desplazará una cierta distancia x desde el punto medio entre las dos placas fijas.

2 Considere el caso en que el conmutador está en la posición α , es decir, la placa móvil está conectada a tierra mediante un cable; entonces

Parte	Pregunta	Puntos
2.1	Halle la carga de cada condensador en función de x .	0.4
2.2	Halle la fuerza eléctrica neta sobre la placa móvil, F_E , en función de x .	0.4
2.3	Suponga que $d \gg x$ y que los términos de orden x^2 pueden despreciarse frente a los términos de orden d^2 . Simplifique la respuesta al apartado anterior.	0.2
2.4	Escriba la fuerza total sobre la placa móvil (la suma de la fuerza eléctrica y las fuerzas de los muelles) como $-k_{\text{eff}}x$ y dé la expresión de k_{eff} .	0.7
2.5	Expresé la aceleración constante a en función de x .	0.4

3 Suponga ahora que el conmutador está en la posición β , es decir, la placa móvil está conectada a tierra a través de un condensador cuya capacidad es C_S (los condensadores no tienen carga inicial). Si la placa móvil se desplace una distancia x desde su posición central,

Parte	Pregunta	Puntos
3.1	Halle V_S , la diferencia de potencial eléctrico entre los terminales del condensador C_S , en función de x .	1.5
3.2	Suponga de nuevo que $d \gg x$ y desprecie los términos de orden x^2 frente a los términos de orden d^2 . Simplifique su respuesta al apartado anterior.	0.2

4 Queremos ajustar los parámetros del problema de manera que el airbag no se active durante una frenada normal, pero se abra con suficiente rapidez durante una colisión para evitar que la cabeza del conductor choque contra el parabrisas o el volante. Como ha visto en la Parte 2, la fuerza ejercida sobre la placa móvil por los muelles y las cargas eléctricas puede representarse como la de un muelle con una constante elástica efectiva k_{eff} . El conjunto de condensadores es similar a un *sistema masa-muelle* de masa M y constante elástica k_{eff} sometido a una aceleración constante a , que en este problema es la aceleración del automóvil.

Nota: En esta parte del problema, ya no es válida la suposición de que la masa y el muelle están en equilibrio bajo una aceleración constante y, por tanto, permanecen fijos respecto del automóvil.

Desprecie el rozamiento y considere los siguientes valores numéricos para los parámetros del problema:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m}, \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

Parte	Pregunta	Puntos
4.1	Utilizando estos datos, halle el cociente entre la fuerza eléctrica que calculó en el apartado 2.3 y la fuerza de los muelles, y demuestre que las fuerzas eléctricas pueden despreciarse frente a las fuerzas de los muelles.	0.6

Aunque no hemos calculado las fuerzas eléctricas para el caso en que el conmutador está en la posición β , puede demostrarse que, en esta situación, las fuerzas eléctricas son igualmente pequeñas y pueden despreciarse.

Parte	Pregunta	Puntos
4.2	Si el automóvil, mientras se desplaza con velocidad constante, frena de repente con una aceleración constante a , ¿cuál es el desplazamiento máximo de la placa móvil? Dé su respuesta en función de los parámetros.	0.6

Suponga que el conmutador está en la posición β y que el sistema se ha diseñado de modo que, cuando la tensión eléctrica entre los terminales del condensador alcanza $V_S = 0.15 \text{ V}$, se activa el airbag. Queremos que el airbag no se active durante una frenada normal cuando la aceleración del automóvil sea menor que la aceleración de la gravedad $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, pero que se active en caso contrario.

Parte	Pregunta	Puntos
4.3	¿Cuánto debe valer C_S para este propósito?	0.6

Queremos averiguar si el airbag se activará con suficiente rapidez para evitar que la cabeza del conductor golpee el parabrisas o el volante. Suponga que, como resultado de la colisión, el automóvil experimenta una desaceleración igual a g , pero la cabeza del conductor sigue moviéndose con velocidad constante.

Parte	Pregunta	Puntos
4.4	Estimando la distancia entre la cabeza del conductor y el volante, halle el tiempo t_1 que transcurre hasta que la cabeza del conductor golpea el volante.	0.8
4.5	Halle el tiempo t_2 que transcurre hasta que se activa el airbag y compárelo con t_1 . ¿Se activa el airbag a tiempo? Suponga que el airbag se abre instantáneamente.	0.9

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Tome $x > 0$ hacia la placa fija izquierda. En las partes 2–4, esta es la placa a $+V$; tome la aceleración del automóvil $a > 0$ en el sentido opuesto, como se indica en la figura. Las componentes de las fuerzas son positivas en el sentido positivo de x , y V_S es el potencial de la placa móvil respecto de tierra. Escriba $C_0 = \epsilon_0 A/d$.

- 1.1: $F_E = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$, atractiva.
- 1.2: $x = \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A}$, hacia la placa fija.
- 1.3: $V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right)$.
- 1.4: $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A d} \right)^{-1}$.
- 1.5: $U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\epsilon_0^2 A^2}$.
- 2.1: Módulos de las cargas: $Q_L = \frac{\epsilon_0 A V}{d - x}$, $Q_R = \frac{\epsilon_0 A V}{d + x}$. Las cargas correspondientes en la placa móvil son $-Q_L$ y $+Q_R$.

- **2.2:** $F_E = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right] = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$
- **2.3:** $F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$
- **2.4:** $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x, \quad k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}.$
- **2.5:** $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x,$ en la aproximación de desplazamientos pequeños.
- **3.1:** $V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}.$
- **3.2:** $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$
- **4.1:** $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3} = 7.6 \times 10^{-9}.$ Por tanto, $k_{\text{eff}} \simeq 2k.$
- **4.2:** $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$
- **4.3:** $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}.$
- **4.4:** $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$ Estimando la distancia inicial entre la cabeza y el volante como $L = 0.50 \text{ m},$ se obtiene $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}.$
- **4.5:** $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}.$ Como $t_2 \ll t_1,$ el airbag se activa a tiempo bajo las suposiciones indicadas.

Solución

Despreciamos los efectos de borde en todo el problema, lo cual está justificado por las pequeñas separaciones entre las placas en comparación con sus dimensiones.

1.1

La densidad superficial de carga es $\sigma = Q/A.$ Una placa cargada uniformemente produce un campo de módulo $\sigma/(2\varepsilon_0)$ en la otra placa. Una placa experimenta una fuerza debida al campo de la otra placa, por lo que el módulo de la fuerza atractiva es

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Para una carga fija, esta fuerza es independiente de la separación entre las placas dentro de la aproximación de placas paralelas.

1.2

La atracción desplaza la placa móvil hacia la placa fija y estira el muelle una distancia $x.$ El equilibrio mecánico exige

$$kx = F_E.$$

Por consiguiente,

$$x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}.$$

La solución con las placas separadas requiere $x < d$, o bien

$$Q^2 < 2k\varepsilon_0 Ad.$$

1.3

El campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Su separación de equilibrio es $d - x$, por lo que

$$V = E(d - x).$$

Sustituyendo el desplazamiento, se obtiene

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right).$$

1.4

Según la definición dada,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}.$$

Como $C_0 = \varepsilon_0 A/d$,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 Ad} \right)^{-1}.$$

1.5

En el equilibrio, la energía almacenada consta de la energía del campo eléctrico del condensador y de la energía elástica del muelle:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\varepsilon_0 A} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Utilizando $x = Q^2/(2k\varepsilon_0 A)$,

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\varepsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \\ &= \left[\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \right]. \end{aligned}$$

2.1

Tomando x positivo hacia la placa izquierda, las separaciones a izquierda y derecha son $d - x$ y $d + x$. Por tanto, sus capacidades son

$$C_L = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\varepsilon_0 A}{d + x}.$$

En la posición α del conmutador, la placa móvil está conectada a tierra. Cada condensador tiene una tensión de módulo V , de modo que

$$Q_L = C_L V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}.$$

La placa fija izquierda tiene una carga $+Q_L$, y la superficie de la placa móvil enfrentada a ella tiene una carga $-Q_L$. La placa fija derecha tiene una carga $-Q_R$, y la superficie de la placa móvil enfrentada a ella tiene una carga $+Q_R$.

2.2

Cada placa fija atrae a la placa móvil. La atracción de la izquierda actúa en el sentido positivo de x y la atracción de la derecha en el sentido negativo de x . Utilizando la fuerza de 1.1,

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Por tanto,

$$F_E = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right].$$

Al combinar las fracciones, se obtiene

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 A V^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

La fuerza tiene el mismo signo que x : la atracción eléctrica tiende a aumentar el desplazamiento hacia la placa más cercana.

2.3

Reescribimos el resultado exacto como

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right)^{-2}.$$

Para $|x| \ll d$, al despreciar x^2/d^2 se obtiene

$$F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x.$$

2.4

Ambos muelles ejercen fuerzas restauradoras. Uno está comprimido y el otro estirado, y su fuerza total es

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

Sumando la fuerza eléctrica linealizada,

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

Por tanto,

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}.$$

La interacción eléctrica reduce la rigidez restauradora. Una respuesta estable para desplazamientos pequeños requiere $k_{\text{eff}} > 0$.

2.5

El automóvil acelera en sentido opuesto al sentido positivo de x . En el sistema de referencia del automóvil, la fuerza de inercia sobre la masa es, por tanto, $+Ma$. El equilibrio relativo exige

$$-k_{\text{eff}}x + Ma = 0.$$

De ahí que

$$a = \frac{k_{\text{eff}}x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

Esta expresión utiliza la aproximación de desplazamientos pequeños introducida en 2.3.

3.1

En la posición β , la placa móvil, su cable de conexión y la placa de C_S conectada a él forman un conductor aislado. Su carga total, inicialmente nula, permanece nula.

Sea V_S su potencial respecto de tierra. Las cargas en sus tres superficies que forman parte de los condensadores son

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

La conservación de la carga da

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

Por tanto,

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

Ahora bien,

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ax}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 Ad}{d^2 - x^2}.$$

La sustitución da

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}.$$

En particular, $V_S = 0$ en la posición central y $V_S > 0$ para un desplazamiento hacia la placa a $+V$.

3.2

Despreciamos x^2 frente a d^2 en el denominador:

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S d^2}.$$

Utilizando $C_0 = \varepsilon_0 A/d$,

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$$

Por tanto, en esta aproximación la tensión medida es proporcional al desplazamiento.

4.1

La fuerza eléctrica y la fuerza de los muelles se oponen entre sí. El cociente entre sus módulos es

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 AV^2/d^3)|x|}{2k|x|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3}.$$

Con $d = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

La contribución eléctrica es despreciable, por lo que

$$\boxed{k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m.}}$$

Tal como permite el enunciado, también despreciamos las fuerzas eléctricas en la posición β .

4.2

Antes de la frenada, la masa está en el centro y en reposo respecto del automóvil:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Tras el inicio repentino de la aceleración constante, su ecuación de movimiento en el sistema de referencia del automóvil es

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

Definimos

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

La solución que satisface las condiciones iniciales es

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

El primer máximo se produce cuando $\omega t = \pi$, lo que da

$$\boxed{x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}}.$$

El desplazamiento máximo es el doble del desplazamiento de equilibrio estático porque, en ausencia de amortiguamiento, la masa sobrepasa su nueva posición de equilibrio.

4.3

Sea la tensión de activación

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V}.$$

Para situar el límite de activación en $a = g$, la tensión máxima durante una aceleración constante g debe ser igual a V_{th} .

El desplazamiento máximo correspondiente es

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Por tanto,

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

lo que respalda la aproximación de desplazamientos pequeños.

A partir de 3.2,

$$V_{th} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

Despejando la capacidad necesaria,

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{th}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{th}} - 1 \right).$$

Aquí,

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

y

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

Por consiguiente,

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

Con la precisión de los datos,

$$C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

Para este modelo de frenada con aceleración constante, la tensión máxima es proporcional a a , por lo que las aceleraciones inferiores a g no alcanzan el umbral, mientras que las iguales o superiores a g sí lo alcanzan.

A modo de comparación, conservando la geometría exacta de 3.1 se obtiene

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (Vx_g/V_{th} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

que tiene el mismo valor redondeado.

4.4

Sea L la distancia inicial entre la cabeza del conductor y el volante en la dirección del movimiento.

Inicialmente, ambos tienen la misma velocidad. La cabeza continúa con velocidad constante, mientras que el volante desacelera junto con el automóvil con una aceleración de módulo g . Por tanto, su aceleración relativa tiene módulo g , y la distancia que se acorta la separación tras un tiempo t es

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2}gt^2.$$

El impacto se produce cuando esta distancia es igual a L :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Tomando una estimación razonable $L = 0.50 \text{ m}$,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

Para $a = g$, el condensador se eligió de modo que la tensión de activación se alcance en el desplazamiento máximo x_g . El movimiento es

$$x(t) = \frac{Mg}{2k}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

Como $x_g = Mg/k$, la primera activación se produce cuando

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

o bien

$$\omega t_2 = \pi.$$

Por tanto,

$$\boxed{t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}}.$$

Numéricamente,

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

Comparando con el tiempo estimado hasta el impacto de la cabeza,

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

La cabeza se acerca al volante tan solo

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

antes de la activación. Por tanto, **el airbag se activa mucho antes de que la cabeza llegue al volante**, suponiendo una apertura instantánea, tal como se estipula.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Estrellas binarias

Dos estrellas que giran alrededor de su centro de masas forman un sistema estelar binario. Casi la mitad de las estrellas de nuestra galaxia forman sistemas estelares binarios. No es fácil reconocer desde la Tierra la naturaleza binaria de la mayoría de estos sistemas estelares, ya que la distancia entre las dos estrellas es mucho menor que su distancia a nosotros y, por tanto, no pueden distinguirse por separado con telescopios. Por ello, debemos recurrir a la fotometría o a la espectrometría para observar las variaciones de la intensidad o del espectro de una estrella determinada y averiguar si se trata de un sistema binario.

Fotometría de estrellas binarias

Si nos encontramos exactamente en el plano del movimiento de las dos estrellas, una de ellas ocultará (pasará por delante de) la otra en determinados momentos, y la intensidad del sistema en su conjunto variará con el tiempo desde nuestro punto de observación. Estos sistemas binarios se denominan binarias eclipsantes.

1 Suponga que dos estrellas se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masas común con una velocidad angular constante ω y que nos encontramos exactamente en el plano del movimiento del sistema binario. Suponga también que las temperaturas superficiales de las estrellas son T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$), y que sus radios correspondientes son R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$), respectivamente. La intensidad total de la luz, medida en la Tierra, se representa en la Figura 1 en función del tiempo. Mediciones cuidadosas indican que las intensidades de la luz incidente procedente de las estrellas correspondientes a los mínimos son, respectivamente, el 90 y el 63 por ciento de la intensidad máxima, I_0 , recibida de ambas estrellas ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). El eje vertical de la Figura 1 muestra el cociente I/I_0 , y el eje horizontal está graduado en días.

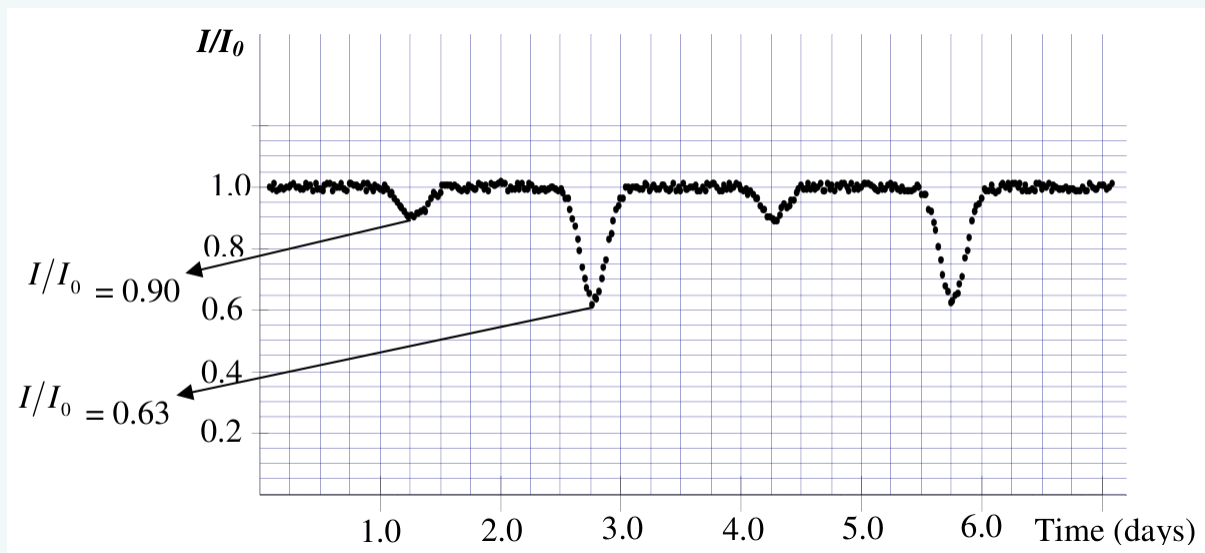


Figura 1. Intensidad relativa recibida del sistema estelar binario en función del tiempo. El eje vertical se ha normalizado mediante $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$. El tiempo se expresa en días.

1.1 — 0.8 puntos

Halle el período del movimiento orbital. Exprese su respuesta en **segundos** con dos cifras significativas.

¿Cuál es la frecuencia angular del sistema en **rad/sec**?

Con buena aproximación, la radiación recibida de una estrella es una radiación uniforme de cuerpo negro procedente de un disco plano cuyo radio es igual al de la estrella. Por tanto, la potencia recibida de la estrella es proporcional a AT^4 , donde A es el área del disco y T es la temperatura superficial de la estrella.

1.2 — 1.6 puntos

Utilice la gráfica de la Figura 1 para hallar los cocientes T_1/T_2 y R_1/R_2 .

Espectrometría de sistemas binarios

En esta sección, vamos a calcular las propiedades astronómicas de una estrella binaria utilizando datos espectrométricos experimentales del sistema binario.

Los átomos absorben o emiten radiación a determinadas longitudes de onda características. En consecuencia, el espectro observado de una estrella contiene *líneas de absorción* debidas a los átomos de su atmósfera. El sodio tiene una línea espectral amarilla característica (la línea D_1) con una longitud de onda de $5895.9 \text{ \AA}$ ($10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$). Examinamos el espectro de absorción del sodio atómico a esta longitud de onda para el sistema binario de la sección anterior. El espectro de la luz que recibimos de la estrella binaria presenta un desplazamiento Doppler, porque las estrellas se mueven con respecto a nosotros. Cada estrella tiene una rapidez diferente. Por consiguiente, la longitud de onda de absorción de cada estrella sufrirá un desplazamiento distinto. Para observar el desplazamiento Doppler se requieren mediciones de longitud de onda de gran precisión, ya que la rapidez de las estrellas es mucho menor que la de la luz. La rapidez del centro de masas del sistema binario que consideramos en este problema es mucho menor que las velocidades orbitales de las estrellas. Por tanto, todos los desplazamientos Doppler pueden atribuirse a la velocidad orbital de las estrellas. La Tabla 1 muestra el espectro medido de las estrellas del sistema binario que hemos observado.

Tabla 1: Espectro de absorción del sistema estelar binario para la línea D_1 del sodio

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(Nota: No es necesario representar gráficamente los datos de esta tabla)

2 Utilizando la Tabla 1,

2.1 — 1.8 puntos

Sean v_1 y v_2 las velocidades orbitales de cada estrella. Halle v_1 y v_2 .

La velocidad de la luz es $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$. Ignore todos los efectos relativistas.

2.2 — 0.7 puntos

Halle el cociente entre las masas de las estrellas (m_1/m_2).

2.3 — 0.8 puntos

Sean r_1 y r_2 las distancias de cada estrella a su centro de masas.

Halle r_1 y r_2 .

2.4 — 0.2 puntos

Sea r la distancia entre las estrellas. Halle r .

3 La fuerza gravitatoria es la única fuerza que actúa entre las estrellas.

3.1 — 1.2 puntos

Halle la masa de cada estrella con una cifra significativa.

La constante de gravitación universal es $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Características generales de las estrellas

4 La mayoría de las estrellas generan energía mediante el mismo mecanismo. Por ello, existe una relación empírica entre su masa, M , y su luminosidad, L , que es la potencia radiante total de la estrella. Esta relación puede escribirse en la forma $L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha$.

Aquí, $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ es la masa solar y $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ es la luminosidad solar. Esta relación se muestra en un diagrama doblemente logarítmico en la Figura 2.

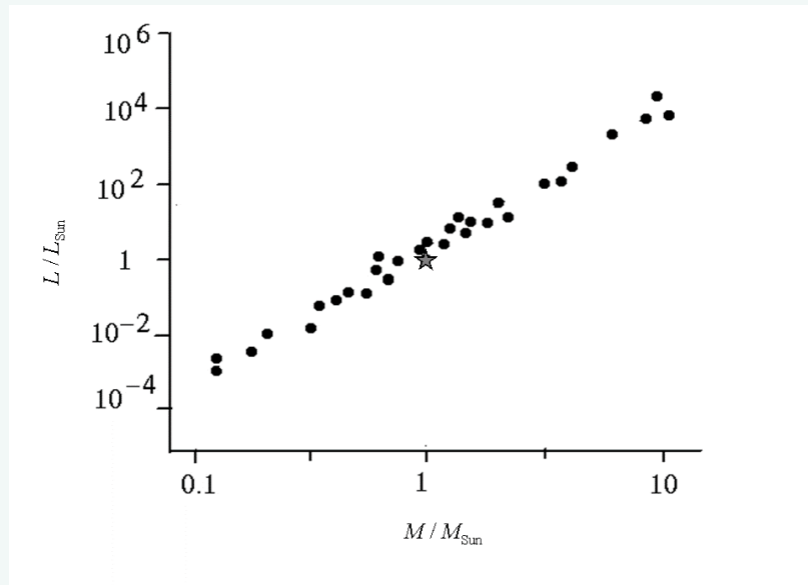


Figura 2. La luminosidad de una estrella varía con su masa según una ley de potencias. El diagrama es doblemente logarítmico. El símbolo de estrella representa al Sol, con una masa de $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ y una luminosidad de $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$.

4.1 — 0.6 puntos

Halle α con una cifra significativa.

4.2 — 0.6 puntos

Sean L_1 y L_2 las luminosidades de las estrellas del sistema binario estudiado en las secciones anteriores. Halle L_1 y L_2 .

4.3 — 0.9 puntos

¿Cuál es la distancia, d , del sistema estelar a nosotros en años luz?

Para hallar la distancia puede utilizar la gráfica de la Figura 1. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.

4.4 — 0.4 puntos

¿Cuál es la separación angular máxima, θ , entre las estrellas desde nuestro punto de observación?

4.5 — 0.4 puntos

¿Cuál es el tamaño mínimo de la abertura de un telescopio óptico, D , que permite distinguir estas dos estrellas por separado?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

En los resultados posteriores se utilizan valores intermedios sin redondear.

- **1.1:** $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$; $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.
- **1.2:** $T_1/T_2 \simeq 1.39$; $R_1/R_2 \simeq 1.56$.
- **2.1:** $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}$; $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- **2.2:** $m_1/m_2 \simeq 1.7$.
- **2.3:** $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}$; $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}$.
- **2.4:** $r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}$.
- **3.1:** Con una cifra significativa, $m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}$, $m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}$.
- **4.1:** $\alpha \simeq 4$.
- **4.2:** $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}$; $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}$.
- **4.3:** $d \simeq 82 \text{ años luz} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}$.
- **4.4:** $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$, o 2.7×10^{-3} segundos de arco.
- **4.5:** $D_{\min} \simeq 54 \text{ m}$, utilizando el criterio de Rayleigh a la longitud de onda del sodio indicada, 589.59 nm .

Solución

1.1

El período orbital es el intervalo entre mínimos sucesivos de la **misma profundidad**. La Figura 1 da aproximadamente 3.0 días. Los mínimos adyacentes de distinta profundidad corresponden a las dos conjunciones diferentes y están separados por medio período.

Por tanto,

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

La frecuencia angular es

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

Sean las contribuciones a la intensidad en la Tierra cuando no hay ocultación

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

donde C es común a ambas estrellas porque se encuentran prácticamente a la misma distancia. Fuera de los eclipses,

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

La geometría de observación, con el plano orbital visto de canto, produce eclipses centrales. Como $R_1 > R_2$, la estrella mayor puede ocultar por completo a la menor. Durante este eclipse, la intensidad perdida es I_2 .

En el otro eclipse, la estrella menor oculta una región del mismo tamaño de la estrella más caliente. La intensidad perdida es entonces

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

Como $T_1 > T_2$, se cumple $B > I_2$. Por tanto, el mínimo menos profundo corresponde al eclipse en el que la estrella 2 queda oculta.

El mínimo menos profundo da

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

El mínimo más profundo da

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

Dividiendo B entre I_2 ,

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

de modo que

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

Análogamente,

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

por lo que

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

Para un movimiento no relativista, el desplazamiento Doppler es

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

donde u es la velocidad en la dirección de la línea de visión, positiva para el alejamiento, y

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ \AA}.$$

En una órbita circular vista de canto, la velocidad en la dirección de la línea de visión varía sinusoidalmente entre $-v_i$ y $+v_i$. Por tanto, la amplitud de la variación de la longitud de onda determina la rapidez orbital:

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

Utilizando los valores extremos de la tabla,

$$\Delta\lambda_1 = \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ \AA} = 1.8 \text{ \AA},$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ \AA} = 3.1 \text{ \AA}.$$

Por tanto,

$$v_1 = 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.$$

Así,

$$v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

2.2

En el sistema de referencia del centro de masas, las estrellas tienen cantidades de movimiento de igual módulo y sentidos opuestos:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

En consecuencia,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7.$$

2.3

Ambas estrellas tienen la misma frecuencia angular. Para el movimiento circular uniforme,

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

Utilizando los valores sin redondear de los cálculos anteriores,

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}.$$

2.4

El centro de masas se encuentra entre las estrellas, de modo que su separación es

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}.$$

Así, con dos cifras significativas,

$$r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3.1

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta para cada estrella:

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2.$$

De ello se deduce que

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

Al sustituir, conservando las cifras intermedias, se obtiene

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Las respuestas solicitadas con una cifra significativa son, por tanto,

$$\boxed{m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

En lo que sigue se conservarán las masas calculadas sin redondear, ya que elevar a una potencia masas redondeadas prematuramente introduciría un error numérico considerable.

4.1

Tomando logaritmos de la relación empírica se obtiene

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

Por tanto, α es la pendiente de la tendencia en el diagrama doblemente logarítmico.

La tendencia pasa aproximadamente por

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = (1, 1) \quad \text{y} \quad (10, 10^4).$$

Por consiguiente,

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

Con $\alpha = 4$,

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}}\right)^4.$$

Utilizando las masas dinámicas sin redondear,

$$L_1 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}}\right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W},$$

$$L_2 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}}\right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}.$$

Por tanto,

$$\boxed{L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}}.$$

Como comprobación de coherencia, estos valores dan $L_1/L_2 \simeq 8.8$, próximo al cociente fotométrico $I_1/I_2 = 9$, como cabe esperar dada la naturaleza aproximada de la ley empírica y de los datos medidos.

4.3

Para una radiación isótropa, una luminosidad L produce una intensidad $L/(4\pi d^2)$ a una distancia d . Fuera de los eclipses, ambas estrellas aportan la totalidad de su flujo:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

Por tanto,

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

Tomando un año como aproximadamente 365 días,

$$1 \text{ año luz} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

Por tanto,

$$d \simeq 82 \text{ años luz} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}.$$

4.4

La separación proyectada es máxima cuando la recta que une las estrellas es perpendicular a la línea de visión. Su valor es entonces r .

Como $r \ll d$, la aproximación de ángulos pequeños da

$$\theta_{\max} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad}.$$

Por consiguiente,

$$\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

o, aproximadamente,

$$\theta_{\max} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ segundos de arco}.$$

4.5

Para un telescopio ideal limitado por la difracción y con una abertura circular, el criterio de Rayleigh da la separación angular mínima resoluble:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

Por tanto, la abertura mínima capaz de resolver las estrellas cuando su separación es máxima satisface

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

Utilizando la longitud de onda del sodio proporcionada en el problema,

$$\lambda = 5895.9 \text{ Å} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ m},$$

obtenemos

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ m} \simeq \boxed{54 \text{ m}}.$$

De forma más general, la dependencia con la longitud de onda es

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ m} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

La solución se comprobó con la solución oficial.