

IPhO 2007

Theorieaufgaben und Lösungen · Isfahan, Iran · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/2007/

Aufgabe 1: Dimensionsanalyse und Schwarze Löcher (Hawking-Strahlung)

In der Physik müssen bei einer Gleichheitsbeziehung beide Seiten der Gleichung von derselben Art sein, d. h., sie müssen dieselben Dimensionen haben. Beispielsweise kann die Größe auf der rechten Seite einer Gleichung nicht eine Länge darstellen, während die Größe auf der linken Seite ein Zeitintervall darstellt. Mithilfe dieser Tatsache lässt sich manchmal die Form eines physikalischen Zusammenhangs nahezu herleiten, ohne das Problem analytisch zu lösen. Wenn wir beispielsweise die Zeit bestimmen sollten, die ein Körper benötigt, um unter dem Einfluss einer konstanten Fallbeschleunigung g aus einer Höhe h zu fallen, könnten wir argumentieren, dass wir lediglich aus den Größen g und h eine Größe bilden müssen, die ein Zeitintervall darstellt, und dass dies nur in der Form $T = a(h/g)^{1/2}$ möglich ist. Beachten Sie, dass diese Lösung einen noch unbestimmten Koeffizienten a enthält, der *dimensionslos* ist und daher mit dieser Methode nicht bestimmt werden kann. Dieser Koeffizient kann eine Zahl wie 1 , $1/2$, $\sqrt{3}$, π oder jede andere reelle Zahl sein. Diese Methode zur Herleitung physikalischer Zusammenhänge heißt *Dimensionsanalyse*. Bei der Dimensionsanalyse sind die dimensionslosen Koeffizienten nicht von Bedeutung und müssen nicht angeschrieben werden. Glücklicherweise sind diese Koeffizienten bei den meisten physikalischen Problemen von der Größenordnung 1 , und ihr Weglassen verändert die Größenordnung der physikalischen Größen nicht. Wendet man die Dimensionsanalyse auf das obige Problem an, erhält man daher $T = (h/g)^{1/2}$.

Im Allgemeinen werden die Dimensionen einer physikalischen Größe durch die Dimensionen von vier Grundgrößen ausgedrückt: M (Masse), L (Länge), T (Zeit) und K (Temperatur). Die Dimension einer beliebigen Größe x wird mit $[x]$ bezeichnet. Um beispielsweise die Dimensionen der Geschwindigkeit v , der kinetischen Energie E_k und der Wärmekapazität C_V auszudrücken, schreiben wir: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1 Fundamentalkonstanten und Dimensionsanalyse

1.1	Bestimmen Sie die Dimensionen der <i>Fundamentalkonstanten</i> , d. h. der Planck-Konstante h , der Lichtgeschwindigkeit c , der universellen Gravitationskonstante G und der Boltzmann-Konstante k_B , ausgedrückt durch die Dimensionen von Länge, Masse, Zeit und Temperatur.	0.8
-----	--	-----

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz besagt, dass die spezifische Ausstrahlung eines schwarzen Körpers, also die gesamte Energie, die pro Flächeneinheit seiner Oberfläche und pro Zeiteinheit abgestrahlt wird, gleich $\sigma\theta^4$ ist, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und θ die absolute Temperatur des schwarzen Körpers ist.

1.2	Bestimmen Sie die Dimension der Stefan-Boltzmann-Konstante, ausgedrückt durch die Dimensionen von Länge, Masse, Zeit und Temperatur.	0.5
-----	--	-----

Die Stefan-Boltzmann-Konstante ist keine Fundamentalkonstante und lässt sich durch Fundamentalkonstanten ausdrücken, d. h., man kann $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$ schreiben. In dieser Beziehung ist a ein dimensionsloser Parameter von der Größenordnung 1. Wie bereits erwähnt, ist der genaue Wert von a für unsere Betrachtung nicht von Bedeutung, daher setzen wir ihn gleich 1.

1.3	Bestimmen Sie α , β , γ und δ mithilfe der Dimensionsanalyse.	1.0
-----	--	-----

2 Physik Schwarzer Löcher

In diesem Teil der Aufgabe möchten wir mithilfe der Dimensionsanalyse einige Eigenschaften Schwarzer Löcher bestimmen. Nach einem bestimmten physikalischen Theorem, das als *No-Hair-Theorem* bekannt ist, hängen alle Eigenschaften des Schwarzen Lochs, das wir in dieser Aufgabe betrachten, ausschließlich von seiner Masse ab. Eine Eigenschaft eines Schwarzen Lochs ist die Fläche seines *Ereignishorizonts*. Anschaulich gesprochen ist der Ereignishorizont die Grenze des Schwarzen Lochs. Innerhalb dieser Grenze ist die Gravitation so stark, dass nicht einmal Licht aus dem von ihr umschlossenen Gebiet entweichen kann.

Wir möchten einen Zusammenhang zwischen der Masse eines Schwarzen Lochs m und der Fläche seines Ereignishorizonts A finden. Diese Fläche hängt von der Masse des Schwarzen Lochs, der Lichtgeschwindigkeit und der universellen Gravitationskonstante ab. Wie in 1.3 schreiben wir $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1	Bestimmen Sie α , β und γ mithilfe der Dimensionsanalyse.	0.8
-----	---	-----

Aus dem Ergebnis von 2.1 wird deutlich, dass die Fläche des Ereignishorizonts eines Schwarzen Lochs mit seiner Masse zunimmt. Aus klassischer Sicht kann nichts aus einem Schwarzen Loch entweichen, und daher kann die Fläche des Ereignishorizonts bei allen physikalischen Vorgängen nur zunehmen. In Analogie zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schlug Bekenstein vor, einem Schwarzen Loch eine Entropie S zuzuordnen, die proportional zur Fläche seines Ereignishorizonts ist, d. h. $S = \eta A$. Diese Vermutung wurde durch weitere Argumente plausibler gemacht.

2.2	Verwenden Sie die thermodynamische Definition der Entropie $dS = dQ/\theta$, um die Dimension der Entropie zu bestimmen. dQ ist die ausgetauschte Wärme und θ die absolute Temperatur des Systems.	0.2
2.3	Drücken Sie wie in 1.3 die dimensionsbehaftete Konstante η als Funktion der Fundamentalkonstanten h , c , G und k_B aus.	1.1

Verwenden Sie für den Rest der Aufgabe keine Dimensionsanalyse; Sie dürfen jedoch die Ergebnisse aus den vorhergehenden Abschnitten verwenden.

3 Hawking-Strahlung

Mit einem halbquantenmechanischen Ansatz begründete Hawking, dass Schwarze Löcher entgegen der klassischen Sichtweise Strahlung aussenden, die der Strahlung eines schwarzen Körpers bei einer Temperatur ähnelt, die als *Hawking-Temperatur* bezeichnet wird.

3.1	Verwenden Sie $E = mc^2$, womit die Energie des Schwarzen Lochs durch seine Masse ausgedrückt wird, sowie die Hauptsätze der Thermodynamik, um die Hawking-Temperatur	0.8
-----	--	-----

	θ_H eines Schwarzen Lochs durch seine Masse und die Fundamentalkonstanten auszudrücken. Nehmen Sie an, dass das Schwarze Loch keine Arbeit an seiner Umgebung verrichtet.	
3.2	Die Masse eines isolierten Schwarzen Lochs ändert sich somit aufgrund der Hawking-Strahlung. Bestimmen Sie mithilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes, wie diese Änderungsrate von der Hawking-Temperatur des Schwarzen Lochs θ_H abhängt, und drücken Sie sie durch die Masse des Schwarzen Lochs und die Fundamentalkonstanten aus.	0.7
3.3	Bestimmen Sie die Zeit t^* , die ein isoliertes Schwarzes Loch der Masse m benötigt, um vollständig zu verdampfen, d. h. seine gesamte Masse zu verlieren.	1.1

Aus thermodynamischer Sicht zeigen Schwarze Löcher einige exotische Verhaltensweisen. Beispielsweise ist die Wärmekapazität eines Schwarzen Lochs negativ.

3.4	Bestimmen Sie die Wärmekapazität eines Schwarzen Lochs der Masse m .	0.6
-----	--	-----

4 Schwarze Löcher und die kosmische Hintergrundstrahlung

Betrachten Sie ein Schwarzes Loch, das der kosmischen Hintergrundstrahlung ausgesetzt ist. Die kosmische Hintergrundstrahlung ist eine Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur θ_B , die das gesamte Universum erfüllt. Ein Körper mit einer Gesamtoberfläche A empfängt daher pro Zeiteinheit eine Energie von $\sigma\theta_B^4 \times A$. Ein Schwarzes Loch verliert somit Energie durch Hawking-Strahlung und gewinnt Energie aus der kosmischen Hintergrundstrahlung.

4.1	Bestimmen Sie die Änderungsrate der Masse eines Schwarzen Lochs, ausgedrückt durch die Masse des Schwarzen Lochs, die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung und die Fundamentalkonstanten.	0.8
4.2	Bei einer bestimmten Masse m^* verschwindet diese Änderungsrate. Bestimmen Sie m^* und drücken Sie sie durch θ_B und die Fundamentalkonstanten aus.	0.4
4.3	Verwenden Sie Ihre Antwort auf 4.2, um θ_B in Ihrer Antwort auf Teil 4.1 zu ersetzen, und drücken Sie die Änderungsrate der Masse eines Schwarzen Lochs durch m , m^* und die Fundamentalkonstanten aus.	0.2
4.4	Bestimmen Sie die Hawking-Temperatur eines Schwarzen Lochs im thermischen Gleichgewicht mit der kosmischen Hintergrundstrahlung.	0.4
4.5	Ist das Gleichgewicht stabil oder instabil? Warum? (Drücken Sie Ihre Antwort mathematisch aus.)	0.6

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Bei diesen Ergebnissen werden die unbestimmten dimensionslosen Koeffizienten in den Teilen 1–2 wie vorgegeben gleich 1 gesetzt. Zahlenfaktoren, die beim Differenzieren und Integrieren entstehen, werden beibehalten. Wir schreiben $\dot{m} = dm/dt$.

- **1.1:** $[h] = ML^2T^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$, $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$, $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.
- **1.2:** $[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$.
- **1.3:** $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4)$, womit $\sigma = \frac{k_B^4}{h^3c^2}$.

- **2.1:** $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2)$, womit $A = \frac{G^2 m^2}{c^4}$.
- **2.2:** $[S] = ML^2 T^{-2} K^{-1}$.
- **2.3:** $\eta = \frac{k_B c^3}{hG}$.
- **3.1:** $\theta_H = \frac{hc^3}{2Gk_B m}$.
- **3.2:** $\dot{m} = -\frac{\sigma A \theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2} = -\frac{hc^4}{16G^2 m^2}$.
- **3.3:** $t^* = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}$.
- **3.4:** $C = -\frac{2Gk_B m^2}{hc} < 0$.
- **4.1:** $\dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{hc^4}{16G^2 m^2}$.
- **4.2:** $m^* = \frac{2Gk_B \theta_B}{hc^4}$.
- **4.3:** $\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]$.
- **4.4:** $\theta_H(m^*) = \theta_B$.
- **4.5: Instabil.** Eine kleine Massenstörung erfüllt $\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2 (m^*)^3} \delta m$, sodass ihr Betrag exponentiell wächst.

Lösung

Wir verwenden das in der Aufgabe vorgegebene Modell eines Schwarzen Lochs, dessen Eigenschaften nur von seiner Masse abhängen, sowie die dort angegebenen Gesetze für Emission und Absorption eines schwarzen Körpers. Alle Ausdrücke übernehmen die in den Teilen 1–2 gewählte Normierung der dimensionslosen Koeffizienten. Es sind keine numerischen Eingangswerte gegeben, daher werden die gesuchten Ergebnisse symbolisch angegeben.

1.1

Aus der Beziehung für die Photonenenergie $E = h\nu$ mit $[\nu] = T^{-1}$ folgt

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2 T^{-1}.$$

Da c eine Geschwindigkeit ist, gilt

$$[c] = LT^{-1}.$$

Aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz $F = Gm_1 m_2 / r^2$ folgt

$$[G] = \frac{[F] L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2}) L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2}.$$

Das Produkt $k_B \theta$ hat die Dimension einer Energie, also gilt

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2 T^{-2} K^{-1}.$$

Ihre SI-Einheiten sind in derselben Reihenfolge J s , m s^{-1} , $\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ und J K^{-1} .

1.2

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz für die gesamte abgestrahlte Leistung lautet

$$P = \sigma A \theta^4.$$

Folglich gilt

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

Die zugehörige SI-Einheit ist $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$.

1.3

Mit dem vorgegebenen Koeffizienten $a = 1$ gilt

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

Die Dimension der rechten Seite ist

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

Der Vergleich mit $MT^{-3}K^{-4}$ ergibt

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

Für $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ gilt

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

Daher gilt

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

Die letzte Gleichung ergibt $\beta = -2\alpha$; aus der Gleichung für die Längendimension folgt dann $\alpha = 2$.

Somit gilt

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

und

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

Aus der thermodynamischen Entropiebeziehung

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

ergibt sich für die Entropie die Dimension

$$[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

Ihre SI-Einheit ist $J K^{-1}$.

2.3

Da $S = \eta A$, gilt

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2}K^{-1}.$$

Wir setzen

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

Der Vergleich der Dimensionen ergibt

$$\begin{aligned} p - r + s &= 1, \\ 2p + q + 3r + 2s &= 0, \\ -p - q - 2r - 2s &= -2, \\ -s &= -1. \end{aligned}$$

Somit sind $s = 1$ und $p = r$, und die übrigen Gleichungen ergeben

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

Daher gilt

$$\eta = \frac{k_B c^3}{hG}.$$

Zusammen mit der Horizontfläche ergibt dies die Entropie als Funktion der Masse:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

Für die thermodynamische Familie von Zuständen Schwarzer Löcher lautet der erste Hauptsatz ohne Arbeitsterm

$$dE = \theta_H dS.$$

Da

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

gilt

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

Folglich ist

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_Bm}}.$$

Die Temperatur nimmt mit zunehmender Masse ab.

3.2

Die nach außen abgegebene Strahlungsleistung ist

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

Die Energieerhaltung für ein isoliertes Schwarzes Loch erfordert

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

wobei das Minuszeichen den Massenverlust ausdrückt. Daher gilt

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

Einsetzen der Temperatur aus 3.1 ergibt

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_Bm} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

Um die Abhängigkeit allein von der Temperatur auszudrücken, setzen wir

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H}.$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{\dot{m} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2}}.$$

Der Betrag der Massenverlustrate ist somit proportional zu θ_H^2 . Obwohl die Emission pro Flächeneinheit proportional zu θ_H^4 ist, ist die Horizontfläche proportional zu m^2 und damit zu θ_H^{-2} .

3.3

Die Anfangsmasse sei m , und die momentane Masse bezeichnen wir mit $\mu(t)$. Wir definieren

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

Die Gleichung für den Massenverlust lautet

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

Durch Trennung der Variablen und Integration ausgehend von $\mu(0) = m$ erhalten wir

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

also

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

Somit gilt

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

Die vollständige Verdampfung tritt ein, wenn $\mu(t^*) = 0$:

$$t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2m^3}{3hc^4}.$$

Dies ist die Lebensdauer, die sich ergibt, wenn das Verdampfungsmodell der Aufgabe bis zur Masse null fortgeführt wird.

3.4

Da kein Arbeitsterm vorhanden ist, ist die Wärmekapazität

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

Mit

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

erhalten wir

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

Einsetzen von $\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$ ergibt

$$C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc}.$$

Gleichwertig dazu ist

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

Die Wärmekapazität ist negativ: Die Aufnahme von Energie erhöht die Masse und senkt die Temperatur, während der Verlust von Energie die Temperatur erhöht.

4.1

Die absorbierte und die emittierte Leistung sind gemäß dem angegebenen Modell

$$P_{\text{in}} = \sigma A\theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A\theta_H^4.$$

Aus der Energieerhaltung folgt

$$c^2\dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

also

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2}(\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

Einsetzen der zuvor hergeleiteten Ausdrücke ergibt

$$\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}.$$

Der erste Term beschreibt die Absorption, der zweite die Emission.

4.2

Bei $m = m^*$ verschwindet die Nettoänderungsrate:

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

Für positive Temperaturen erfordert dies

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

Mit 3.1 gilt

$$\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B,$$

und daher

$$\boxed{m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_B}}.$$

4.3

Aus 4.2 folgt

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*}.$$

Einsetzen in 4.1 ergibt

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Gleichwertig dazu ist

$$\boxed{\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right]}.$$

4.4

Im thermischen Gleichgewicht sind die absorbierte und die emittierte Leistung gleich, also gilt

$$\boxed{\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_B m^*} = \theta_B}.$$

4.5

Wir halten die Hintergrundtemperatur konstant, sodass m^* konstant ist. Wir schreiben

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

Differenzieren ergibt

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

Im Gleichgewicht gilt

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} > 0.$$

Für eine kleine Störung $m = m^* + \delta m$ ergibt die Linearisierung daher

$$\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} \delta m,$$

mit der Lösung

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2(m^*)^3} \right].$$

Die Störung wächst, also ist

das Gleichgewicht instabil.

Die Vorzeichen in 4.3 zeigen unmittelbar dasselbe Ergebnis:

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

Ein etwas schwereres Schwarzes Loch ist kälter als die Hintergrundstrahlung und nimmt noch mehr Masse auf. Ein etwas leichteres ist heißer und verliert noch mehr Masse.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Kapazitiver Beschleunigungssensor für einen Autoairbag

In dieser Aufgabe betrachten wir ein vereinfachtes Modell von Beschleunigungssensoren, die dazu dienen, die Sicherheitsairbags von Kraftfahrzeugen bei einem Zusammenstoß auszulösen. Wir möchten ein elektromechanisches System so aufbauen, dass beim Überschreiten eines bestimmten Beschleunigungsgrenzwertes eine der elektrischen Größen des Systems, beispielsweise die Spannung an einer bestimmten Stelle der Schaltung, einen Schwellenwert überschreitet und dadurch der Airbag ausgelöst wird.

Hinweis: Vernachlässigen Sie in dieser Aufgabe die Schwerkraft.

1 Betrachten Sie einen Kondensator mit parallelen Platten wie in Abbildung 1. Die Fläche jeder Kondensatorplatte beträgt A , und der Abstand zwischen den beiden Platten beträgt d . Der Abstand zwischen den beiden Platten ist wesentlich kleiner als die Abmessungen der Platten. Eine dieser Platten ist über eine Feder mit der Federkonstanten k mit einer Wand verbunden, die andere Platte ist fest. Wenn der Abstand zwischen den Platten d beträgt, ist die Feder weder gestaucht noch gedehnt; mit anderen Worten wirkt in diesem Zustand keine Kraft auf die Feder. Nehmen Sie an, dass die Permittivität der Luft zwischen den Platten gleich der des Vakuums ε_0 ist. Die diesem Plattenabstand entsprechende Kapazität des Kondensators beträgt $C_0 = \varepsilon_0 A/d$. Wir bringen die Ladungen $+Q$ und $-Q$ auf die Platten auf und lassen das System das mechanische Gleichgewicht erreichen.

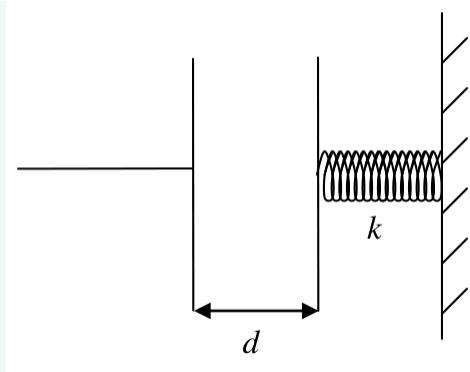


Abbildung 1

Teil	Frage	Punkte
1.1	Berechnen Sie die elektrische Kraft F_E , die die Platten aufeinander ausüben.	0.8
1.2	Sei x die Verschiebung der mit der Feder verbundenen Platte. Bestimmen Sie x .	0.6
1.3	Wie groß ist in diesem Zustand die elektrische Potentialdifferenz V zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von Q , A , d , k ?	0.4
1.4	Sei C die Kapazität des Kondensators, definiert als das Verhältnis von Ladung zu Potentialdifferenz. Bestimmen Sie C/C_0 als Funktion von Q , A , d und k .	0.3
1.5	Wie groß ist die gesamte im System gespeicherte Energie U in Abhängigkeit von Q , A , d und k ?	0.6

Abbildung 2 zeigt eine Masse M , die an einer leitenden Platte mit vernachlässigbarer Masse sowie an zwei Federn mit gleichen Federkonstanten k befestigt ist. Die leitende Platte kann sich im Raum zwischen zwei festen leitenden Platten hin und her bewegen. Alle diese Platten sind gleichartig und haben dieselbe Fläche A . Diese drei Platten bilden somit zwei Kondensatoren. Wie in Abbildung 2 gezeigt, sind die festen Platten mit den vorgegebenen Potentialen V und $-V$ verbunden, und die mittlere Platte ist über einen Schalter mit zwei Stellungen mit Masse verbunden. Der mit der beweglichen Platte verbundene Draht beeinträchtigt die Bewegung der Platte nicht, und die drei Platten bleiben stets parallel. Wenn die gesamte Anordnung nicht beschleunigt wird, beträgt der Abstand jeder festen Platte zur beweglichen Platte d , wobei dieser Abstand wesentlich kleiner als die Abmessungen der Platten ist. Die Dicke der beweglichen Platte kann vernachlässigt werden.

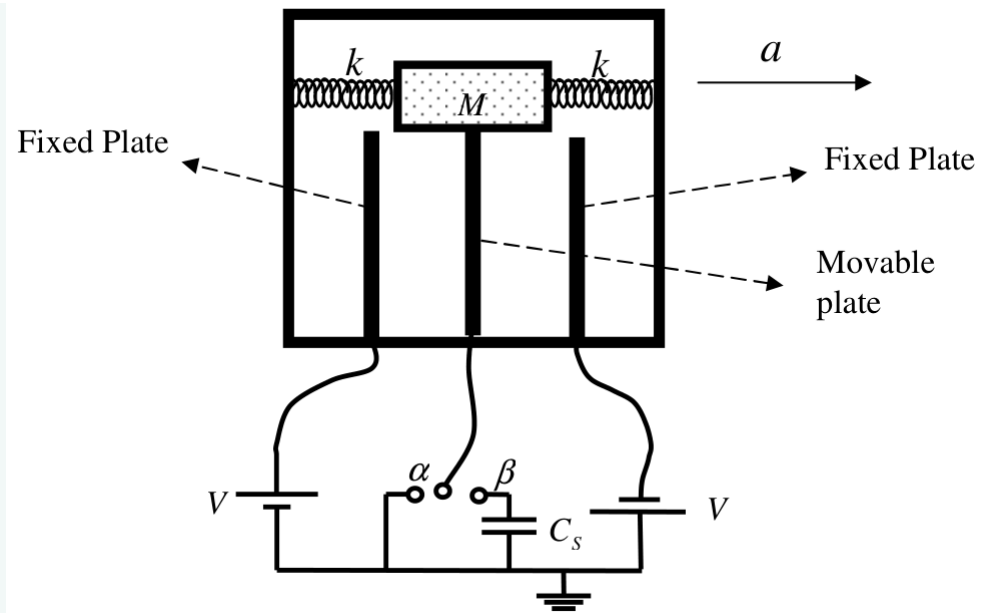


Abbildung 2

Der Schalter kann sich in einer der beiden Stellungen α und β befinden. Nehmen Sie an, dass die Kondensatoranordnung zusammen mit dem Auto beschleunigt wird und die Beschleunigung konstant ist. Nehmen Sie an, dass die Feder während dieser konstanten Beschleunigung nicht schwingt und alle Komponenten dieser Kondensatoranordnung ihre Gleichgewichtslagen einnehmen, sich also nicht relativ zueinander und damit auch nicht relativ zum Auto bewegen.

Aufgrund der Beschleunigung wird die bewegliche Platte um einen bestimmten Betrag x aus der Mitte zwischen den beiden festen Platten verschoben.

2 Betrachten Sie den Fall, dass sich der Schalter in Stellung α befindet, die bewegliche Platte also über einen Draht mit Masse verbunden ist. Dann gilt:

Teil	Frage	Punkte
2.1	Bestimmen Sie die Ladung auf jedem Kondensator als Funktion von x .	0.4
2.2	Bestimmen Sie die resultierende elektrische Kraft auf die bewegliche Platte, F_E , als Funktion von x .	0.4
2.3	Nehmen Sie an, dass $d \gg x$ gilt und Terme der Ordnung x^2 gegenüber Termen der Ordnung d^2 vernachlässigt werden können. Vereinfachen Sie das Ergebnis des vorherigen Teils.	0.2
2.4	Schreiben Sie die Gesamtkraft auf die bewegliche Platte (die Summe aus elektrischer Kraft und Federkräften) in der Form $-k_{\text{eff}}x$ und geben Sie den Ausdruck für k_{eff} an.	0.7
2.5	Drücken Sie die konstante Beschleunigung a als Funktion von x aus.	0.4

3 Nehmen Sie nun an, dass sich der Schalter in Stellung β befindet, die bewegliche Platte also über einen Kondensator mit der Kapazität C_S mit Masse verbunden ist (anfangs sind die Kondensatoren ungeladen). Wenn die bewegliche Platte um einen Betrag x aus ihrer Mittellage verschoben wird:

Teil	Frage	Punkte
3.1	Bestimmen Sie V_S , die elektrische Potentialdifferenz am Kondensator C_S , als Funktion von x .	1.5

Teil	Frage	Punkte
3.2	Nehmen Sie wiederum an, dass $d \gg x$ gilt, und vernachlässigen Sie Terme der Ordnung x^2 gegenüber Termen der Ordnung d^2 . Vereinfachen Sie das Ergebnis des vorherigen Teils.	0.2

4 Wir möchten die Parameter der Aufgabe so einstellen, dass der Airbag bei normalem Bremsen nicht ausgelöst wird, sich bei einem Zusammenstoß jedoch schnell genug öffnet, um zu verhindern, dass der Kopf des Fahrers gegen die Windschutzscheibe oder das Lenkrad prallt. Wie Sie in Teil 2 gesehen haben, lässt sich die von den Federn und den elektrischen Ladungen auf die bewegliche Platte ausgeübte Kraft als die Kraft einer Feder mit einer effektiven Federkonstanten k_{eff} darstellen. Die gesamte Kondensatoranordnung entspricht einem *Feder-Masse-System* mit der Masse M und der Federkonstanten k_{eff} unter dem Einfluss einer konstanten Beschleunigung a , die in dieser Aufgabe die Beschleunigung des Autos ist.

Hinweis: In diesem Teil der Aufgabe gilt die Annahme nicht mehr, dass sich Masse und Feder unter einer konstanten Beschleunigung im Gleichgewicht befinden und daher relativ zum Auto ruhen.

Vernachlässigen Sie die Reibung und verwenden Sie die folgenden Zahlenwerte für die Parameter der Aufgabe:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m}, \\ \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

Teil	Frage	Punkte
4.1	Bestimmen Sie mit diesen Daten das Verhältnis der in Abschnitt 2.3 berechneten elektrischen Kraft zur Federkraft und zeigen Sie, dass die elektrischen Kräfte gegenüber den Federkräften vernachlässigt werden können.	0.6

Obwohl wir die elektrischen Kräfte für den Fall, dass sich der Schalter in Stellung β befindet, nicht berechnet haben, lässt sich zeigen, dass die elektrischen Kräfte in dieser Situation ganz ähnlich ebenso klein sind und vernachlässigt werden können.

Teil	Frage	Punkte
4.2	Wenn das Auto, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, plötzlich mit einer konstanten Beschleunigung a bremst, wie groß ist dann die maximale Auslenkung der beweglichen Platte? Geben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von den Parametern an.	0.6

Nehmen Sie an, dass sich der Schalter in Stellung β befindet und das System so ausgelegt ist, dass der Airbag ausgelöst wird, wenn die elektrische Spannung am Kondensator $V_S = 0.15 \text{ V}$ erreicht. Wir möchten, dass der Airbag bei normalem Bremsen, wenn die Beschleunigung des Autos kleiner als die Erdbeschleunigung $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ist, nicht ausgelöst wird, andernfalls jedoch schon.

Teil	Frage	Punkte
4.3	Wie groß muss C_S dafür sein?	0.6

Wir möchten herausfinden, ob der Airbag schnell genug ausgelöst wird, um zu verhindern, dass der Kopf des Fahrers gegen die Windschutzscheibe oder das Lenkrad prallt. Nehmen Sie an, dass das Auto infolge eines Zusammenstoßes eine Verzögerung mit dem Betrag g erfährt, der Kopf des Fahrers sich jedoch mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt.

Teil	Frage	Punkte
4.4	Schätzen Sie den Abstand zwischen dem Kopf des Fahrers und dem Lenkrad ab und bestimmen Sie damit die Zeit t_1 , bis der Kopf des Fahrers gegen das Lenkrad prallt.	0.8
4.5	Bestimmen Sie die Zeit t_2 bis zum Auslösen des Airbags und vergleichen Sie sie mit t_1 . Wird der Airbag rechtzeitig ausgelöst? Nehmen Sie an, dass sich der Airbag augenblicklich öffnet.	0.9

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wählen Sie $x > 0$ in Richtung der linken festen Platte. In den Teilen 2–4 ist dies die Platte auf dem Potential $+V$; wählen Sie die Beschleunigung des Autos $a > 0$ wie eingezeichnet in der entgegengesetzten Richtung. Kraftkomponenten sind in Richtung des positiven x positiv, und V_S ist das Potential der beweglichen Platte gegenüber Masse. Setzen Sie $C_0 = \varepsilon_0 A/d$.

- **1.1:** $F_E = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$, anziehend.
- **1.2:** $x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}$, in Richtung der festen Platte.
- **1.3:** $V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right)$.
- **1.4:** $\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d} \right)^{-1}$.
- **1.5:** $U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}$.
- **2.1:** Ladungsbeträge: $Q_L = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}$, $Q_R = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}$. Die entsprechenden Ladungen auf der beweglichen Platte sind $-Q_L$ und $+Q_R$.
- **2.2:** $F_E = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right] = \frac{2\varepsilon_0 A V^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$.
- **2.3:** $F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3} x$.
- **2.4:** $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x$, $k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}$.
- **2.5:** $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3} \right) x$, in der Näherung für kleine Auslenkungen.
- **3.1:** $V_S = \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S(d^2 - x^2)}$.
- **3.2:** $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{V x}{d}$.
- **4.1:** $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3} = 7.6 \times 10^{-9}$. Somit gilt $k_{\text{eff}} \simeq 2k$.
- **4.2:** $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}$.
- **4.3:** $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}$.

- **4.4:** $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Schätzt man den anfänglichen Abstand zwischen Kopf und Lenkrad auf $L = 0.50 \text{ m}$, ergibt sich $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}$.
- **4.5:** $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}$. Da $t_2 \ll t_1$ gilt, wird der Airbag unter den angegebenen Annahmen rechtzeitig ausgelöst.

Lösung

Wir vernachlässigen durchgehend Randfelder, was durch die im Vergleich zu den Plattenabmessungen kleinen Plattenabstände gerechtfertigt ist.

1.1

Die Flächenladungsdichte beträgt $\sigma = Q/A$. Eine gleichmäßig geladene Platte erzeugt am Ort der anderen Platte ein Feld mit dem Betrag $\sigma/(2\epsilon_0)$. Auf eine Platte wirkt die Kraft des Feldes der anderen Platte, sodass die Anziehungskraft den Betrag

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

hat. Bei festgehaltener Ladung ist diese Kraft in der Näherung paralleler Platten unabhängig vom Plattenabstand.

1.2

Die Anziehung verschiebt die bewegliche Platte zur festen Platte hin und dehnt die Feder um x . Das mechanische Gleichgewicht erfordert

$$kx = F_E.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A}.$$

Die Lösung für voneinander getrennte Platten setzt $x < d$ voraus, also

$$Q^2 < 2k\epsilon_0 Ad.$$

1.3

Das elektrische Feld zwischen den Platten beträgt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

Ihr Gleichgewichtsabstand ist $d - x$, also gilt

$$V = E(d - x).$$

Einsetzen der Verschiebung ergibt

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right).$$

1.4

Nach der angegebenen Definition gilt

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}.$$

Da $C_0 = \varepsilon_0 A/d$, folgt

$$\boxed{\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d}\right)^{-1}}.$$

1.5

Im Gleichgewicht setzt sich die gespeicherte Energie aus der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der elastischen Energie der Feder zusammen:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\varepsilon_0 A} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Mit $x = Q^2/(2k\varepsilon_0 A)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\varepsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2} \\ &= \boxed{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}}. \end{aligned}$$

2.1

Da x in Richtung der linken Platte positiv ist, betragen die linken und rechten Plattenabstände $d - x$ und $d + x$. Die zugehörigen Kapazitäten sind daher

$$C_L = \frac{\varepsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\varepsilon_0 A}{d + x}.$$

In Schalterstellung α ist die bewegliche Platte mit Masse verbunden. An jedem Kondensator liegt eine Spannung vom Betrag V an, sodass

$$\boxed{Q_L = C_L V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}}.$$

Die linke feste Platte trägt $+Q_L$, und die ihr zugewandte Oberfläche der beweglichen Platte trägt $-Q_L$. Die rechte feste Platte trägt $-Q_R$, und die ihr zugewandte Oberfläche der beweglichen Platte trägt $+Q_R$.

2.2

Jede feste Platte zieht die bewegliche Platte an. Die Anziehung durch die linke Platte wirkt in positiver x -Richtung und die Anziehung durch die rechte Platte in negativer x -Richtung. Mit der Kraft aus 1.1 gilt

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Somit folgt

$$F_E = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right].$$

Das Zusammenfassen der Brüche ergibt

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

Die Kraft hat dasselbe Vorzeichen wie x : Die elektrische Anziehung wirkt so, dass sie die Auslenkung zur näheren Platte hin vergrößert.

2.3

Wir schreiben das exakte Ergebnis um zu

$$F_E = \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right)^{-2}.$$

Für $|x| \ll d$ ergibt die Vernachlässigung von x^2/d^2

$$F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

2.4

Beide Federn üben rücktreibende Kräfte aus. Eine wird gestaucht und die andere gedehnt, und ihre Gesamtkraft beträgt

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

Durch Addition der linearisierten elektrischen Kraft folgt

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

Daher gilt

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}.$$

Die elektrische Wechselwirkung verringert die rücktreibende Steifigkeit. Ein stabiles Verhalten bei kleinen Auslenkungen erfordert $k_{\text{eff}} > 0$.

2.5

Das Auto beschleunigt entgegen der positiven x -Richtung. Im Bezugssystem des Autos beträgt die Trägheitskraft auf die Masse daher $+Ma$. Das relative Gleichgewicht erfordert

$$-k_{\text{eff}} x + Ma = 0.$$

Damit folgt

$$a = \frac{k_{\text{eff}} x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

Dieser Ausdruck verwendet die in 2.3 eingeführte Näherung für kleine Auslenkungen.

3.1

In Stellung β bilden die bewegliche Platte, ihr Anschlussdraht und die angeschlossene Platte von C_S einen isolierten Leiter. Seine anfangs verschwindende Gesamtladung bleibt null.

Sein Potential gegenüber Masse sei V_S . Die Ladungen auf seinen drei Kondensatorflächen sind

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

Aus der Ladungserhaltung folgt

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

Daher gilt

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

Nun gilt

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}.$$

Einsetzen ergibt

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S(d^2 - x^2)}.$$

Insbesondere gilt in der Mittellage $V_S = 0$ und bei einer Auslenkung zur Platte auf dem Potential $+V$ hin $V_S > 0$.

3.2

Wir vernachlässigen x^2 gegenüber d^2 im Nenner:

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S d^2}.$$

Mit $C_0 = \varepsilon_0 A/d$ folgt

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{V x}{d}.$$

Somit ist die gemessene Spannung in dieser Näherung proportional zur Auslenkung.

4.1

Die elektrische Kraft und die Federkraft sind einander entgegengerichtet. Das Verhältnis ihrer Beträge ist

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 A V^2 / d^3) |x|}{2k |x|} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3}.$$

Mit $d = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ergibt sich

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

Der elektrische Beitrag ist vernachlässigbar, sodass

$$k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m}.$$

Wie in der Aufgabenstellung gestattet, vernachlässigen wir die elektrischen Kräfte auch in Stellung β .

4.2

Vor dem Bremsen befindet sich die Masse in der Mitte und ruht relativ zum Auto:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Nach dem plötzlichen Einsetzen der konstanten Beschleunigung lautet ihre Bewegungsgleichung im Bezugssystem des Autos

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

Wir definieren

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

Die Lösung, die die Anfangsbedingungen erfüllt, lautet

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

Das erste Maximum tritt bei $\omega t = \pi$ auf. Damit ergibt sich

$$x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$$

Die maximale Auslenkung ist doppelt so groß wie die statische Gleichgewichtsauslenkung, weil die ungedämpfte Masse über ihre neue Gleichgewichtslage hinausschwingt.

4.3

Die Auslösespannung sei

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V}.$$

Damit die Auslösegrenze bei $a = g$ liegt, muss die maximale Spannung während einer konstanten Beschleunigung g gleich V_{th} sein.

Die entsprechende maximale Auslenkung beträgt

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

Somit gilt

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

was die Näherung für kleine Auslenkungen rechtfertigt.

Aus 3.2 folgt

$$V_{\text{th}} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

Auflösen nach der erforderlichen Kapazität ergibt

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{\text{th}}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{\text{th}}} - 1 \right).$$

Dabei gilt

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

und

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

Daraus folgt

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

Mit der Genauigkeit der angegebenen Daten ergibt sich

$$C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

Für dieses Bremsmodell mit konstanter Beschleunigung ist die maximale Spannung proportional zu a . Daher erreichen Beschleunigungen unterhalb von g den Schwellenwert nicht, während Beschleunigungen gleich oder oberhalb von g ihn erreichen.

Zum Vergleich ergibt sich bei Beibehaltung der exakten Geometrie aus 3.1

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (V x_g / V_{\text{th}} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

was denselben gerundeten Wert ergibt.

4.4

Sei L der anfängliche Abstand zwischen dem Kopf des Fahrers und dem Lenkrad entlang der Bewegungsrichtung.

Anfangs haben beide dieselbe Geschwindigkeit. Der Kopf bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, während das Lenkrad zusammen mit dem Auto mit dem Betrag g verzögert wird. Ihre Relativbeschleunigung hat daher den Betrag g , und die nach der Zeit t erfolgte Verringerung ihres Abstands beträgt

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2} g t^2.$$

Der Aufprall erfolgt, wenn dieser Wert gleich L ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Mit der plausiblen Abschätzung $L = 0.50 \text{ m}$ ergibt sich

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

Für $a = g$ wurde der Kondensator so gewählt, dass die Auslösespannung bei der maximalen Auslenkung x_g erreicht wird. Die Bewegung wird beschrieben durch

$$x(t) = \frac{Mg}{2k} (1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

Da $x_g = Mg/k$ gilt, erfolgt die erste Auslösung, wenn

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

also

$$\omega t_2 = \pi.$$

Daher gilt

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

Der Vergleich mit der abgeschätzten Zeit bis zum Aufprall des Kopfes ergibt

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

Der Kopf nähert sich dem Lenkrad vor der Auslösung lediglich um

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

an. Somit **wird der Airbag lange bevor der Kopf das Lenkrad erreicht ausgelöst**, sofern er sich wie vorausgesetzt augenblicklich öffnet.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Doppelsterne

Zwei Sterne, die ihren gemeinsamen Schwerpunkt umkreisen, bilden ein Doppelsternsystem. Fast die Hälfte der Sterne in unserer Galaxie sind Doppelsternsysteme. Bei den meisten dieser Sternsysteme ist es von der Erde aus nicht leicht zu erkennen, dass es sich um Doppelsterne handelt, da der Abstand zwischen den beiden Sternen viel kleiner als ihre Entfernung von uns ist und die Sterne daher mit Teleskopen nicht getrennt aufgelöst werden können. Deshalb müssen wir entweder mithilfe der Photometrie oder der Spektrometrie die Änderungen der Intensität oder des Spektrums eines bestimmten Sterns beobachten, um herauszufinden, ob es sich um ein Doppelsternsystem handelt oder nicht.

Photometrie von Doppelsternen

Wenn wir uns genau in der Bahnebene der beiden Sterne befinden, bedeckt zu bestimmten Zeiten ein Stern den anderen (er zieht vor ihm vorbei), und die Intensität des gesamten Systems ändert sich von unserem Beobachtungsort aus mit der Zeit. Solche Doppelsternsysteme nennt man Bedeckungsdoppelsterne.

1 Nehmen Sie an, dass sich zwei Sterne mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen und dass wir uns genau in der Bahnebene des Doppelsternsystems befinden. Nehmen Sie außerdem an, dass die Oberflächentemperaturen der Sterne T_1 und T_2 ($T_1 > T_2$) und die zugehörigen Radien R_1 bzw. R_2 ($R_1 > R_2$) betragen. Die auf der Erde gemessene Gesamtintensität des Lichts ist in Abbildung 1 als Funktion der Zeit dargestellt. Genaue Messungen zeigen, dass die Intensitäten des von den Sternen einfallenden Lichts bei den Minima 90 bzw. 63 Prozent der maximalen, von beiden Sternen empfangenen Intensität I_0 betragen ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). Die vertikale Achse in Abbildung 1 zeigt das Verhältnis I/I_0 , und die horizontale Achse ist in Tagen beschriftet.

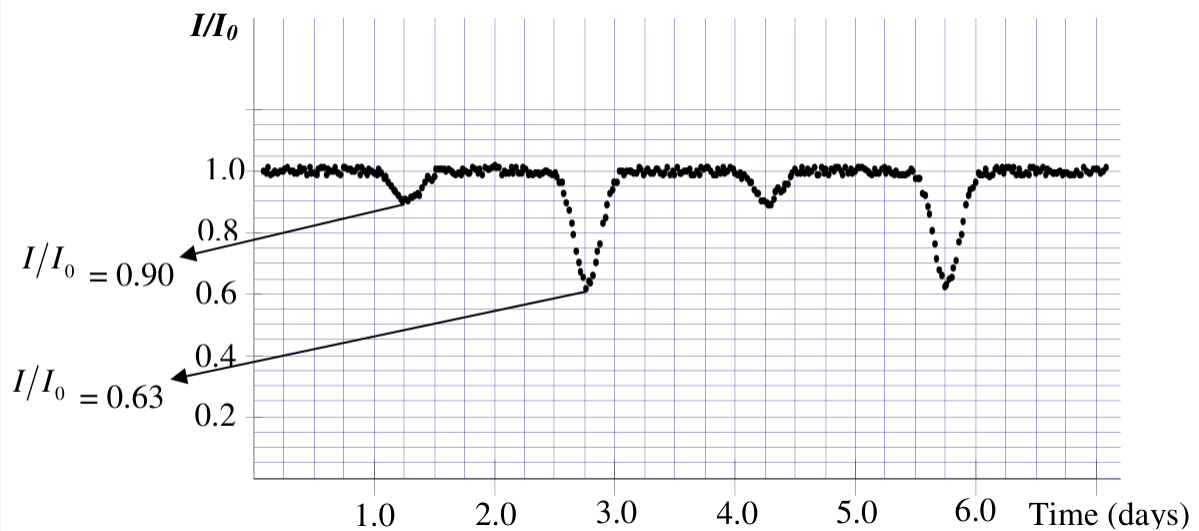


Abbildung 1. Die vom Doppelsternsystem empfangene relative Intensität als Funktion der Zeit. Die vertikale Achse ist auf $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ normiert. Die Zeit ist in Tagen angegeben.

1.1 — 0.8 Punkte

Bestimmen Sie die Umlaufzeit. Geben Sie Ihre Antwort in **Sekunden** mit zwei signifikanten Stellen an.

Wie groß ist die Kreisfrequenz des Systems in **rad/sec**?

In guter Näherung ist die von einem Stern empfangene Strahlung die gleichmäßige Schwarzkörperstrahlung einer ebenen Scheibe, deren Radius gleich dem Radius des Sterns ist. Daher ist die vom Stern empfangene Leistung proportional zu AT^4 , wobei A die Fläche der Scheibe und T die Oberflächentemperatur des Sterns ist.

1.2 — 1.6 Punkte

Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms in Abbildung 1 die Verhältnisse T_1/T_2 und R_1/R_2 .

Spektrometrie von Doppelsternsystemen

In diesem Abschnitt werden wir die astronomischen Eigenschaften eines Doppelsterns mithilfe experimenteller spektrometrischer Daten des Doppelsternsystems berechnen.

Atome absorbieren oder emittieren Strahlung bei bestimmten charakteristischen Wellenlängen. Daher enthält das beobachtete Spektrum eines Sterns *Absorptionslinien*, die durch die Atome in seiner Atmosphäre verursacht werden. Natrium besitzt eine charakteristische gelbe Spektrallinie (D₁-Linie) mit einer Wellenlänge von 5895.9 Å ($10 \text{ Å} = 1 \text{ nm}$). Wir untersuchen das Absorptionsspektrum von atomarem Natrium bei dieser Wellenlänge für das Doppelsternsystem aus dem vorherigen Abschnitt. Das Spektrum des Lichts, das wir vom Doppelstern empfangen, ist aufgrund des Dopplereffekts verschoben, da sich die Sterne relativ zu uns bewegen. Die beiden Sterne haben unterschiedliche Geschwindigkeiten. Dementsprechend ist die Absorptionswellenlänge jedes Sterns um einen anderen Betrag verschoben. Um die Dopplerverschiebung zu beobachten, sind hochpräzise Wellenlängenmessungen erforderlich, da die Geschwindigkeit der Sterne viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des in dieser Aufgabe betrachteten Doppelsternsystems ist viel kleiner als die

Bahngeschwindigkeiten der Sterne. Daher können alle Dopplerverschiebungen auf die Bahngeschwindigkeiten der Sterne zurückgeführt werden. Tabelle 1 zeigt das gemessene Spektrum der Sterne des von uns beobachteten Doppelsternsystems.

Tabelle 1: Absorptionsspektrum des Doppelsternsystems für die Natrium- D_1 -Linie

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(Hinweis: Es ist nicht erforderlich, die Daten dieser Tabelle grafisch darzustellen.)

2 Verwenden Sie Tabelle 1.

2.1 — 1.8 Punkte

Die Bahngeschwindigkeiten der beiden Sterne seien v_1 und v_2 . Bestimmen Sie v_1 und v_2 . Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 3.0 \times 10^8$ m/s. Vernachlässigen Sie alle relativistischen Effekte.

2.2 — 0.7 Punkte

Bestimmen Sie das Massenverhältnis der Sterne (m_1/m_2).

2.3 — 0.8 Punkte

Die Abstände der beiden Sterne von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt seien r_1 und r_2 . Bestimmen Sie r_1 und r_2 .

2.4 — 0.2 Punkte

Der Abstand zwischen den Sternen sei r . Bestimmen Sie r .

3 Die Gravitationskraft ist die einzige Kraft, die zwischen den Sternen wirkt.

3.1 — 1.2 Punkte

Bestimmen Sie die Masse jedes Sterns mit einer signifikanten Stelle. Die universelle Gravitationskonstante beträgt $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻².

Allgemeine Eigenschaften von Sternen

4 Die meisten Sterne erzeugen Energie durch denselben Mechanismus. Deshalb gibt es einen empirischen Zusammenhang zwischen ihrer Masse M und ihrer Leuchtkraft L , also der gesamten Strahlungsleistung des Sterns. Dieser Zusammenhang lässt sich in der Form $L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha$ schreiben.

Dabei ist $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30}$ kg die Sonnenmasse und $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26}$ W die Leuchtkraft der Sonne. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2 in einem doppelt logarithmischen Diagramm dargestellt.

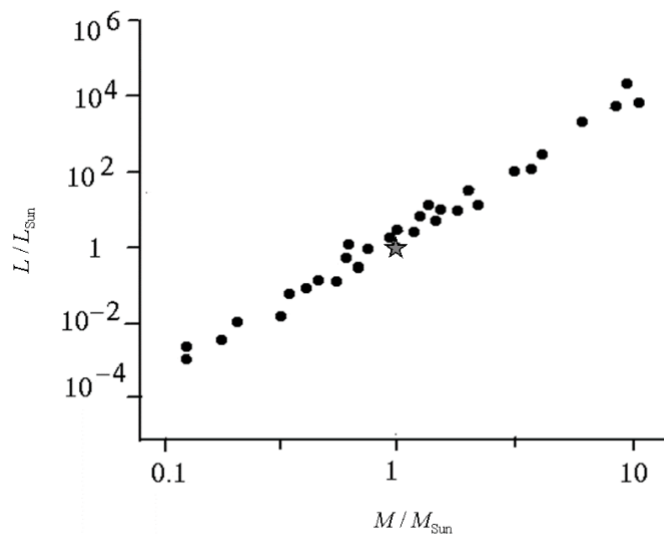


Abbildung 2. Die Leuchtkraft eines Sterns hängt gemäß einem Potenzgesetz von seiner Masse ab. Das Diagramm ist doppelt logarithmisch. Das Sternsymbol stellt die Sonne mit einer Masse von 2.0×10^{30} kg und einer Leuchtkraft von 3.9×10^{26} W dar.

4.1 — 0.6 Punkte

Bestimmen Sie α mit einer signifikanten Stelle.

4.2 — 0.6 Punkte

Die Leuchtkräfte der Sterne in dem in den vorherigen Abschnitten untersuchten Doppelsternsystem seien L_1 und L_2 . Bestimmen Sie L_1 und L_2 .

4.3 — 0.9 Punkte

Wie groß ist die Entfernung d des Sternsystems von uns in Lichtjahren?

Zur Bestimmung der Entfernung können Sie das Diagramm in Abbildung 1 verwenden. Ein Lichtjahr ist die Strecke, die Licht in einem Jahr zurücklegt.

4.4 — 0.4 Punkte

Wie groß ist der maximale Winkelabstand θ zwischen den Sternen von unserem Beobachtungsort aus?

4.5 — 0.4 Punkte

Wie groß ist der kleinste Öffnungsdurchmesser D eines optischen Teleskops, mit dem sich diese beiden Sterne getrennt auflösen lassen?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Für die späteren Ergebnisse werden ungerundete Zwischenwerte verwendet.

- **1.1:** $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$; $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.
- **1.2:** $T_1/T_2 \simeq 1.39$; $R_1/R_2 \simeq 1.56$.
- **2.1:** $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}$; $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}$.

- **2.2:** $m_1/m_2 \simeq 1.7$.
- **2.3:** $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}$; $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}$.
- **2.4:** $r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}$.
- **3.1:** Mit einer signifikanten Stelle: $m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}$, $m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}$.
- **4.1:** $\alpha \simeq 4$.
- **4.2:** $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}$; $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}$.
- **4.3:** $d \simeq 82 \text{ Lichtjahre} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}$.
- **4.4:** $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$, oder $2.7 \times 10^{-3} \text{ Bogensekunden}$.
- **4.5:** $D_{\min} \simeq 54 \text{ m}$, unter Verwendung des Rayleigh-Kriteriums bei der angegebenen Natriumwellenlänge von 589.59 nm .

Lösung

1.1

Die Umlaufzeit ist der Zeitabstand zwischen aufeinanderfolgenden Minima **gleicher Tiefe**. Aus Abbildung 1 ergeben sich ungefähr **3.0 Tage**. Benachbarte Minima unterschiedlicher Tiefe entsprechen den beiden verschiedenen Konjunktionen und liegen eine halbe Umlaufzeit auseinander.

Damit gilt

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

Die Kreisfrequenz ist

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

Die Beiträge zur Intensität auf der Erde bei unbedeckten Sternen seien

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

wobei C für beide Sterne gleich ist, da sie praktisch gleich weit entfernt sind. Außerhalb einer Bedeckung gilt

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

Da wir die Bahnebene von der Seite sehen, treten zentrale Bedeckungen auf. Wegen $R_1 > R_2$ kann der größere Stern den kleineren vollständig verdecken. Während dieser Bedeckung beträgt der Intensitätsverlust I_2 .

Bei der anderen Bedeckung verdeckt der kleinere Stern eine Fläche gleicher Größe auf dem heißeren Stern. Der Intensitätsverlust beträgt dann

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

Wegen $T_1 > T_2$ gilt $B > I_2$. Daher gehört das flachere Minimum zu der Bedeckung, bei der Stern 2 verdeckt ist.

Aus dem flachen Minimum folgt

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

Aus dem tiefen Minimum folgt

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

Division von B durch I_2 ergibt

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

also

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

Ebenso gilt

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

und damit

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

Für nichtrelativistische Bewegungen lautet die Dopplerverschiebung

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

wobei u die Geschwindigkeit entlang der Sichtlinie ist, die bei einer Bewegung von uns weg positiv ist, und

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ \AA}.$$

Bei einer von der Seite betrachteten Kreisbahn ändert sich die Geschwindigkeit entlang der Sichtlinie sinusförmig zwischen $-v_i$ und $+v_i$. Somit bestimmt die Amplitude der Wellenlängenänderung die Bahngeschwindigkeit:

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

Mit den tabellierten Extremwerten ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1 &= \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ \AA} = 1.8 \text{ \AA}, \\ \Delta\lambda_2 &= \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ \AA} = 3.1 \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}v_1 &= 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s}, \\ v_2 &= 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\boxed{v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}}.$$

2.2

Im Schwerpunktsystem haben die Sterne betragsgleiche, entgegengesetzt gerichtete Impulse:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Folglich gilt

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7}.$$

2.3

Beide Sterne haben dieselbe Kreisfrequenz. Für eine gleichförmige Kreisbewegung gilt

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

Mit den ungerundeten Werten aus den vorherigen Berechnungen ergibt sich

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

Daher gilt

$$\boxed{r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}}.$$

2.4

Der Schwerpunkt liegt zwischen den Sternen, sodass ihr Abstand

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}$$

beträgt. Somit ergibt sich mit zwei signifikanten Stellen

$$\boxed{r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}}.$$

3.1

Die Gravitationskraft liefert die Zentripetalkraft für jeden Stern:

$$\frac{G m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 r_2.$$

Daraus folgt

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

Einsetzen unter Beibehaltung der Stellen der Zwischenwerte ergibt

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Die geforderten Antworten mit einer signifikanten Stelle lauten daher

$$\boxed{m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

Im Folgenden werden die ungerundeten berechneten Massen beibehalten, da das Potenzieren vorzeitig gerundeter Massen zu erheblichen numerischen Fehlern führen würde.

4.1

Logarithmieren des empirischen Zusammenhangs ergibt

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

Somit ist α die Steigung der Trendgeraden im doppelt logarithmischen Diagramm.

Die Trendgerade verläuft näherungsweise durch

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}} \right) = (1, 1) \quad \text{und} \quad (10, 10^4).$$

Daher gilt

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

Mit $\alpha = 4$ gilt

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}} \right)^4.$$

Mit den ungerundeten, dynamisch bestimmten Massen ergibt sich

$$L_1 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W},$$
$$L_2 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}.$$

Daher gilt

$$\boxed{L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}}.$$

Als Konsistenzprüfung ergibt sich daraus $L_1/L_2 \simeq 8.8$, was nahe am photometrischen Verhältnis $I_1/I_2 = 9$ liegt, wie es für das näherungsweise gültige empirische Gesetz und die Messdaten zu erwarten ist.

4.3

Bei isotroper Strahlung erzeugt eine Leuchtkraft L die Intensität $L/(4\pi d^2)$ in der Entfernung d . Außerhalb einer Bedeckung tragen beide Sterne mit ihrem gesamten Strahlungsfluss bei:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

Damit gilt

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

Setzt man für ein Jahr näherungsweise 365 Tage an, so gilt

$$1 \text{ Lichtjahr} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

Daher ergibt sich

$$\boxed{d \simeq 82 \text{ Lichtjahre} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}}.$$

4.4

Der projizierte Abstand ist am größten, wenn die Verbindungslinie der Sterne senkrecht zur Sichtlinie steht. Sein Wert beträgt dann r .

Wegen $r \ll d$ ergibt die Kleinwinkelnäherung

$$\theta_{\max} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad.}$$

Damit gilt

$$\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

oder näherungsweise

$$\theta_{\max} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ Bogensekunden.}$$

4.5

Für ein ideales, beugungsbegrenztes Teleskop mit kreisförmiger Öffnung liefert das Rayleigh-Kriterium den kleinsten auflösbaren Winkelabstand:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

Der kleinste Öffnungsdurchmesser, mit dem die Sterne bei ihrem maximalen Abstand getrennt aufgelöst werden können, erfüllt daher

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

Mit der in der Aufgabe angegebenen Natriumwellenlänge

$$\lambda = 5895.9 \text{ \AA} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ m},$$

erhalten wir

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ m} \simeq \boxed{54 \text{ m}}.$$

Allgemeiner lautet die Wellenlängenabhängigkeit

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ m} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.