

المسألة 1: التحليل البُعدي والثقوب السوداء (إشعاع هوكينغ)

في الفيزياء، كلما كانت لدينا علاقة مساواة، وجب أن يكون طرفا المعادلة من النوع نفسه، أي أن تكون لهما الأبعاد نفسها. فعلى سبيل المثال، لا يمكن أن تمثل الكمية في الطرف الأيمن من المعادلة طولاً، بينما تمثل الكمية في الطرف الأيسر فترة زمنية. وباستخدام هذه الحقيقة، يمكن أحياناً استنتاج شكل علاقة فيزيائية تقريباً دون حل المسألة تحليلياً. فمثلاً، إذا طُلب منا إيجاد الزمن الذي يستغرقه جسم للسقوط من ارتفاع h تحت تأثير تسارع جاذبية ثابت g ، أمكننا أن نستدل بأن كل ما نحتاج إليه هو بناء كمية تمثل فترة زمنية باستخدام الكميتين h و g ، وأن الطريقة الوحيدة الممكنة لذلك هي $T = a(h/g)^{1/2}$. لاحظ أن هذا الحل يتضمن معاملاً a لم تُحدد قيمته بعد، وهو عديم الأبعاد، ولذلك لا يمكن تحديده باستخدام هذه الطريقة. وقد يكون هذا المعامل عدداً مثل 1، أو $1/2$ ، أو $\sqrt{3}$ ، أو π ، أو أي عدد حقيقي آخر. وتُسمى هذه الطريقة لاستنتاج العلاقات الفيزيائية/التحليل البُعدي. وفي التحليل البُعدي، لا تكون المعاملات العديمة الأبعاد مهمة، ولا نحتاج إلى كتابتها. ولحسن الحظ، تكون هذه المعاملات في معظم المسائل الفيزيائية من رتبة 1، ولا يؤدي حذفها إلى تغيير رتبة مقدار الكميات الفيزيائية. ولذلك، بتطبيق التحليل البُعدي على المسألة السابقة، نحصل على $T = (h/g)^{1/2}$.

تُكتب أبعاد الكمية الفيزيائية عموماً بدلالة أبعاد أربع كميات أساسية: M (الكتلة)، L (الطول)، T (الزمن)، و K (درجة الحرارة). ويُرمز إلى أبعاد كمية اعتباطية x بالرمز $[x]$. فعلى سبيل المثال، للتعبير عن أبعاد السرعة v ، والطاقة الحركية E_k ، والسعة الحرارية C_V ، نكتب: $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$ ، $[E_k] = ML^2T^{-2}$ ، $[v] = LT^{-1}$.

1 الثوابت الأساسية والتحليل البُعدي

1.1	أوجد أبعاد الثوابت الأساسية، أي ثابت بلانك h ، وسرعة الضوء c ، وثابت الجذب العام G ، وثابت بولتزمان k_B ، بدلالة أبعاد الطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة.
0.8	

ينص قانون ستيفان-بولتزمان على أن القدرة الإشعاعية للجسم الأسود، وهي مجموع الطاقة التي يشعها الجسم الأسود لكل وحدة مساحة من سطحه في وحدة الزمن، تساوي $\sigma\theta^4$ ، حيث σ هو ثابت ستيفان-بولتزمان و θ هي درجة الحرارة المطلقة للجسم الأسود.

1.2	حدد أبعاد ثابت ستيفان-بولتزمان بدلالة أبعاد الطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة.
0.5	

ثابت ستيفان-بولتزمان ليس ثابتاً أساسياً، ويمكن كتابته بدلالة الثوابت الأساسية، أي يمكن كتابة $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$. وفي هذه العلاقة، a معلمة عديمة الأبعاد من رتبة 1. وكما ذكر سابقاً، فإن القيمة الدقيقة لـ a ليست ذات أهمية من وجهة نظرنا، ولذلك سنجعلها مساوية لـ 1.

1.3	أوجد α ، β ، γ ، و δ باستخدام التحليل البُعدي.
1.0	

2 فيزياء الثقوب السوداء

في هذا الجزء من المسألة، نريد التعرّف إلى بعض خصائص الثقوب السوداء باستخدام التحليل البُعدي. وفقاً لمبرهنة في الفيزياء تُعرّف باسم مبرهنة/نعدم/الشعر، تعتمد جميع خصائص الثقب الأسود الذي ندرسه في هذه المسألة على كتلة الثقب الأسود وحدها. ومن خصائص الثقب الأسود مساحة أفق الحدث الخاص به. وبصورة تقريبية، يمثل أفق الحدث حدود الثقب الأسود. وداخل هذه الحدود، تكون الجاذبية شديدة إلى حدّ لا يستطيع معه حتى الضوء الخروج من المنطقة التي تحيط بها هذه الحدود.

نريد إيجاد علاقة بين كتلة الثقب الأسود m ومساحة أفق الحدث الخاص به A . وتعتمد هذه المساحة على كتلة الثقب الأسود وسرعة الضوء وثابت الجذب العام. وكما في 1.3، سنكتب $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1 استخدم التحليل البُعدي لإيجاد α ، β ، و γ . 0.8

يتضح من نتيجة 2.1 أن مساحة أفق الحدث للثقب الأسود تزداد بزيادة كتلته. ومن وجهة النظر الكلاسيكية، لا يخرج شيء من الثقب الأسود، ولذلك لا يمكن لمساحة أفق الحدث في جميع العمليات الفيزيائية إلا أن تزداد. وبالمقاييس إلى القانون الثاني للديناميكا الحرارية، اقترح بيكنشتاين إسناد إنتروبيا S إلى الثقب الأسود تتناسب مع مساحة أفق الحدث الخاص به، أي $S = \eta A$. وقد اكتسب هذا التخمين مزيداً من الواجهة بالاستناد إلى حجج أخرى.

2.2	استخدم التعريف الديناميكي الحراري للإنتروبيا $dS = dQ/\theta$ لإيجاد أبعاد الإنتروبيا. حيث dQ هي الحرارة المتبادلة و θ هي درجة الحرارة المطلقة للنظام.	0.2
2.3	كما في 1.3، عبّر عن الثابت ذي الأبعاد η بوصفه دالة في الثوابت الأساسية h ، c ، G ، و k_B .	1.1

لا تستخدم التحليل البُعدي في بقية المسألة، ولكن يمكنك استخدام النتائج التي حصلت عليها في الأقسام السابقة.

3 إشعاع هوكينغ

استدل هوكينغ، باستخدام مقاربة شبه كمومية، على أن الثقوب السوداء، خلافاً لوجهة النظر الكلاسيكية، تصدر إشعاعاً شبيهاً بإشعاع جسم أسود عند درجة حرارة تُسمى درجة حرارة هوكينغ.

3.1	استخدم $E = mc^2$ ، التي تعطي طاقة الثقب الأسود بدلالة كتلته، وقوانين الديناميكا الحرارية للتعبير عن درجة حرارة هوكينغ θ_H لثقب أسود بدلالة كتلته والثوابت الأساسية. افترض أن الثقب الأسود لا يبذل شغلاً على محيطه.	0.8
3.2	ستتغير إذن كتلة الثقب الأسود المعزول بسبب إشعاع هوكينغ. استخدم قانون ستيفان-بولتزمان لإيجاد اعتماد معدل التغير هذا على درجة حرارة هوكينغ للثقب الأسود θ_H ، وعبر عنه بدلالة كتلة الثقب الأسود والثوابت الأساسية.	0.7
3.3	أوجد الزمن t^* الذي يستغرقه ثقب أسود معزول كتلته m ليتبخر تماماً، أي ليفقد كتلته كلها.	1.1

من وجهة نظر الديناميكا الحرارية، تُظهر الثقوب السوداء بعض السلوكيات غير المألوفة. فمثلاً، تكون السعة الحرارية للثقب الأسود سالبة.

3.4 أوجد السعة الحرارية لثقب أسود كتلته m . 0.6

4 الثقوب السوداء وإشعاع الخلفية الكونية

اعتبر ثقباً أسود معرّضاً لإشعاع الخلفية الكونية. إن إشعاع الخلفية الكونية هو إشعاع جسم أسود بدرجة حرارة θ_B ، يملأ الكون بأسره. ومن ثم، فإن جسمًا مساحته الكلية A يستقبل طاقة تساوي $\sigma \theta_B^4 \times A$ في وحدة الزمن. ولذلك يفقد الثقب الأسود طاقة عن طريق إشعاع هوكينغ، ويكتسب طاقة من إشعاع الخلفية الكونية.

4.1	أوجد معدل تغير كتلة الثقب الأسود بدلالة كتلة الثقب الأسود ودرجة حرارة إشعاع الخلفية الكونية والثوابت الأساسية.	0.8
4.2	عند كتلة معينة m^* ، ينعدم معدل التغير هذا. أوجد m^* وعبر عنها بدلالة θ_B والثوابت الأساسية.	0.4
4.3	استخدم إجابتك عن 4.2 للتعويض عن θ_B في إجابتك عن الجزء 4.1، وعبر عن معدل تغير كتلة الثقب الأسود بدلالة m و m^* ، والثوابت الأساسية.	0.2
4.4	أوجد درجة حرارة هوكينغ لثقب أسود في اتزان حراري مع إشعاع الخلفية الكونية.	0.4
4.5	هل الاتزان مستقر أم غير مستقر؟ ولماذا؟ (عبر عن إجابتك رياضياً)	0.6

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

في هذه النتائج، جُعِلت المعاملات العديمة الأبعاد غير المحددة في الجزأين 1-2 مساوية لـ 1، وفقاً لما هو منصوص عليه. واحتفظ بالعوامل العددية الناتجة عن التفاضل والتكامل. نكتب $\dot{m} = dm/dt$.

• 1.1: $[k_B] = ML^2T^{-2}K^{-1}$ ، $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ ، $[c] = LT^{-1}$ ، $[h] = ML^2T^{-1}$.

$$\cdot 1.2 : [\sigma] = MT^{-3}K^{-4}.$$

$$\cdot 1.3 : \sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2} \text{ مما يعطي } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-3, -2, 0, 4).$$

$$\cdot 2.1 : A = \frac{G^2 m^2}{c^4} \text{ مما يعطي } (\alpha, \beta, \gamma) = (2, -4, 2).$$

$$\cdot 2.2 : [S] = ML^2 T^{-2} K^{-1}.$$

$$\cdot 2.3 : \eta = \frac{k_B c^3}{h G}.$$

$$\cdot 3.1 : \theta_H = \frac{h c^3}{2 G k_B m}.$$

$$\cdot 3.2 : \dot{m} = -\frac{\sigma A \theta_H^4}{c^2} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4 h c^2} = -\frac{h c^4}{16 G^2 m^2}.$$

$$\cdot 3.3 : t^* = \frac{16 G^2 m^3}{3 h c^4}.$$

$$\cdot 3.4 : C = -\frac{2 G k_B m^2}{h c} < 0.$$

$$\cdot 4.1 : \dot{m} = \frac{G^2 k_B^4 m^2 \theta_B^4}{h^3 c^8} - \frac{h c^4}{16 G^2 m^2}.$$

$$\cdot 4.2 : m^* = \frac{h c^3}{2 G k_B \theta_B}.$$

$$\cdot 4.3 : \dot{m} = \frac{h c^4}{16 G^2 m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$$

$$\cdot 4.4 : \theta_H(m^*) = \theta_B.$$

$$\cdot 4.5 : \text{غير مستقر. يحقق اضطراب صغير في الكتلة } \delta m \simeq \frac{h c^4}{4 G^2 (m^*)^3} \delta m \text{ ينمو مقداره أُسيًا.}$$

الحل

نستخدم نموذج الثقب الأسود الذي يعتمد على الكتلة وحدها، وقانوني انبعاث الجسم الأسود وامتصاصه المحددين في المسألة. وتلتزم جميع العبارات بالتطبيع المعتمد للمعاملات العديمة الأبعاد في الجزأين 1-2. ولم تُعطَ أي قيم عددية للمدخلات، لذا فإن النتائج المطلوبة رمزية.

1.1

تعطي علاقة طاقة الفوتون $E = h\nu$ ، حيث $[\nu] = T^{-1}$ ،

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = ML^2 T^{-1}.$$

بما أن c سرعة، فإن

$$[c] = LT^{-1}.$$

يعطي قانون نيوتن للجذب العام، $F = Gm_1 m_2 / r^2$ ،

$$[G] = \frac{[F] L^2}{M^2} = \frac{(MLT^{-2}) L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2}.$$

لحاصل الضرب $k_B \theta$ أبعاد الطاقة، ولذلك

$$[k_B] = \frac{[E]}{[\theta]} = ML^2 T^{-2} K^{-1}.$$

وحداتها في النظام الدولي للوحدات هي، على الترتيب، J s، و $m s^{-1}$ ، و $m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ، و $J K^{-1}$.

1.2

قانون ستيفان-بولتزمان للقدرة الكلية المشعة هو

$$P = \sigma A \theta^4.$$

وبناءً عليه،

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A][\theta]^4} = \frac{ML^2T^{-3}}{L^2K^4} = \boxed{MT^{-3}K^{-4}}.$$

والوحدة المقابلة في النظام الدولي للوحدات هي $W m^{-2} K^{-4}$.

1.3

باستخدام المعامل المفروض $a = 1$ ،

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

أبعاد الطرف الأيمن هي

$$M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta}.$$

وبمطابقة هذه الأبعاد مع $MT^{-3}K^{-4}$ ، نحصل على

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma + \delta &= 1, \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0, \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta &= -3, \\ -\delta &= -4.\end{aligned}$$

وبالحل،

$$\boxed{\alpha = -3, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 4}.$$

إذن

$$\boxed{\sigma = \frac{k_B^4}{h^3 c^2}}.$$

2.1

بالنسبة إلى $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ ،

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta} T^{-2\alpha-\beta}.$$

ولذلك،

$$-\alpha + \gamma = 0, \quad 3\alpha + \beta = 2, \quad -2\alpha - \beta = 0.$$

تعطي المعادلة الأخيرة $\beta = -2\alpha$ ؛ ثم تعطي معادلة الطول $\alpha = 2$. ومن ثم

$$\boxed{\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = 2},$$

و

$$\boxed{A = \frac{G^2 m^2}{c^4}}.$$

2.2

من علاقة الإنتروبيا في الديناميكا الحرارية،

$$dS = \frac{dQ}{\theta},$$

تكون أبعاد الإنتروبيا

$$[S] = \frac{[Q]}{[\theta]} = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

ووحدها في النظام الدولي للوحدات هي $J K^{-1}$.

2.3

بما أن $S = \eta A$ ، فإن

$$[\eta] = \frac{[S]}{[A]} = MT^{-2}K^{-1}.$$

نكتب

$$\eta = h^p c^q G^r k_B^s.$$

بمساواة الأبعاد نحصل على

$$\begin{aligned} p - r + s &= 1, \\ 2p + q + 3r + 2s &= 0, \\ -p - q - 2r - 2s &= -2, \\ -s &= -1. \end{aligned}$$

إن $s = 1$ و $p = r$ ، وتعطي المعادلات المتبقية

$$p = -1, \quad q = 3, \quad r = -1.$$

ولذلك،

$$\eta = \frac{k_B c^3}{hG}.$$

بدمج هذه النتيجة مع مساحة الأفق، نحصل على الإنتروبيا بوصفها دالة في الكتلة:

$$S(m) = \eta A = \frac{k_B c^3}{hG} \frac{G^2 m^2}{c^4} = \boxed{\frac{k_B G m^2}{hc}}.$$

3.1

بالنسبة إلى عائلة الحالات الديناميكية الحرارية للثقب الأسود، يكون القانون الأول في غياب حد الشغل

$$dE = \theta_H dS.$$

وبما أن

$$E = mc^2, \quad S = \frac{k_B G m^2}{hc},$$

فإن لدينا

$$\frac{dE}{dm} = c^2, \quad \frac{dS}{dm} = \frac{2k_B G m}{hc}.$$

وبناءً عليه،

$$\theta_H = \frac{dE/dm}{dS/dm} = \boxed{\frac{hc^3}{2Gk_B m}}.$$

تنخفض درجة الحرارة مع ازدياد الكتلة.

3.2

القدرة الإشعاعية المنبعثة إلى الخارج هي

$$P_{\text{out}} = \sigma A \theta_H^4.$$

يقتضي حفظ الطاقة لنقّب أسود معزول أن

$$c^2 \dot{m} = -P_{\text{out}},$$

حيث تعبّر الإشارة السالبة عن فقدان الكتلة. ولذلك،

$$\dot{m} = -\frac{\sigma A}{c^2} \theta_H^4 = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \theta_H^4.$$

بالتعويض عن درجة الحرارة من 3.1،

$$\dot{m} = -\frac{G^2 k_B^4 m^2}{h^3 c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_B m} \right)^4 = \boxed{-\frac{hc^4}{16G^2 m^2}}.$$

للتعبير عن الاعتماد على درجة الحرارة وحدها، نعوض

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B \theta_H}.$$

فنحصل على

$$\boxed{\dot{m} = -\frac{k_B^2 \theta_H^2}{4hc^2}}.$$

إذن يتناسب مقدار معدل فقدان الكتلة مع θ_H^2 . وعلى الرغم من أن الانبعاث لكل وحدة مساحة يتناسب مع θ_H^4 ، فإن مساحة الأفق تتناسب مع m^2 ، وبالتالي مع θ_H^{-2} .

3.3

لتكن الكتلة الابتدائية m ، ولنرمز إلى الكتلة اللحظية بـ $\mu(t)$. نعرّف

$$\kappa = \frac{hc^4}{16G^2} > 0.$$

معادلة فقدان الكتلة هي

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\kappa}{\mu^2}.$$

بفصل المتغيرات والتكامل انطلاقاً من $\mu(0) = m$ ،

$$\int_m^{\mu(t)} \mu'^2 d\mu' = -\kappa \int_0^t dt',$$

فنحصل على

$$\frac{\mu(t)^3 - m^3}{3} = -\kappa t.$$

ومن ثم

$$\mu(t) = (m^3 - 3\kappa t)^{1/3}.$$

يحدث التبخر الكامل عندما $\mu(t^*) = 0$:

$$\boxed{t^* = \frac{m^3}{3\kappa} = \frac{16G^2 m^3}{3hc^4}}.$$

وهذا هو العمر الناتج عن تمديد نموذج التبخر الوارد في المسألة حتى انعدام الكتلة.

3.4

لعدم وجود حد للشغل، تكون السعة الحرارية

$$C = \frac{dQ}{d\theta_H} = \frac{dE}{d\theta_H}.$$

وباستخدام

$$m = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_H},$$

نحصل على

$$C = c^2 \frac{dm}{d\theta_H} = -\frac{hc^5}{2Gk_B\theta_H^2}.$$

بالتعويض بـ $\theta_H = hc^3/(2Gk_Bm)$

$$\boxed{C = -\frac{2Gk_Bm^2}{hc}}.$$

وبصورة مكافئة،

$$C = -\frac{mc^2}{\theta_H} = -2S.$$

السعة الحرارية سالبة: إذ يزيد امتصاص الطاقة الكتلة ويخفض درجة الحرارة، بينما يرفع فقدان الطاقة درجة الحرارة.

4.1

وفقاً للنموذج المذكور، تكون القدرتان الممتصة والمنبعثة

$$P_{\text{in}} = \sigma A\theta_B^4, \quad P_{\text{out}} = \sigma A\theta_H^4.$$

يعطي حفظ الطاقة

$$c^2\dot{m} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}},$$

ومن ثم

$$\dot{m} = \frac{\sigma A}{c^2}(\theta_B^4 - \theta_H^4).$$

بالتعويض بالعبارات المشتقة سابقاً،

$$\boxed{\dot{m} = \frac{G^2k_B^4m^2\theta_B^4}{h^3c^8} - \frac{hc^4}{16G^2m^2}}.$$

يمثل الحد الأول الامتصاص، ويمثل الثاني الانبعاث.

4.2

عند $m = m^*$ ، ينعدم المعدل الصافي:

$$\sigma A (\theta_B^4 - \theta_H(m^*)^4) = 0.$$

ولدرجات الحرارة الموجبة، يتطلب ذلك

$$\theta_H(m^*) = \theta_B.$$

وباستخدام 3.1،

$$\frac{hc^3}{2Gk_Bm^*} = \theta_B,$$

ولذلك

$$m^* = \frac{hc^3}{2Gk_B\theta_B}.$$

4.3

من 4.2،

$$\theta_B = \frac{hc^3}{2Gk_Bm^*}.$$

بالتعويض في 4.1 نحصل على

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{G^2k_B^4m^2}{h^3c^8} \left(\frac{hc^3}{2Gk_Bm^*} \right)^4 - \frac{hc^4}{16G^2m^2} \\ &= \frac{hc^4}{16G^2} \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right).\end{aligned}$$

وبصورة مكافئة،

$$\dot{m} = \frac{hc^4}{16G^2m^2} \left[\left(\frac{m}{m^*} \right)^4 - 1 \right].$$

4.4

عند الاتزان الحراري، تتساوى القدرتان الممتصة والمنبعثة، ولذلك

$$\theta_H(m^*) = \frac{hc^3}{2Gk_Bm^*} = \theta_B.$$

4.5

نُبقّي درجة حرارة الخلفية ثابتة، فنكون m^* ثابتة. نكتب

$$\dot{m} = f(m) = \kappa \left(\frac{m^2}{(m^*)^4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \kappa = \frac{hc^4}{16G^2}.$$

بالتفاضل،

$$f'(m) = \kappa \left(\frac{2m}{(m^*)^4} + \frac{2}{m^3} \right).$$

وعند الاتزان،

$$f'(m^*) = \frac{4\kappa}{(m^*)^3} = \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} > 0.$$

لاضطراب صغير $m = m^* + \delta m$ ، يعطي التقريب الخطي إذن

$$\delta \dot{m} \simeq \frac{hc^4}{4G^2(m^*)^3} \delta m,$$

وحلّه

$$\delta m(t) \simeq \delta m(0) \exp \left[\frac{hc^4 t}{4G^2(m^*)^3} \right].$$

ينمو الاضطراب، ولذلك

$$\boxed{\text{الاتزان غير مستقر}}.$$

تُظهر الإشارات في 4.3 النتيجة نفسها مباشرةً:

$$m > m^* \implies \dot{m} > 0, \quad m < m^* \implies \dot{m} < 0.$$

يكون الثقب الأسود الأثقل قليلاً أبرد من الخلفية، فيكتسب مزيداً من الكتلة. ويكون الأخف قليلاً أسخن، فيفقد مزيداً من الكتلة.

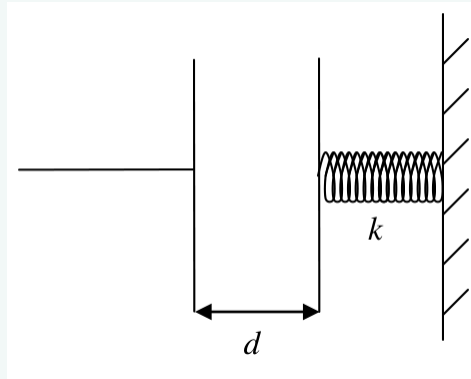
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: مقياس تسارع سعوي لوسادة هوائية في سيارة

نتناول في هذه المسألة نموذجاً مبسطاً لمقاييس التسارع المصممة لتفعيل وسائد الأمان الهوائية في السيارات عند وقوع تصادم. نريد بناء منظومة كهروميكانيكية بحيث عندما يتجاوز التسارع حداً معيناً، تتجاوز إحدى الكميات الكهربائية للمنظومة، مثل الجهد عند نقطة معينة في الدارة، قيمة عتبة، فنُفَعِّل الوسادة الهوائية نتيجة لذلك.

ملاحظة: أهمل الجاذبية في هذه المسألة.

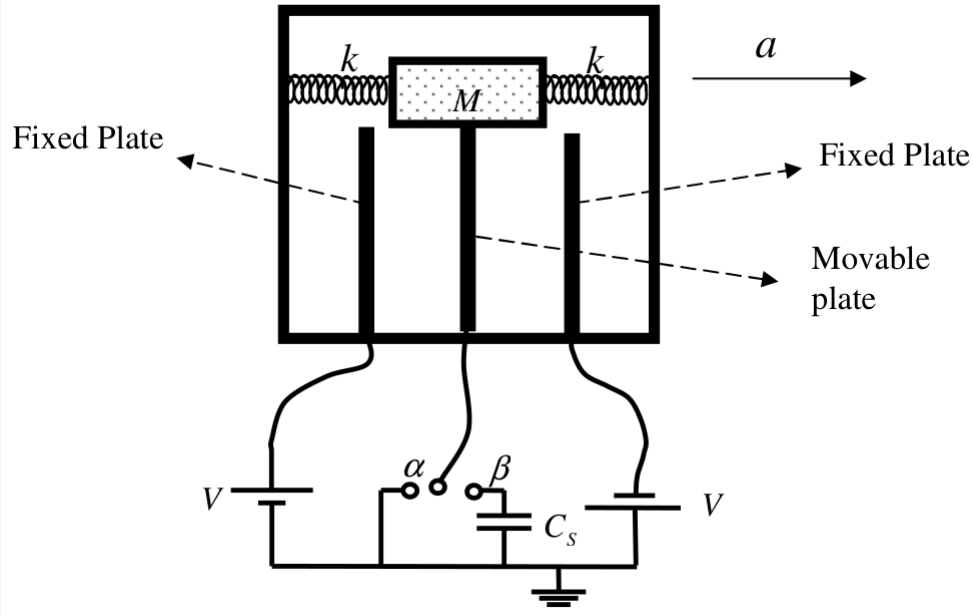
1 اعتبر مكثفاً ذا لوحين متوازيين كما في الشكل 1. مساحة كل لوح من لوحي المكثف هي A ، والمسافة بين اللوحين هي d . المسافة بين اللوحين أصغر بكثير من أبعاد اللوحين. يتصل أحد هذين اللوحين بجدار بواسطة نابض ثابت مرونته k ، بينما يكون اللوح الآخر ثابتاً. عندما تكون المسافة بين اللوحين d ، لا يكون النابض منضغطاً ولا مستطيلاً؛ أي لا تؤثر في النابض أي قوة في هذه الحالة. افترض أن سماحية الهواء بين اللوحين تساوي سماحية الفراغ ϵ_0 . سعة المكثف الموافقة لهذه المسافة بين لوحيه هي $C_0 = \epsilon_0 A/d$. نضع الشحنتين $+Q$ و $-Q$ على اللوحين، ونترك المنظومة تصل إلى الاتزان الميكانيكي.



الشكل 1

الدرجات	السؤال	الجزء
0.8	احسب القوة الكهربائية F_E التي يؤثر بها كل لوح في الآخر.	1.1
0.6	لتكن x إزاحة اللوح المتصل بالنابض. أوجد x .	1.2
0.4	ما فرق الجهد الكهربائي V بين لوحي المكثف في هذه الحالة، بدلالة Q ، A ، و d ، و k ؟	1.3
0.3	لتكن C سعة المكثف، المعروفة بأنها نسبة الشحنة إلى فرق الجهد. أوجد C/C_0 بدلالة Q ، A ، و d ، و k .	1.4
0.6	ما الطاقة الكلية U المخزنة في المنظومة بدلالة Q ، A ، و d ، و k ؟	1.5

يُظهر الشكل 2 كتلة M متصلة بلوح موصل ذي كتلة مهملة، وكذلك بنابضين لهما ثابت المرونة نفسه k . يستطيع اللوح الموصل التحرك ذهاباً وإياباً في الحيز بين لوحين موصلين ثابتين. جميع هذه الألواح متماثلة ولها المساحة نفسها A . وهكذا تشكل هذه الألواح الثلاثة مكثفين. كما هو مبين في الشكل 2، يُوصَل اللوحان الثابتان بالجهدين V و $-V$ ، ويُوصَل اللوح الأوسط بالأرضي عبر مفتاح ذي وضعين. لا يعيق السلك المتصل باللوح المتحرك حركة اللوح، وتبقى الألواح الثلاثة متوازية دائماً. عندما لا تتسارع المجموعة بأكملها، تكون المسافة من كل لوح ثابت إلى اللوح المتحرك d ، وهي أصغر بكثير من أبعاد الألواح. يمكن إهمال سمك اللوح المتحرك.



الشكل 2

يمكن أن يكون المفتاح في أحد الوضعين α و β . افترض أن مجموعة المكثفات تتسارع مع السيارة، وأن التسارع ثابت. وافترض أنه خلال هذا التسارع الثابت لا يهتز النابض، وأن جميع مكونات مجموعة المكثفات هذه تكون في مواضع اتزانها، أي إنها لا تتحرك بعضها بالنسبة إلى بعض، ومن ثم بالنسبة إلى السيارة.

نتيجة التسارع، يُزاح اللوح المتحرك بمقدار معين x عن منتصف المسافة بين اللوحين الثابتين.

2 اعتبر الحالة التي يكون فيها المفتاح في الوضع α ، أي يكون اللوح المتحرك موصولاً بالأرضي بواسطة سلك، وعندئذٍ

الدرجات	السؤال	الجزء
0.4	أوجد شحنة كل مكثف بدلالة x .	2.1
0.4	أوجد محصلة القوة الكهربائية المؤثرة في اللوح المتحرك، F_E ، بدلالة x .	2.2
0.2	افترض أن $d \gg x$ ، وأنه يمكن إهمال الحدود من رتبة x^2 مقارنة بالحدود من رتبة d^2 . بسّط إجابة الجزء السابق.	2.3
0.7	اكتب القوة الكلية المؤثرة في اللوح المتحرك (مجموع القوة الكهربائية وقوتي النابضين) على الصورة $-k_{\text{eff}}x$ ، وأعطِ تعبير k_{eff} .	2.4
0.4	عبّر عن التسارع الثابت a بدلالة x .	2.5

3 افترض الآن أن المفتاح في الوضع β ، أي إن اللوح المتحرك موصول بالأرضي عبر مكثف سعته C_S (لا توجد شحنة ابتدائية على المكثفات). إذا أُزيح اللوح المتحرك بمقدار x عن موضعه المركزي،

الدرجات	السؤال	الجزء
1.5	أوجد V_S ، فرق الجهد الكهربائي بين طرفي المكثف C_S ، بدلالة x .	3.1
0.2	افترض مرة أخرى أن $d \gg x$ ، وأهمل الحدود من رتبة x^2 مقارنة بالحدود من رتبة d^2 . بسّط إجابة الجزء السابق.	3.2

4 نريد ضبط معلومات المسألة بحيث لا تُفعل الوسادة الهوائية أثناء الكبح العادي، لكنها تنفتح بسرعة كافية عند التصادم لمنع رأس السائق من الاصطدام بالزجاج الأمامي أو عجلة القيادة. كما رأيت في الجزء 2، يمكن تمثيل القوة التي يؤثر بها النابضان والشحنات الكهربائية في اللوح المتحرك بقوة نابض ذي ثابت مرونة فعال k_{eff} . تشبه مجموعة المكثفات بأكملها منظومة كتلة ونابض كتلتها M وثابت مرونتها k_{eff} ، تحت تأثير تسارع ثابت a ، وهو في هذه المسألة تسارع السيارة.

ملاحظة: في هذا الجزء من المسألة، لم يعد الافتراض القائل بأن الكتلة والنابض في حالة اتزان تحت تسارع ثابت، ومن ثم ساكنان بالنسبة إلى السيارة، ساريًا.

أهمل الاحتكاك، واعتبر القيم العددية التالية لمعلومات المسألة:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m},$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N m}^2), \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}.$$

الدرجة	السؤال	الجزء
0.6	باستخدام هذه المعطيات، أوجد نسبة القوة الكهربائية التي حسبتها في البند 2.3 إلى قوة النابضين، وبَيِّن أنه يمكن إهمال القوى الكهربائية مقارنة بقوى النابضين.	4.1

مع أننا لم نحسب القوى الكهربائية للحالة التي يكون فيها المفتاح في الوضع β ، يمكن إثبات أن القوى الكهربائية في هذه الحالة صغيرة بالقدر نفسه، على نحو مشابه تماماً، ويمكن إهمالها.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.6	إذا كانت السيارة تتحرك بسرعة ثابتة، ثم كُبحَت فجأة بتسارع ثابت a ، فما الإزاحة العظمى للوح المتحرك؟ أعطِ إجابتك بدلالة المعلمات.	4.2

افترض أن المفتاح في الوضع β ، وأن المنظومة صُممت بحيث تُفَعِّل الوسادة الهوائية عندما يبلغ الجهد الكهربائي بين طرفي المكثف $V_S = 0.15 \text{ V}$. نريد ألا تُفَعِّل الوسادة الهوائية أثناء الكبح العادي عندما يكون تسارع السيارة أقل من تسارع الجاذبية $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، وأن تُفَعِّل فيما عدا ذلك.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.6	ما القيمة التي ينبغي أن تكون عليها C_S لهذا الغرض؟	4.3

نريد معرفة ما إذا كانت الوسادة الهوائية ستُفَعِّل بسرعة كافية لمنع رأس السائق من الاصطدام بالزجاج الأمامي أو عجلة القيادة. افترض أن السيارة تتعرض، نتيجة التصادم، لتباطؤ مقداره g ، بينما يواصل رأس السائق الحركة بسرعة ثابتة.

الدرجة	السؤال	الجزء
0.8	بتقدير المسافة بين رأس السائق وعجلة القيادة، أوجد الزمن t_1 الذي ينقضي قبل اصطدام رأس السائق بعجلة القيادة.	4.4
0.9	أوجد الزمن t_2 الذي ينقضي قبل تفعيل الوسادة الهوائية، وقارنه بـ t_1 . هل تُفَعِّل الوسادة الهوائية في الوقت المناسب؟ افترض أن الوسادة الهوائية تفتتح لحظياً.	4.5

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اعتبر $x > 0$ باتجاه اللوح الثابت الأيسر. في الأجزاء 2-4، هذا هو اللوح الذي جهده $+V$ ؛ واعتبر تسارع السيارة $a > 0$ في الاتجاه المعاكس، كما في الرسم. تكون مركبات القوة موجبة في اتجاه x الموجب، ويمثل V_S جهد اللوح المتحرك بالنسبة إلى الأرضي. اكتب $C_0 = \varepsilon_0 A/d$.

$$\bullet \text{ 1.1: } F_E = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}, \text{ وهي قوة تجاذب.}$$

$$\bullet \text{ 1.2: } x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}, \text{ باتجاه اللوح الثابت.}$$

$$\bullet \text{ 1.3: } V = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A} \right)$$

$$\bullet \text{ 1.4: } \frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A d} \right)^{-1}$$

$$\bullet \text{ 1.5: } U = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\varepsilon_0^2 A^2}$$

• 2.1: مقدار الشحنتين: $Q_L = \frac{\varepsilon_0 AV}{d - x}$, $Q_R = \frac{\varepsilon_0 AV}{d + x}$. الشحنتان المقابلتان على اللوح المتحرك هما $-Q_L$ و $+Q_R$.

• 2.2: $F_E = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right] = \frac{2\varepsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$

• 2.3: $F_E \simeq \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3} x$

• 2.4: $F_{\text{tot}} = -k_{\text{eff}} x$, $k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\varepsilon_0 AV^2}{d^3}$

• 2.5: $a = \frac{k_{\text{eff}}}{M} x = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\varepsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$ في تقريب الإزاحات الصغيرة.

• 3.1: $V_S = \frac{2\varepsilon_0 AVx}{2\varepsilon_0 Ad + C_S(d^2 - x^2)}$

• 3.2: $V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}$

• 4.1: $k_{\text{eff}} \simeq 2k$ ومن ثم $\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{kd^3} = 7.6 \times 10^{-9}$

• 4.2: $x_{\text{max}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}$

• 4.3: $C_S \simeq 8.0 \times 10^{-11} \text{ F} = 80 \text{ pF}$

• 4.4: $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. بتقدير المسافة الابتدائية بين الرأس وعجلة القيادة بـ $L = 0.50 \text{ m}$, نحصل على $t_1 \simeq 0.32 \text{ s}$.

• 4.5: $t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}} \simeq 1.3 \times 10^{-2} \text{ s} = 13 \text{ ms}$. بما أن $t_2 \ll t_1$, فإن الوسادة الهوائية تُفَعِّل في الوقت المناسب في ظل الافتراضات المذكورة.

الحل

نهمل المجالات الهامشية في الحل كله، وهو ما يبرره صغر المسافات بين الألواح مقارنة بأبعادها.

1.1

كثافة الشحنة السطحية هي $\sigma = Q/A$. يُولّد لوح مشحون بانتظام مجالاً مقداره $\sigma/(2\varepsilon_0)$ عند اللوح الآخر. يتعرض كل لوح لقوة ناتجة عن مجال اللوح الآخر، لذا يكون مقدار قوة التجاذب

$$F_E = Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

عند ثبات الشحنة، لا تعتمد هذه القوة على المسافة بين اللوحين ضمن تقريب اللوحين المتوازيين.

1.2

يحرك التجاذب اللوح المتحرك باتجاه اللوح الثابت، ويمدد النابض بمقدار x . يتطلب الاتزان الميكانيكي أن يكون

$$kx = F_E.$$

وبالتالي،

$$x = \frac{Q^2}{2k\varepsilon_0 A}$$

يتطلب الحل الذي يبقى فيه اللوحان منفصلين أن يكون $x < d$ ، أو

$$Q^2 < 2k\varepsilon_0 Ad.$$

1.3

المجال الكهربائي بين اللوحين هو

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

المسافة بينهما عند الاتزان هي $d - x$ ، ومن ثم

$$V = E(d - x).$$

بالتعويض عن الإزاحة نحصل على

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \left(d - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A} \right).$$

1.4

وفقاً للتعريف المعطى،

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d - x}.$$

وبما أن $C_0 = \epsilon_0 A/d$ ، فإن

$$\frac{C}{C_0} = \frac{d}{d - x} = \left(1 - \frac{Q^2}{2k\epsilon_0 A d} \right)^{-1}.$$

1.5

عند الاتزان، تتكون الطاقة المختزنة من طاقة المجال الكهربائي للمكثف وطاقة المرونة لل نابض:

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{Q^2(d - x)}{2\epsilon_0 A} + \frac{1}{2} k x^2.$$

باستخدام $x = Q^2/(2k\epsilon_0 A)$ ،

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^4}{4k\epsilon_0^2 A^2} + \frac{Q^4}{8k\epsilon_0^2 A^2} \\ &= \left[\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q^4}{8k\epsilon_0^2 A^2} \right]. \end{aligned}$$

2.1

باعتبار x موجبة باتجاه اللوح الأيسر، يكون عرض الفجوة اليسرى $d - x$ ، وعرض الفجوة اليمنى $d + x$. ومن ثم تكون سعتا المكثفين

$$C_L = \frac{\epsilon_0 A}{d - x}, \quad C_R = \frac{\epsilon_0 A}{d + x}.$$

في وضع المفتاح α ، يكون اللوح المتحرك مؤرّضاً. مقدار فرق الجهد بين طرفي كل مكثف هو V ، فنحصل على

$$Q_L = C_L V = \frac{\epsilon_0 A V}{d - x}, \quad Q_R = C_R V = \frac{\epsilon_0 A V}{d + x}.$$

يحمل اللوح الثابت الأيسر الشحنة $+Q_L$ ، ويحمل سطح اللوح المتحرك المقابل له الشحنة $-Q_L$. ويحمل اللوح الثابت الأيمن الشحنة $-Q_R$ ، ويحمل سطح اللوح المتحرك المقابل له الشحنة $+Q_R$.

2.2

يجذب كل لوح ثابت اللوح المتحرك. تؤثر قوة التجاذب اليسرى في اتجاه x الموجب، وقوة التجاذب اليمنى في اتجاه x السالب. باستخدام القوة من 1.1،

$$F_E = \frac{Q_L^2 - Q_R^2}{2\epsilon_0 A}.$$

إذن

$$F_E = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right].$$

بتوحيد مقامي الكسرين نحصل على

$$F_E = \frac{2\epsilon_0 AV^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}.$$

للقوة إشارة x نفسها: يميل التجاذب الكهربائي إلى زيادة الإزاحة باتجاه اللوح الأقرب.

2.3

نعيد كتابة النتيجة الدقيقة على الصورة

$$F_E = \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right)^{-2}.$$

عندما يكون $d \gg |x|$ ، يعطي إهمال x^2/d^2

$$F_E \simeq \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3} x.$$

2.4

يؤثر كلا النابضين بقوة إرجاع. ينضغط أحدهما ويستطيل الآخر، وتكون محصلة قوتيهما

$$F_{\text{springs}} = -2kx.$$

بإضافة القوة الكهربائية في التقريب الخطي،

$$F_{\text{tot}} = -2kx + \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3} x = -k_{\text{eff}} x.$$

لذلك،

$$k_{\text{eff}} = 2k - \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3}.$$

يقلل التآثر الكهربائي من صلابة الإرجاع. وتتطلب استجابة مستقرة للإزاحات الصغيرة أن يكون $k_{\text{eff}} > 0$.

2.5

تتسارع السيارة في الاتجاه المعاكس لاتجاه x الموجب. لذلك تكون قوة العطالة المؤثرة في الكتلة في الإطار المرجعي للسيارة $+Ma$. يتطلب الاتزان النسبي أن يكون

$$-k_{\text{eff}} x + Ma = 0.$$

ومن ثم

$$a = \frac{k_{\text{eff}} x}{M} = \frac{2}{M} \left(k - \frac{\epsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x.$$

يستخدم هذا التعبير تقريب الإزاحات الصغيرة الذي استخدم في 2.3.

3.1

في الوضع β ، يشكل اللوح المتحرك وسلك توصيله واللوح المتصل به من المكثف C_S موصلًا معزولًا. وتبقى شحنته الكلية، التي كانت صفرًا في البداية، مساوية للصفر.

ليكن جهده بالنسبة إلى الأرضي V_S . الشحنات على سطوحه الثلاثة التي تشكل أجزاءً من المكثفات هي

$$q_L = C_L(V_S - V), \quad q_R = C_R(V_S + V), \quad q_S = C_S V_S.$$

يعطي انحفاظ الشحنة

$$C_L(V_S - V) + C_R(V_S + V) + C_S V_S = 0.$$

لذلك،

$$V_S = \frac{V(C_L - C_R)}{C_L + C_R + C_S}.$$

ولدينا الآن

$$C_L - C_R = \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}, \quad C_L + C_R = \frac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}.$$

بالتعويض نحصل على

$$V_S = \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S(d^2 - x^2)}.$$

على وجه الخصوص، يكون $V_S = 0$ عند الموضع المركزي، ويكون $V_S > 0$ للإزاحة باتجاه اللوح ذي الجهد $+V$.

3.2

نهمل x^2 مقارنة بـ d^2 في المقام:

$$V_S \simeq \frac{2\varepsilon_0 A V x}{2\varepsilon_0 A d + C_S d^2}.$$

باستخدام $C_0 = \varepsilon_0 A/d$

$$V_S \simeq \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx}{d}.$$

إن يتناسب الجهد المقاس طردياً مع الإزاحة في هذا التقريب.

4.1

تتعاكس القوة الكهربائية وقوة النابضين. ونسبة مقداريهما هي

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(2\varepsilon_0 A V^2 / d^3)|x|}{2k|x|} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3}.$$

مع $d = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$\frac{|F_E|}{|F_{\text{springs}}|} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(2.5 \times 10^{-2})(12)^2}{(4.2 \times 10^3)(1.0 \times 10^{-2})^3} = \boxed{7.6 \times 10^{-9}}.$$

المساهمة الكهربائية مهملة، لذا

$$k_{\text{eff}} \simeq 2k = 8.4 \times 10^3 \text{ N/m}.$$

وكما يجيز نص المسألة، نهمل أيضاً القوى الكهربائية في الموضع β .

4.2

قبل الكبح، تكون الكتلة في المركز وساكنة بالنسبة إلى السيارة:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

بعد بدء التسارع الثابت فجأة، تكون معادلة حركتها في الإطار المرجعي للسيارة

$$M\ddot{x} + k_{\text{eff}}x = Ma.$$

نعرف

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{Ma}{k_{\text{eff}}}.$$

الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية هو

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega t).$$

تحدث أول قيمة عظمى عند $\omega t = \pi$ ، فنحصل على

$$x_{\text{max}} = 2x_{\text{eq}} = \frac{2Ma}{k_{\text{eff}}} \simeq \frac{Ma}{k}.$$

الإزاحة العظمى تساوي ضعفي إزاحة الاتزان الساكن، لأن الكتلة التي لا تخضع لتخميد تتجاوز موضع اتزانها الجديد.

4.3

ليكن جهد التفعيل

$$V_{\text{th}} = 0.15 \text{ V}.$$

لجعل حد التفعيل عند $a = g$ ، يجب أن يساوي الجهد الأقصى أثناء تسارع ثابت مقداره g القيمة V_{th} .

الإزاحة العظمى المقابلة هي

$$x_g = \frac{Mg}{k} = \frac{(0.15)(9.8)}{4.2 \times 10^3} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}.$$

إذن

$$\frac{x_g}{d} = 0.035,$$

وهو ما يدعم استخدام تقريب الإزاحات الصغيرة.

من 3.2،

$$V_{\text{th}} = \frac{2C_0}{2C_0 + C_S} \frac{Vx_g}{d}.$$

بحل المعادلة لإيجاد السعة المطلوبة،

$$C_S = 2C_0 \left(\frac{Vx_g}{dV_{\text{th}}} - 1 \right) = 2C_0 \left(\frac{VMg}{kdV_{\text{th}}} - 1 \right).$$

هنا،

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.2125 \times 10^{-11} \text{ F} = 22.125 \text{ pF},$$

و

$$\frac{Vx_g}{d} = (12)(0.035) = 0.42 \text{ V}.$$

وبالتالي،

$$C_S = 2(22.125 \text{ pF}) \left(\frac{0.42}{0.15} - 1 \right) = 79.65 \text{ pF}.$$

وفق دقة المعطيات،

$$C_S \simeq 80 \text{ pF} = 8.0 \times 10^{-11} \text{ F}.$$

في نموذج الكبح ذي التسارع الثابت هذا، يتناسب الجهد الأقصى طردياً مع a ، لذا لا تبلغ التسارعات الأقل من g العتبة، بينما تبلغها التسارعات المساوية لـ g أو الأكبر منها.

للمقارنة، يعطي الاحتفاظ بالاعتماد الهندسي الدقيق من 3.1

$$C_{S,\text{exact}} = \frac{2\varepsilon_0 A (Vx_g/V_{\text{th}} - d)}{d^2 - x_g^2} = 79.75 \text{ pF},$$

وهي قيمة تعطي النتيجة المقربة نفسها.

4.4

لتكن L المسافة الابتدائية بين رأس السائق وعجلة القيادة على امتداد اتجاه الحركة.

في البداية، تكون لهما السرعة نفسها. يواصل الرأس الحركة بسرعة ثابتة، بينما تتباطأ عجلة القيادة مع السيارة بمقدار g . لذلك يكون مقدار تسارعهما النسبي g ، ويكون مقدار تناقص المسافة بينهما بعد زمن t هو

$$s_{\text{rel}} = \frac{1}{2}gt^2.$$

يحدث الاصطدام عندما يساوي هذا المقدار L :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

بأخذ التقدير المعقول $L = 0.50 \text{ m}$ ،

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(0.50)}{9.8}} = 0.319 \text{ s} \simeq \boxed{0.32 \text{ s}}.$$

4.5

عند $a = g$ ، اختير المكثف بحيث يُبلغ جهد التفعيل عند الإزاحة العظمى x_g . وتُعطى الحركة بالعلاقة

$$x(t) = \frac{Mg}{2k}(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

بما أن $x_g = Mg/k$ ، فإن أول تفعيل يحدث عندما

$$1 - \cos \omega t_2 = 2,$$

أو

$$\omega t_2 = \pi.$$

لذلك،

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M}{2k}}.$$

عددياً،

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{0.15}{8.4 \times 10^3}} = 0.01328 \text{ s} \simeq \boxed{13 \text{ ms}}.$$

بالمقارنة مع الزمن المقدّر لاصطدام الرأس،

$$\frac{t_2}{t_1} \simeq 0.042.$$

لا يقترب الرأس من عجلة القيادة إلا بمقدار

$$\frac{1}{2}gt_2^2 \simeq 8.6 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.86 \text{ mm}$$

قبل التفعيل. ومن ثم تُفَعَّل الوسادة الهوائية قبل وصول الرأس إلى عجلة القيادة بوقت كافٍ، بافتراض انفتاحها لحظيًا كما هو مشترك.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

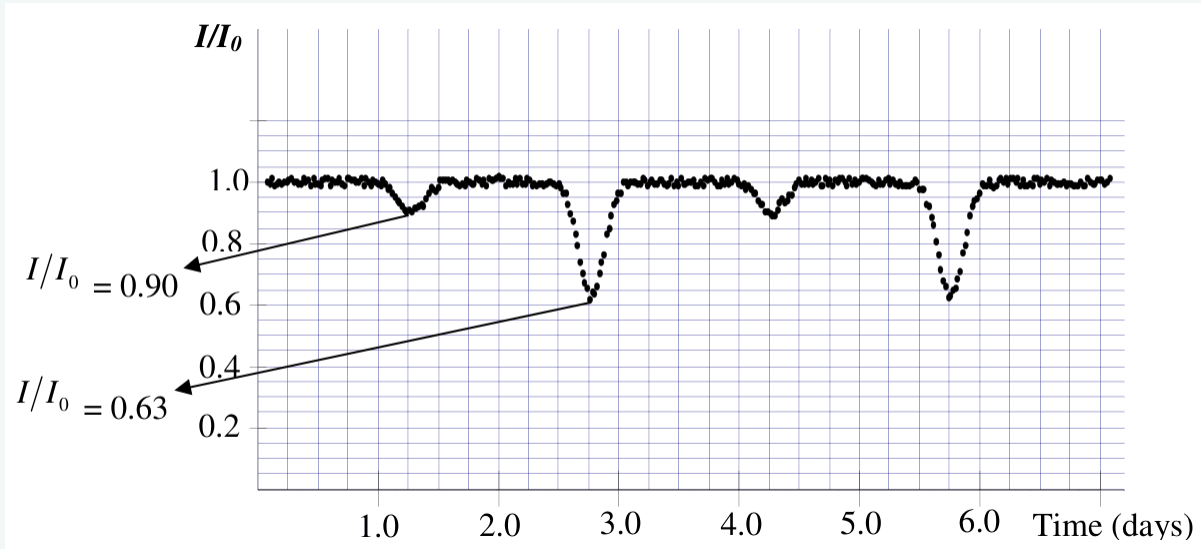
المسألة 3: النجوم الثنائية

يشكل نجمان يدوران حول مركز كتلتهما نظامًا نجميًا ثنائيًا. ويقارب عدد النجوم التي تنتمي إلى أنظمة نجمية ثنائية نصف نجوم مجرتنا. وليس من السهل تمييز الطبيعة الثنائية لمعظم هذه الأنظمة النجمية من الأرض، لأن المسافة بين النجمين أصغر بكثير من بعدهما عنا، ولذلك لا يمكن فصل صورتيهما بالمقاريب. لذا علينا استخدام القياس الضوئي أو القياس الطيفي لرصد التغيرات في شدة ضوء نجم معين أو في طيفه، لتحديد ما إذا كان نظامًا ثنائيًا أم لا.

القياس الضوئي للنجوم الثنائية

إذا كنا واقعين تمامًا في مستوى حركة النجمين، فإن أحدهما سيحجب الآخر (يمر أمامه) في أوقات معينة، وستتغير شدة ضوء النظام بأكمله مع الزمن من موضع رصدنا. وتسمى هذه الأنظمة الثنائية بالثنائيات الكسوفية.

1 افترض أن نجمين يتحركان في مدارين دائريين حول مركز كتلتهما المشترك بسرعة زاوية ثابتة ω ، وأننا نقع تمامًا في مستوى حركة النظام الثنائي. وافترض أيضًا أن درجتي حرارة سطحي النجمين هما T_1 و T_2 ($T_1 > T_2$)، وأن نصفي قطريهما المناظرين هما R_1 و R_2 ($R_1 > R_2$)، على الترتيب. يبين الشكل 1 شدة الضوء الكلية المقاسة على الأرض بدلالة الزمن. وتشير القياسات الدقيقة إلى أن شدتي الضوء الوارد من النجمين عند القيمتين الدنيا تساويان، على الترتيب، 90 و 63 بالمئة من الشدة العظمى، I_0 ، المستقبلية من النجمين معًا ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). يمثّل المحور الرأسي في الشكل 1 النسبة I/I_0 ، والمحور الأفقي مدرّج بالأيام.



الشكل 1. الشدة النسبية المستقبلية من النظام النجمي الثنائي بدلالة الزمن. قُسمت قيم المحور الرأسي على $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$. الزمن معطى بالأيام.

1.1 — 0.8 نقطة

أوجد الزمن الدوري للحركة المدارية. أعط إجابتك بوحدة الثانية إلى رقمين معنويين.

ما التردد الزاوي للنظام بوحدة rad/sec؟

يمكن، بتقريب جيد، اعتبار الإشعاع المستقبل من نجم إشعاع جسم أسود منتظمًا صادرًا عن قرص مستوي نصف قطره يساوي نصف قطر النجم. ولذلك تتناسب القدرة المستقبلية من النجم مع AT^4 ، حيث A مساحة القرص و T درجة حرارة سطح النجم.

1.2 — 1.6 نقطة

استخدم المخطط في الشكل 1 لإيجاد النسبتين T_1/T_2 و R_1/R_2 .

القياس الطيفي للأنظمة الثنائية

في هذا القسم، سنحسب الخصائص الفلكية لنجم ثنائي باستخدام بيانات تجريبية للقياس الطيفي للنظام الثنائي.

تمتص الذرات الإشعاع أو تصدره عند أطوال موجية معينة مميزة لها. ولذلك يحتوي الطيف المرصود لنجم على خطوط امتصاص ناتجة عن الذرات الموجودة في غلافه الجوي. للصوديوم خط طيفي أصفر مميز (الخط D_1) بطول موجي $5895.9 \text{ \AA}$ ($10 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$). ندرس طيف امتصاص ذرات الصوديوم عند هذا الطول الموجي للنظام الثنائي الوارد في القسم السابق. يتعرض طيف الضوء الذي نستقبله من النجم الثنائي لانزياح دوبلر، لأن النجمين يتحركان بالنسبة إلينا. ولكل نجم سرعة مختلفة. وبناءً على ذلك، سينزاح الطول الموجي للامتصاص لكل نجم بمقدار مختلف. ويلزم إجراء قياسات عالية الدقة للطول الموجي لرصد انزياح دوبلر، لأن سرعة النجمين أصغر بكثير من سرعة الضوء. إن سرعة مركز كتلة النظام الثنائي الذي نتناوله في هذه المسألة أصغر بكثير من سرعتين المداريتين للنجمين. ومن ثم يمكن عزو جميع انزياحات دوبلر إلى السرعة المدارية للنجمين. يبين الجدول 1 الطيف المقيس لنجمي النظام الثنائي الذي رصدناه.

الجدول 1: طيف امتصاص النظام النجمي الثنائي لخط الصوديوم D_1

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
$\lambda_1 (\text{\AA})$	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
$\lambda_2 (\text{\AA})$	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(ملاحظة: لا حاجة إلى رسم بيانات هذا الجدول بيانيًا)

2 باستخدام الجدول 1،

2.1 — 1.8 نقطة

لتكن v_1 و v_2 السرعتين المداريتين للنجمين. أوجد v_1 و v_2 .
سرعة الضوء $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$. أهمل جميع التأثيرات النسبية.

2.2 — 0.7 نقطة

أوجد نسبة كتلتي النجمين (m_1/m_2) .

2.3 — 0.8 نقطة

لتكن r_1 و r_2 بعدي النجمين عن مركز كتلتها.
أوجد r_1 و r_2 .

2.4 — 0.2 نقطة

لتكن r المسافة بين النجمين. أوجد r .

3 قوة الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة بين النجمين.

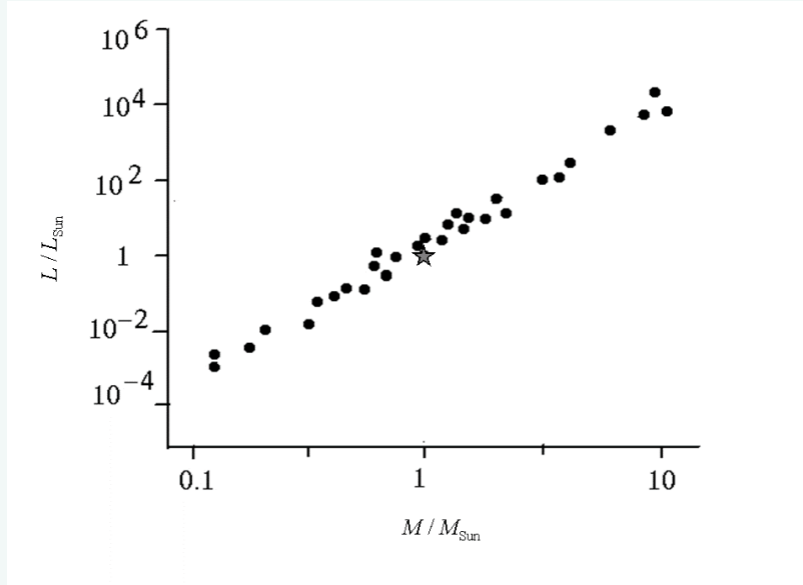
3.1 — 1.2 نقطة

أوجد كتلة كل نجم إلى رقم معنوي واحد.
ثابت الجذب العام $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

الخصائص العامة للنجوم

4 تولّد معظم النجوم الطاقة بالآلية نفسها. ولهذا توجد علاقة تجريبية بين كتلتها، M ، ولعانها، L ، الذي يمثّل القدرة الإشعاعية الكلية للنجم. ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصيغة $L/L_{\text{Sun}} = (M/M_{\text{Sun}})^\alpha$.

هنا، $M_{\text{Sun}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ هي كتلة الشمس، و $L_{\text{Sun}} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ هو لمعان الشمس. وتظهر هذه العلاقة في مخطط لوغاريتمي على كلا المحورين في الشكل 2.



الشكل 2. يتغير لمعان النجم بدلالة كتلته وفق قانون قوة. المخطط لوغاريتمي على كلا المحورين. يمثّل الرمز النجمي الشمس ذات الكتلة $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ واللمعان $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$.

4.1 — 0.6 نقطة

أوجد α إلى رقم معنوي واحد.

4.2 — 0.6 نقطة

لتكن L_1 و L_2 لمعاني النجمين في النظام الثنائي المدروس في الأقسام السابقة. أوجد L_1 و L_2 .

4.3 — 0.9 نقطة

ما بعد النظام النجمي عنا، d ، بالسنوات الضوئية؟ لإيجاد البعد يمكنك استخدام المخطط في الشكل 1. السنة الضوئية الواحدة هي المسافة التي يقطعها الضوء في سنة واحدة.

4.4 — 0.4 نقطة

ما أقصى فصل زاوي، θ ، بين النجمين من موضع رصدنا؟

4.5 — 0.4 نقطة

ما أصغر قطر فتحة لمقراب بصري، D ، يمكنه فصل صورتين هذين النجمين؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم النتائج اللاحقة قيماً وسيطة غير مقربة.

• 1.1: $\omega \simeq 2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$; $P = 3.0 \text{ days} \simeq 2.6 \times 10^5 \text{ s}$

- **1.2 :** $R_1/R_2 \simeq 1.56$; $T_1/T_2 \simeq 1.39$.
- **2.1 :** $v_2 \simeq 1.6 \times 10^5$ m/s ; $v_1 \simeq 9.2 \times 10^4$ m/s .
- **2.2 :** $m_1/m_2 \simeq 1.7$.
- **2.3 :** $r_2 \simeq 6.5 \times 10^9$ m ; $r_1 \simeq 3.8 \times 10^9$ m .
- **2.4 :** $r \simeq 1.0 \times 10^{10}$ m .
- **3.1 :** إلى رقم معنوي واحد، $m_2 \simeq 4 \times 10^{30}$ kg ، $m_1 \simeq 6 \times 10^{30}$ kg .
- **4.1 :** $\alpha \simeq 4$.
- **4.2 :** $L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27}$ W ؛ $L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28}$ W .
- **4.3 :** $d \simeq 82$ سنة ضوئية $\simeq 7.7 \times 10^{17}$ m .
- **4.4 :** $\theta_{\max} \simeq 1.3 \times 10^{-8}$ rad ، أو 2.7×10^{-3} ثانية قوسية .
- **4.5 :** $D_{\min} \simeq 54$ m ، باستخدام معيار رايلي عند الطول الموجي المعطى للصوديوم، 589.59 nm .

الحل

1.1

الزمن الدوري المداري هو الفاصل الزمني بين قيمتين دنيا متتاليتين لهما العمق نفسه. يعطي الشكل 1 نحو 3.0 أيام. أما القيمتان الدنيا المتجاورتان المختلفتان في العمق فتقابلان الاقترانين المختلفين، ويفصل بينهما نصف زمن دوري.

إذن

$$P = 3.0 \times 86400 \text{ s} = 259200 \text{ s} \simeq \boxed{2.6 \times 10^5 \text{ s}}.$$

التردد الزاوي هو

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.424 \dots \times 10^{-5} \text{ rad/s} \simeq \boxed{2.4 \times 10^{-5} \text{ rad/s}}.$$

1.2

لتكن مساهمتا النجمين في الشدة عند الأرض في غياب الحجب

$$I_1 = CR_1^2 T_1^4, \quad I_2 = CR_2^2 T_2^4,$$

حيث C ثابت مشترك للنجمين لأنهما يقعان عملياً على البعد نفسه. خارج الكسوف،

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

ينتج عن الرصد من داخل مستوى المدار كسوفان مركزيان. وبما أن $R_1 > R_2$ ، يستطيع النجم الأكبر حجب النجم الأصغر بالكامل. وخلال هذا الكسوف تكون الشدة المفقودة I_2 .

في الكسوف الآخر، يحجب النجم الأصغر رقعة مساوية له في المساحة من النجم الأعلى حرارة. وتكون الشدة المفقودة حينئذ

$$B = CR_2^2 T_1^4.$$

بما أن $T_1 > T_2$ ، فإن $B > I_2$. ولذلك فإن القيمة الدنيا الأقل عمقاً تقابل الكسوف الذي يُحجب فيه النجم 2.

تعطي القيمة الدنيا الأقل عمقاً

$$I_1 = 0.90I_0, \quad I_2 = 0.10I_0.$$

وتعطي القيمة الدنيا الأعمق

$$B = (1 - 0.63)I_0 = 0.37I_0.$$

بقسمة B على I_2 ،

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{CR_2^2 T_1^4}{CR_2^2 T_2^4} = \frac{0.37}{0.10} = 3.7,$$

ومن ثم

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = 3.7^{1/4} \simeq 1.39}.$$

وبالمثل،

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{I_1}{B} = \frac{0.90}{0.37},$$

وبالتالي

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{0.90}{0.37}} \simeq 1.56}.$$

2.1

في الحركة غير النسبية، يُعطى انزياح دوبلر بالعلاقة

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{u}{c},$$

حيث u مركبة السرعة على خط النظر، وهي موجبة عند الابتعاد، و

$$\lambda_0 = 5895.9 \text{ Å}.$$

في مدار دائري نرصده من داخل مستواه، تتغير مركبة السرعة على خط النظر جيئياً بين $-v_i$ و $+v_i$. ومن ثم تحدد سعة تغير الطول الموجي السرعة المدارية:

$$v_i = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\lambda_{i,\max} - \lambda_{i,\min}}{2}.$$

باستخدام القيم القصوى والدنيا الواردة في الجدول،

$$\Delta\lambda_1 = \frac{5897.7 - 5894.1}{2} \text{ Å} = 1.8 \text{ Å},$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{5899.0 - 5892.8}{2} \text{ Å} = 3.1 \text{ Å}.$$

ولذلك،

$$v_1 = 3.0 \times 10^8 \frac{1.8}{5895.9} = 9.159 \dots \times 10^4 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 3.0 \times 10^8 \frac{3.1}{5895.9} = 1.577 \dots \times 10^5 \text{ m/s}.$$

إن

$$\boxed{v_1 \simeq 9.2 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad v_2 \simeq 1.6 \times 10^5 \text{ m/s}}.$$

2.2

في إطار مركز الكتلة، يكون زخما النجمين متساويين مقداراً ومتعاكسين اتجاهًا:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

وبناءً على ذلك،

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3.1}{1.8} = 1.722 \dots \simeq 1.7}.$$

2.3

للنجمين التردد الزاوي نفسه. وفي الحركة الدائرية المنتظمة،

$$v_i = \omega r_i, \quad r_i = \frac{v_i P}{2\pi}.$$

باستخدام القيم غير المقرّبة من الحسابات السابقة،

$$r_1 = 3.778 \dots \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6.507 \dots \times 10^9 \text{ m}.$$

ولذلك،

$$\boxed{r_1 \simeq 3.8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 \simeq 6.5 \times 10^9 \text{ m}}.$$

2.4

يقع مركز الكتلة بين النجمين، لذا فإن المسافة الفاصلة بينهما هي

$$r = r_1 + r_2 = 1.02854 \dots \times 10^{10} \text{ m}.$$

إذن، إلى رقمين معنويين،

$$\boxed{r \simeq 1.0 \times 10^{10} \text{ m}}.$$

3.1

توفّر قوة الجاذبية القوة الجاذبة المركزية لكل نجم:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\omega^2r_1 = m_2\omega^2r_2.$$

ويترتب على ذلك أن

$$m_1 = \frac{\omega^2 r_2 r^2}{G}, \quad m_2 = \frac{\omega^2 r_1 r^2}{G}.$$

بالتعويض، مع الاحتفاظ بالأرقام في الحسابات الوسيطة، نحصل على

$$m_1 = 6.037 \dots \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 = 3.5056 \dots \times 10^{30} \text{ kg}.$$

وعليه فإن الإجابتين المطلوبتين إلى رقم معنوي واحد هما

$$\boxed{m_1 \simeq 6 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_2 \simeq 4 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

سنحتفظ فيما يلي بالكتلتين المحسوبتين دون تقريب، لأن رفع كتلتين مقربتين قبل الألوان إلى قوة سيُدخل خطأً عددياً كبيراً.

4.1

بأخذ لوغاريتم طرفي العلاقة التجريبية نحصل على

$$\log\left(\frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = \alpha \log\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}\right).$$

إذن α هو ميل خط الاتجاه في المخطط اللوغاريتمي على كلا المحورين.

يمر خط الاتجاه تقريباً بالنقطتين

$$\left(\frac{M}{M_{\text{Sun}}}, \frac{L}{L_{\text{Sun}}}\right) = (1, 1) \quad \text{و} \quad (10, 10^4).$$

ومن ثم

$$\alpha \simeq \frac{\log_{10}(10^4) - \log_{10}(1)}{\log_{10}(10) - \log_{10}(1)} = \boxed{4}.$$

4.2

عند $\alpha = 4$ ،

$$L_i = L_{\text{Sun}} \left(\frac{m_i}{M_{\text{Sun}}} \right)^4.$$

باستخدام الكتلتين المستنتجتين من الحركة دون تقريب،

$$L_1 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{6.037 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.238 \dots \times 10^{28} \text{ W},$$

$$L_2 = 3.9 \times 10^{26} \left(\frac{3.5056 \dots \times 10^{30}}{2.0 \times 10^{30}} \right)^4 = 3.681 \dots \times 10^{27} \text{ W}.$$

ولذلك،

$$L_1 \simeq 3.2 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 \simeq 3.7 \times 10^{27} \text{ W}.$$

وللتحقق من الاتساق، تعطي هاتان القيمتان $L_1/L_2 \simeq 8.8$ ، وهي قريبة من النسبة المستنتجة من القياس الضوئي $I_1/I_2 = 9$ ، كما هو متوقع بالنظر إلى الطبيعة التقريبية للقانون التجريبي والبيانات المقيسة.

4.3

في حالة الإشعاع المتساوي في جميع الاتجاهات، ينتج عن اللعان L شدة $L/(4\pi d^2)$ على بعد d . وخارج الكسوف، يسهم كلا النجمين بكامل تدفقه الإشعاعي:

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2}.$$

إن

$$d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = \sqrt{\frac{3.6065 \dots \times 10^{28}}{4\pi(4.8 \times 10^{-9})}} = 7.7325 \dots \times 10^{17} \text{ m}.$$

باعتبار السنة الواحدة نحو 365 يوماً،

$$1 \text{ سنة ضوئية} = c(365 \times 86400 \text{ s}) \simeq 9.46 \times 10^{15} \text{ m}.$$

ولذلك،

$$d \simeq 82 \text{ سنة ضوئية} \simeq 7.7 \times 10^{17} \text{ m}.$$

4.4

تكون المسافة المسقطه بين النجمين أعظمية عندما يكون الخط الواصل بينهما عمودياً على خط النظر. وتكون قيمتها حينئذ r .

بما أن $d \gg r$ ، فإن تقريب الزوايا الصغيرة يعطي

$$\theta_{\text{max}} \simeq \frac{r}{d} = \frac{1.02854 \dots \times 10^{10}}{7.7325 \dots \times 10^{17}} = 1.330 \dots \times 10^{-8} \text{ rad}.$$

ومن ثم

$$\theta_{\text{max}} \simeq 1.3 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

أو تقريباً

$$\theta_{\text{max}} \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ ثانية قوسية}.$$

لمقارب مثالي ذي فتحة دائرية تحدّ ظاهرة الحيود من قدرته على الفصل، يعطي معيار رايلي أصغر فصل زاوي يمكن تمييزه:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}.$$

ولذلك فإن أصغر قطر فتحة يتيح فصل صورتَي النجمين عند أقصى تباعد بينهما يحقق

$$D_{\min} = \frac{1.22\lambda}{\theta_{\max}}.$$

باستخدام الطول الموجي للصوديوم المعطى في المسألة،

$$\lambda = 5895.9 \text{ Å} = 5.8959 \times 10^{-7} \text{ m},$$

نحصل على

$$D_{\min} = \frac{1.22(5.8959 \times 10^{-7})}{1.330 \dots \times 10^{-8}} \text{ m} \simeq \boxed{54 \text{ m}}.$$

وبصورة أعم، يكون الاعتماد على الطول الموجي وفق العلاقة

$$D_{\min}(\lambda) \simeq 54 \text{ m} \left(\frac{\lambda}{589.59 \text{ nm}} \right).$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.