

# IPhO 2006

理论题与解答 · 新加坡 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2006/

## 题目 1: 中子干涉仪中的重力

请将所有答案填写在答题纸上。

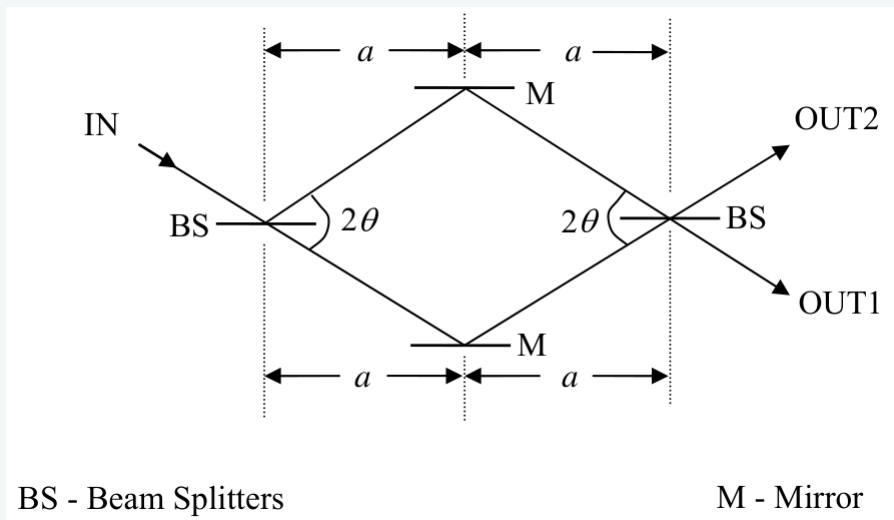


图 1a

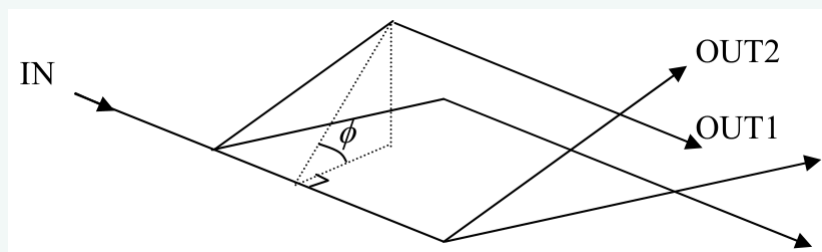


图 1b

**物理情境** 我们考虑科莱拉、奥弗豪泽和沃纳所进行的著名中子干涉仪实验中的情形，但将装置理想化，假设干涉仪内的分束器和反射镜都是理想的。该实验研究重力对中子德布罗意波的影响。

图 1a 参照光学干涉仪的画法，给出了这种干涉仪的示意图。中子从 IN 端口进入干涉仪，并沿图示的两条路径传播。中子在两个输出端口 OUT1 或 OUT2 中的一个处被探测到。这两条路径围成一个菱形区域，其面积通常为几  $\text{cm}^2$ 。

中子的德布罗意波（典型波长为  $10^{-10} \text{ m}$ ）相互干涉，使得当干涉仪平面水平时，所有中子都从输出端口 OUT1 射出。但当干涉仪绕入射中子束的轴线倾转角度  $\phi$  时（图 1b），可以观察到中子在两个输出端口 OUT1 和 OUT2 之间的分配随  $\phi$  而变化。

**几何关系** 当  $\phi = 0^\circ$  时，干涉仪平面水平；当  $\phi = 90^\circ$  时，该平面竖直，输出端口位于倾转轴上方。

1.1 (1.0) 干涉仪的两条路径所围成的菱形区域的面积  $A$  是多少?

1.2 (1.0) 输出端口 OUT1 相对于经过倾转轴的水平面的高度  $H$  是多少?

用  $a$ 、 $\theta$  和  $\phi$  表示  $A$  和  $H$ 。

**光程** 光程  $N_{\text{opt}}$  (一个数) 是几何路径长度 (一个距离) 与波长  $\lambda$  的比值。如果  $\lambda$  沿路径变化, 则沿路径对  $\lambda^{-1}$  积分即可得到  $N_{\text{opt}}$ 。

1.3 (3.0) 当干涉仪倾转角度  $\phi$  后, 两条路径的光程差  $\Delta N_{\text{opt}}$  是多少? 用  $a$ 、 $\theta$  和  $\phi$ , 以及中子质量  $M$ 、入射中子的德布罗意波长  $\lambda_0$ 、重力加速度  $g$  和普朗克常量  $h$  表示你的答案。

1.4 (1.0) 引入体积参数

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

并仅用  $A$ 、 $V$ 、 $\lambda_0$  和  $\phi$  表示  $\Delta N_{\text{opt}}$ 。给出当  $M = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、 $g = 9.800 \text{ m s}^{-2}$  且  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$  时  $V$  的值。

1.5 (2.0) 当  $\phi$  从  $\phi = -90^\circ$  增大到  $\phi = 90^\circ$  时, 输出端口 OUT1 的强度完成多少个周期的变化——从高强度到低强度, 再回到高强度?

**实验数据** 某次实际实验所用干涉仪的参数为  $a = 3.600 \text{ cm}$  和  $\theta = 22.10^\circ$ , 观测到了 19.00 个完整周期。

1.6 (1.0) 该实验中的  $\lambda_0$  是多少?

1.7 (1.0) 如果在另一次同类实验中, 使用  $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm}$  的中子, 观测到了 30.00 个完整周期, 那么面积  $A$  应为多少?

提示: 若  $|\alpha x| \ll 1$ , 可用  $1 + \alpha x$  代替  $(1 + x)^\alpha$ 。

题目译自官方英文原文。

## 答案

定义带符号的差值为  $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{lower}} - N_{\text{upper}}$ , 其中两条路径按照图 1a 命名。相位结果保留到重力势能变化的一阶。

- 1.1:  $A = 2a^2 \tan \theta$ .
- 1.2:  $H = 2a \sin \theta \sin \phi$ .
- 1.3:  $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$ .
- 1.4:  $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi$ ,  $V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$ .
- 1.5:  $C = \frac{2A \lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$  个周期。
- 1.6:  $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}$ .
- 1.7:  $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2$ .

## 解答

### 1.1 — 所围成的面积

按照图 1a，将入口分束器标为  $O$ ，上方反射镜标为  $U$ ，下方反射镜标为  $D$ ，出口分束器标为  $R$ 。

菱形的每条边长为

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

水平对角线  $OR$  的长度为  $2a$ ，与之垂直的对角线  $UD$  的长度为  $2a \tan \theta$ 。因此，

$$A = \frac{1}{2}(2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

倾转装置不会改变这一面积。

### 1.2 — OUT1 的高度

入射束与  $OD$  共线，因此倾转轴沿  $OD$  方向。对边  $UR$  与该轴平行。

在干涉仪平面内， $R$  到倾转轴的垂直距离为

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

将该平面旋转  $\phi$  后，这段距离的竖直分量为  $d \sin \phi$ 。因此

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

$U$  和  $R$  的高度均为  $H$ ，而  $O$  和  $D$  的高度仍为零。OUT1 出射束与倾转轴平行，因此保持在高度  $H$  处。当  $\phi$  为负时， $H$  为负。

### 1.3 — 光程差

采用非相对论力学，假设重力场均匀，且中子与静止的理想光学元件之间的相互作用是弹性的。将倾转轴处的重力势能设为零。

入射中子的动量和动能分别为

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

在高度  $z$  处，由能量守恒可得

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

利用德布罗意关系，波长的倒数因此为

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

我们对小比值  $Mg|z|/K_0$  保留到一阶。利用提示可得

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

在这一精度下，我们采用图中所示的直线段。对于固定的端点，微小的重力偏转所引起的额外几何长度是该偏转的二阶量。

两条倾斜线段  $OU$  和  $DR$  的长度均为  $\ell$ ，且它们的高度都以相同方式从 0 变化到  $H$ 。因此它们的光程相等：

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

其余两条线段的高度保持不变： $OD$  的高度为零， $UR$  的高度为  $H$ 。因此，

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

相减得到，

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

由于

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

所求结果为

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.$$

当  $\phi$  为正时，上方路径的光程较小，因为在其抬高的线段上，中子的动量较小，因而波长较长。若将相减顺序反过来，结果的符号也会反转，但不会改变对干涉现象的预测。

#### 1.4 — 体积参数

利用  $A = 2a^2 \tan \theta$  和  $V = h^2/(gM^2)$ ,

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi.$$

$V$  的量纲为

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2}) \text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

代入数值得，

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

因此

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

#### 1.5 — 强度变化的周期数

光程差为一对应于  $2\pi$  的相对相位变化：

$$\delta = 2\pi \Delta N_{\text{opt}}.$$

题目给出当  $\phi = 0$  时 OUT1 处发生相长干涉，这确定了恒定的相位偏移。对于两条理想的等振幅路径，

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left( \pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

当  $\Delta N_{\text{opt}}$  为整数时出现极大值，为半整数时出现极小值。因此， $\Delta N_{\text{opt}}$  每增加一，就产生一个强度变化周期。

当  $\phi$  从  $-90^\circ$  增大到  $90^\circ$  时， $\sin \phi$  从  $-1$  单调增大到  $1$ 。因此，总周期数为

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left( -\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

因此，在同样的一阶精度下，

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2ga^2\lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

## 1.6 — 入射波长

实验中的面积为

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

由周期数公式解出波长，

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

代入  $C = 19.00$ ，并保留未经舍入的中间值，

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

因此

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

上述近似具有充分依据。这些中子的速率为

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

而最大高度为  $H_{\text{max}} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$ 。因此，

$$\frac{MgH_{\text{max}}}{K_0} = \frac{2gH_{\text{max}}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

## 1.7 — 第二次实验的面积

将同一个周期数公式变形，

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

代入  $C = 30.00$  和  $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

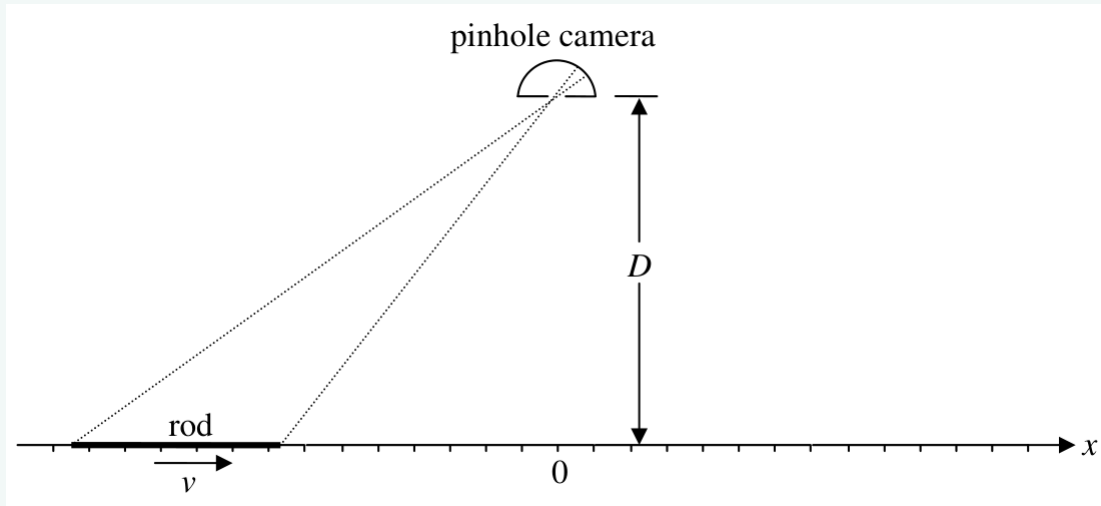
因此

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

解答已与官方解答核对。

## 题目 2：观察运动中的杆

请将所有答案填写在答题纸上。



**物理情境** 一架针孔相机的针孔位于  $x = 0$  处，与  $x$  轴的距离为  $D$ 。相机通过将针孔开启极短的时间来拍摄一根杆。沿  $x$  轴有等间距的刻度，可利用这些刻度从针孔相机拍摄的照片中确定杆在照片上呈现的视长度。在杆静止时拍摄的照片中，杆的长度为  $L$ 。然而，杆并非静止，而是以恒定速度  $v$  沿  $x$  轴运动。

**基本关系** 针孔相机拍摄的一张照片显示，杆上的一个微小线段位于  $\tilde{x}$  处。

**2.1 (0.6)** 拍摄照片的时刻，这一线段的实际位置  $x$  是多少？请用  $\tilde{x}$ 、 $D$ 、 $L$ 、 $v$  和光速  $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  表示答案。如果有助于简化结果，可使用以下物理量：

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{和} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**2.2 (0.9)** 再求出相应的反向关系，即用  $x$ 、 $D$ 、 $L$ 、 $v$  和  $c$  表示  $\tilde{x}$ 。

**注意：** 实际位置是指在相机静止的参考系中的位置。

**杆的视长度** 针孔相机在杆中心的实际位置为某点  $x_0$  的瞬间拍摄一张照片。

**2.3 (1.5)** 用给定的变量确定这张照片中杆的视长度。

**2.4 (1.5)** 在答题纸上勾选一个方框，指出视长度随时间如何变化。

**对称照片** 在针孔相机拍摄的一张照片中，杆的两端到针孔的距离相等。

**2.5 (0.8)** 确定这张照片中杆的视长度。

**2.6 (1.0)** 拍摄这张照片时，杆中点的实际位置在哪里？

**2.7 (1.2)** 照片中杆中点的像位于何处？

**很早和很晚拍摄的照片** 针孔相机在很早的时候拍摄了一张照片，当时杆距离相机很远，正在接近相机；又在很晚的时候拍摄另一张照片，此时杆距离相机很远，正在远离相机。其中一张照片中杆的视长度为 1.00 m，另一张照片中则为 3.00 m。

**2.8 (0.5)** 在答题纸上勾选方框，指出各张照片分别对应哪个长度。

**2.9 (1.0)** 确定速度  $v$ 。

**2.10 (0.6)** 确定杆静止时的长度  $L$ 。

**2.11 (0.4)** 推出对称照片中的视长度。

|     |                                                                                                                                                                       |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.4 | 请选择一项：视长度<br><input type="checkbox"/> 先增大，达到最大值，然后减小。<br><input type="checkbox"/> 先减小，达到最小值，然后增大。<br><input type="checkbox"/> 始终减小。<br><input type="checkbox"/> 始终增大。 | 1.5 |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|     | 很早和很晚拍摄的照片                                                                                                             | 仅供阅卷人员使用 |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 2.8 | 请选择一项：<br><input type="checkbox"/> 较早的照片中视长度为 1 m，较晚的照片中为 3 m。<br><input type="checkbox"/> 较早的照片中视长度为 3 m，较晚的照片中为 1 m。 | 0.5      |

题目译自官方英文原文。

## 答案

使用以下简记：

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

• 2.1

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

• 2.2

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left( x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

• 2.3

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[ \sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

• 2.4 选择第三个方框：视长度始终减小。

• 2.5

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

• 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

• 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta\gamma^2 \left( R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

它位于像的几何中心右侧，偏向杆的前端。

• 2.8 选择第二个方框：较早时为 3.00 m，较晚时为 1.00 m。

• 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

方向沿  $x$  轴正方向。

• 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m}.$$

• 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m}.$$

## 解答

以下始终在相机的静止参考系中讨论，杆沿  $x$  轴正方向运动。曝光时间足够短，因此形成同一张照片的所有光线都在同一时刻  $t$  到达。光以速度  $c$  沿直线传播。

静止的标尺给出了光线发出位置的坐标。因此， $\tilde{x}$  是线段在发光时的位置，而  $x$  是光到达针孔时该线段的位置。

### 2.1

设光在时刻  $t_e$  发出。发光位置到针孔的距离为

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

因此光的传播时间为

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

在这段时间内，线段移动了  $v(t - t_e)$ 。因此

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

得到

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

这一关系只涉及一个线段，与  $L$  无关。

## 2.2

将上式移项并平方，得到

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2(D^2 + \tilde{x}^2),$$

即

$$(1 - \beta^2)\tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2D^2 = 0.$$

这个二次方程的根为

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left( x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

对于正速度，原来未经平方的方程要求  $x - \tilde{x} > 0$ ：从光发出到被接收，线段向前移动。因此应取负号。于是定义

$$\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left( x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

## 2.3

给定的  $L$  是杆的静止长度。因此，根据狭义相对论，在相机参考系中同时测量两端位置所得的杆长为

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

在拍照的瞬间，杆的两端位置为

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

两端的视位置分别为  $f(x_-)$  和  $f(x_+)$ 。由于

$$f'(x) = \gamma^2 \left( 1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

两端的先后次序保持不变，视长度为

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

代入可得

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[ \sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

这一结果同时包含了洛伦兹收缩以及两端发出的光传播时间不同的影响。

## 2.4

对  $f'(x)$  求导：

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

因此， $f'(x)$  随  $x$  严格递减。于是，

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

由于  $dx_0/dt = v > 0$ ,

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

因此, 视长度**始终减小**。选择**第三个方框**。

## 2.5

在对称照片中, 两端的视位置分别为  $-b$  和  $+b$ , 因为它们到针孔的距离相等:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

传播距离相等且到达时刻相同, 意味着发光时刻相同。因此, 发光时两端之间的距离就是同时测量所得的、经过洛伦兹收缩的长度:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

因此  $b = a$ , 并且

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

## 2.6

在两端共同的发光时刻, 两端分别位于  $-a$  和  $+a$ , 因此杆的实际中点位于  $x = 0$ 。

两端发出的光到达针孔所需的时间为

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

在这段时间内, 中点向前移动了  $v\Delta t$ 。因此, 拍照时中点的实际位置为

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

## 2.7

将反向关系应用于杆中点的实际位置:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[ R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

利用  $R^2 = D^2 + a^2$  和  $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$ ,

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

因此

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[ R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

有理化后得到等价表达式

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

对于题述的运动,  $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$ 。因此, 杆的物质中点的像位于像的几何中心与右端点之间。

中点发出的光比两端发出的光传播距离更短, 因此发出得更晚。到这个较晚的发光时刻, 杆的物质中点已经移动到了  $x$  为正的位置。

## 2.8

对于很早和很晚拍摄的照片, 使用远距离极限

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

在较早的照片中, 杆从  $x$  为负的一侧接近相机。式 2.1 变为

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

将此式应用于两端, 得到较早时的视长度

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

在较晚的照片中, 杆朝  $x$  为正的一侧远离相机, 因此

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

并且

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

由于  $\beta > 0$ , 有  $A > B$ 。因此

$$A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.$$

选择第二个方框。

## 2.9

取比值可消去杆长:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

解得

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

因此

$$v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

方向沿  $x$  轴正方向。

## 2.10

将较早和较晚时的视长度相乘, 得到

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

因此

$$L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.$$

2.11

由第 2.5 小题,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

代入  $\beta = 1/2$ ,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

使用未经舍入的静止长度  $L = \sqrt{3} \text{ m}$ ,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

解答已与官方解答核对。

## 题目 3：五个数量级估算：数码相机、煮熟的鸡蛋、闪电、毛细血管、摩天大楼

本题由五个相互独立的部分组成。每一部分都只要求估算数量级，而不要求精确答案。请将所有答案填写在答题纸上。

**数码相机** 考虑一台数码相机，其正方形 CCD 芯片的边长为  $L = 35 \text{ mm}$ ，具有  $N_p = 5 \text{ Mpix}$ （ $1 \text{ Mpix} = 10^6$  个像素）。这台相机的镜头焦距为  $f = 38 \text{ mm}$ 。镜头上常见的一组数字（2、2.8、4、5.6、8、11、16、22）表示所谓的光圈数，记作  $F\#$ ，其定义为焦距与镜头光圈直径  $D$  之比，即  $F\# = f/D$ 。

**3.1 (1.0)** 求受镜头限制时，相机在芯片处能够达到的最佳空间分辨率  $\Delta x_{\text{min}}$ 。用波长  $\lambda$  和光圈数  $F\#$  表示结果，并给出  $\lambda = 500 \text{ nm}$  时的数值。

**3.2 (0.5)** 为匹配这一最佳分辨率，求 CCD 芯片所需的百万像素数  $N$ 。

**3.3 (0.5)** 摄影师有时会尝试使用实际可行的最小光圈拍摄。假设现在有一台  $N_0 = 16 \text{ Mpix}$  的相机，芯片尺寸和焦距均与上述相同。应选择哪个  $F\#$  值，才能使图像质量不受光学系统的限制？

**3.4 (0.5)** 已知人眼的角分辨率约为  $\phi = 2 \text{ arcmin}$ ，而典型照片打印机的打印分辨率至少为  $300 \text{ dpi}$ （每英寸点数）。打印出的纸张与眼睛之间的距离  $z$  至少应为多少，才能看不出单个打印点？

**数据**

|      |                                     |
|------|-------------------------------------|
| 1 英寸 | $= 25.4 \text{ mm}$                 |
| 1 角分 | $= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$ |

**煮熟的鸡蛋** 将一个直接从冰箱中取出、温度为  $T_0 = 4^\circ\text{C}$  的鸡蛋放入一锅水中，水保持在温度  $T_1$  下沸腾。

3.5 (0.5) 使鸡蛋凝固所需的能量  $U$  有多大?

3.6 (0.5) 流入鸡蛋的热流密度  $J$  有多大?

3.7 (0.5) 传入鸡蛋的热功率  $P$  有多大?

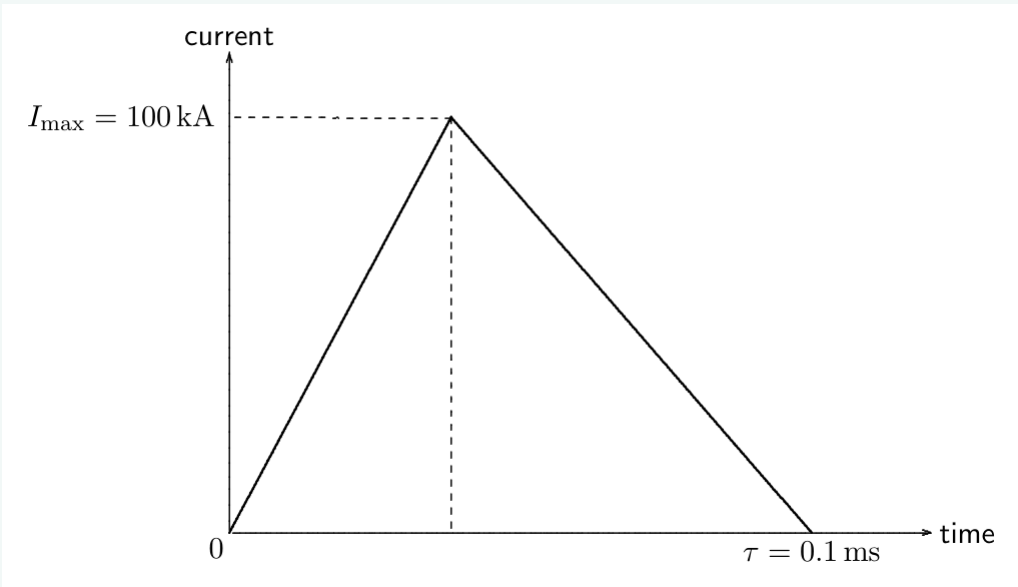
3.8 (0.5) 需要煮多长时间, 才能使鸡蛋完全煮熟?

**提示** 可以使用傅里叶定律的简化形式  $J = \kappa \Delta T / \Delta r$ , 其中  $\Delta T$  是与  $\Delta r$  对应的温差,  $\Delta r$  为本问题的典型长度尺度。热流密度  $J$  的单位为  $\text{W m}^{-2}$ 。

**数据**

|                   |                                                                   |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 鸡蛋的质量密度:          | $\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$                                    |
| 鸡蛋的比热容:           | $C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$                         |
| 鸡蛋的半径:            | $R = 2.5 \text{ cm}$                                              |
| 蛋清 (鸡蛋蛋白质) 的凝固温度: | $T_c = 65^\circ \text{C}$                                         |
| 热导率:              | $\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (假设液态与固态蛋清的热导率相同) |

**闪电** 这里给出一个过度简化的闪电模型。闪电由云中静电荷的积累引起。因此, 云底通常带正电, 云顶带负电, 而云下方的地面带负电。当相应的电场超过空气的击穿场强时, 就会发生击穿放电, 这就是闪电。



闪电期间在云与地面之间流动的理想化电流脉冲。

利用这一简化的电流随时间变化曲线以及下列数据, 回答以下问题:

|               |                                |
|---------------|--------------------------------|
| 云底与地面之间的距离:   | $h = 1 \text{ km};$            |
| 潮湿空气的击穿电场:    | $E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1};$ |
| 每年击中地球的闪电总次数: | $32 \times 10^6;$              |
| 全球总人口:        | $6.5 \times 10^9 \text{ 人}.$   |

3.9 (0.5) 一次闪电释放的总电荷量  $Q$  是多少?

3.10 (0.5) 闪电期间在云底与地面之间流动的平均电流  $I$  是多少?

**3.11 (1.0)** 设想将一年中所有雷暴的能量收集起来，并平均分配给所有人。用你分得的能量，可以让一只 100 W 灯泡连续点亮多长时间？

**毛细血管** 将血液视为不可压缩的黏性流体，其质量密度  $\mu$  与水相近，动力黏度为  $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ 。将血管建模为半径为  $r$ 、长度为  $L$  的圆形直管，并用泊肃叶定律描述血流：

$$\Delta p = RD,$$

它是电学中的欧姆定律在流体力学中的对应形式。这里， $\Delta p$  为血管入口与出口之间的压强差， $D = Sv$  为通过血管横截面积  $S$  的体积流量， $v$  为血流速度。流阻  $R$  为

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

对于体循环（从心脏左心室流向右心房的循环），一个人在静息状态下的血流量为  $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ 。假设所有毛细血管均并联，每条毛细血管的半径为  $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$ 、长度为  $L = 1 \text{ mm}$ ，两端压强差为  $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ ，回答以下问题。

**3.12 (1.0)** 人体中有多少条毛细血管？

**3.13 (0.5)** 血液流过一条毛细血管的速度  $v$  有多大？

**摩天大楼** 在一座 1000 m 高的摩天大楼底部，室外温度为  $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$ 。本部分的目标是估算楼顶的室外温度  $T_{\text{top}}$ 。考虑一薄层空气（视为绝热指数为  $\gamma = 7/5$  的理想氮气）缓慢上升到压强较低的高度  $z$ ，并假设该薄层绝热膨胀，使其温度降至周围空气的温度。

**3.14 (0.5)** 温度的相对变化  $dT/T$  与压强的相对变化  $dp/p$  有何关系？

**3.15 (0.5)** 用高度变化  $dz$  表示压强差  $dp$ 。

**3.16 (1.0)** 由此得到的楼顶温度是多少？

#### 数据

|           |                                             |
|-----------|---------------------------------------------|
| 玻尔兹曼常量：   | $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ |
| 一个氮分子的质量： | $m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$       |
| 重力加速度：    | $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$                 |

题目译自官方英文原文。

## 答案

主要估算采用衍射尺度  $\lambda F\#$ 、 $100^\circ\text{C}$  的沸水，并以  $E_0 h$  作为闪电的特征电压。

- **3.1:**  $\Delta x_{\min} \sim \lambda F\#$ 。在可用的最大光圈  $F\# = 2$  下，结果为  $1.0 \text{ }\mu\text{m}$ 。圆孔的瑞利判据给出的值为  $1.22 \text{ }\mu\text{m}$ 。
- **3.2:**  $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$ ，若计入瑞利系数，则为  $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$ 。
- **3.3:** 采用  $\Delta x \sim \lambda F\#$  时， $F\# = 16$ 。严格按照瑞利判据比较，则得到  $F\# = 11$ 。
- **3.4:**  $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$ 。
- **3.5:**  $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$ 。
- **3.6:**  $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$ 。
- **3.7:**  $P \sim 19 \text{ W}$ 。

- 3.8:  $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$ 。
- 3.9:  $Q = 5 \text{ C}$ 。
- 3.10:  $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$ 。
- 3.11:  $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$ 。完全放电的电容器模型给出的结果约为 10 h。
- 3.12:  $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$  条毛细血管。
- 3.13:  $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$ 。
- 3.14:  $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$ 。
- 3.15:  $dp = -\rho g dz = -\frac{m p g}{k T} dz$ ，其中  $\rho$  为当地空气密度。
- 3.16:  $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}$ 。

## 解答

3.1. 对于理想镜头，光圈处的衍射将可分辨物体之间的角间距限制在以下尺度：

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

对于远处的物体，角间距  $\theta$  对应于焦平面上的间距  $f\theta$ 。因此

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

在  $\lambda = 500 \text{ nm}$  时，

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

最大光圈对应于所列光圈数中的最小值  $F\# = 2$ ，此时分辨率最佳。其直径为  $D = f/2 = 19 \text{ mm}$ ，得到

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \mu\text{m}.$$

对于圆形光圈，瑞利判据给出更具体的表达式

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22\lambda F\#,$$

因此在  $F\# = 2$  时为  $1.22 \mu\text{m}$ 。对于题目要求的数量级估算，这一系数并非关键。

3.2. 对于由间距为  $a$  的正方形像素组成的正方形芯片，像素总数约为  $(L/a)^2$ 。令像素间距与光学分辨率尺度相匹配，得到

$$N_{\text{pixels}} \sim \left( \frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2.$$

因此，

$$N_{\text{pixels}} \sim \left( \frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

以百万像素为单位，

$$N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}.$$

若改用瑞利判据给出的值，则有

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left( \frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix.}$$

两种估算均要求约  $10^3$  Mpix。

3.3. 16 Mpix 芯片的像素间距为

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \text{ } \mu\text{m}.$$

要使光学系统的分辨率不比像素所允许的分辨率更差，需要满足

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

因此

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \text{ } \mu\text{m}}{0.500 \text{ } \mu\text{m}} = 17.5.$$

最小光圈对应于允许的最大光圈数。在可用的档位中，应选

$$\boxed{F\# = 16.}$$

在这一档位下，估算的衍射尺度为  $8.0 \text{ } \mu\text{m}$ ；若采用  $F\# = 22$ ，则为  $11 \text{ } \mu\text{m}$ 。

若保留瑞利系数，并严格要求不等式成立，

$$1.22\lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

此时，所列档位中最大的可选值变为  $F\# = 11$ 。这一离散档位的选择取决于采用的分辨率判据。

3.4. 在 300 dpi 下，相邻打印点的间距为

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

在观察距离为  $z$  时，它们的角间距约为  $d/z$ 。当满足下式时，就无法分辨单个打印点：

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

利用

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

得到

$$\boxed{z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m}.}$$

3.5. 将鸡蛋视为密度和比热容均匀的球体。忽略蛋壳的热学影响，以及凝固过程中的额外焓变，因为题目未提供相关数据。

鸡蛋的质量为

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg}.$$

换算比热容的单位：

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

将鸡蛋从  $T_0$  加热到凝固温度所需的能量可估算为

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

因此

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J},$$

所以

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}.$$

**3.6.** 假设水在通常的大气压下沸腾，因此  $T_1 \approx 100^\circ\text{C}$ 。为了估算特征热流密度，取导热长度为鸡蛋半径，温差为水与鸡蛋之间的初始温差：

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K}.$$

由傅里叶定律得到向内的热流密度大小

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

因此，

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

实际温度梯度会在煮蛋过程中变化；这里给出的是其特征尺度。

**3.7.** 热量通过鸡蛋表面传入，其表面积为

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

因此，

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3)(7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

于是

$$P \sim 19 \text{ W}.$$

**3.8.** 将所需的加热能量除以特征传热功率：

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

结合前面的表达式，也可得到

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

代入数值得

$$t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}.$$

这一估算具有预期的热扩散标度关系  $t \propto R^2$ 。

**3.9.** 转移的电荷量等于电流—时间图线下的面积：

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

脉冲呈三角形，因此其面积与峰值出现的时刻无关：

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

取  $I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$  和  $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$ ,

$$Q = \frac{1}{2}(10^5)(10^{-4}) = 5 \text{ C}.$$

3.10. 脉冲持续时间内的平均电流为

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

因此,

$$I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}.$$

3.11. 将云与地面之间的电场近似视为匀强电场, 则击穿时的电压为

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3)(10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V}.$$

释放的电能为

$$W = \int V(t)I(t) dt.$$

以  $V_0$  作为特征电压, 可得

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

这是每次闪电释放的能量。

因此, 每人每年分得的能量为

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J}.$$

一只 100 W 的灯泡每秒消耗 100 J 的能量, 因此

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}.$$

若将云—地系统建模为一个完全放电的电容器, 其电压会随剩余电荷量的减少而下降。此时释放的能量为

$$W = \frac{1}{2} Q V_0,$$

每人分得的能量可供照明约  $3.7 \times 10^4 \text{ s}$ , 即 10 h。两种模型给出的照明时间均为一天的数量级。

3.12. 以国际单位制表示的有关物理量为

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m}, \\ \Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

泊肃叶定律给出通过一条毛细血管的体积流量:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}.$$

代入得

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi(4 \times 10^{-6})^4(10^3)}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

由于这些相同的毛细血管并联, 每条毛细血管两端的压强差相同, 而体积流量相加:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

因此

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13.  $D = Sv$  中的速度是横截面上的平均速度。因此,

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta L}.$$

代入数值得

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

于是

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. 对于一定量的理想气体, 其准静态绝热膨胀满足

$$pV^\gamma = \text{常量}.$$

取对数微分, 得

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

由理想气体状态方程可知  $T \propto pV$ , 其中  $T$  以开尔文为单位, 因此

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

于是

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

随着空气薄层上升, 压强和温度均降低。

3.15. 对一水平薄层应用流体静力平衡条件, 得到

$$dp = -\rho g dz,$$

其中  $\rho$  为当地的质量密度。

对于分子质量为  $m$  的氮气, 理想气体状态方程给出

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

因此,

$$dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.$$

3.16. 将流体静力平衡下的压强梯度代入绝热温度关系:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz\right).$$

两边乘以  $T$  后, 右侧的温度约去, 得到恒定的温度递减率:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

代入所给常量,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

在  $H = 1000 \text{ m}$  的高度差内, 温度下降约  $9.4 \text{ K}$ 。因此

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

因此,

$$\boxed{T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ\text{C}.}$$

---

解答已与官方解答核对。