

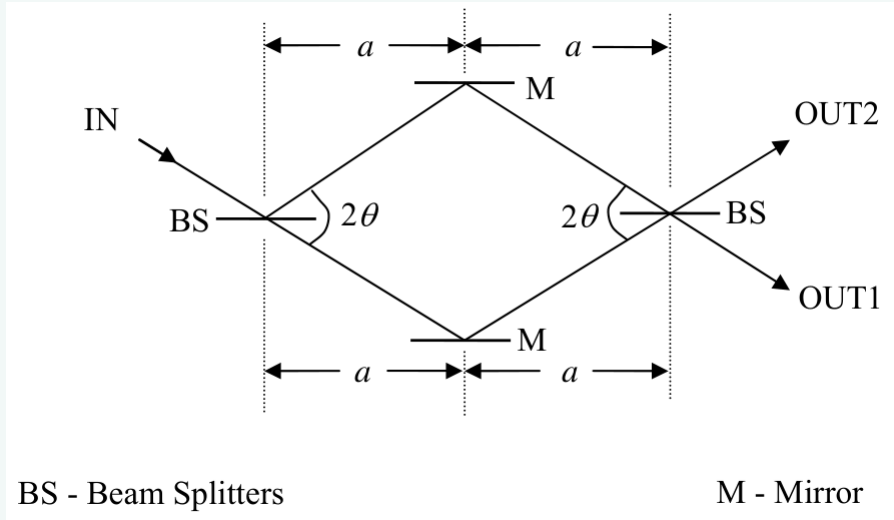
IPhO 2006

Teorik sorular ve çözümler · Singapur · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

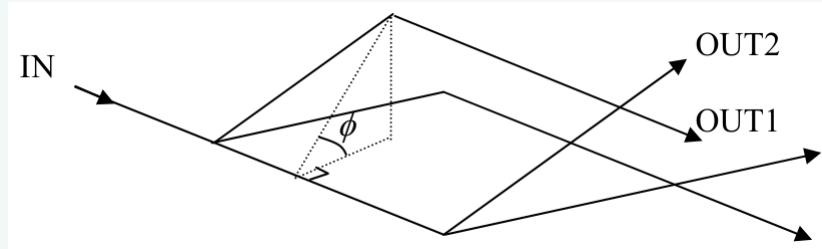
eulersolve.org/ipho/2006/

Soru 1: Bir Nötron İnterferometresinde Kütleçekimi

Tüm cevaplarınızı **Cevap Kâğıdı**na yazınız.



Şekil 1a



Şekil 1b

Fiziksel durum Collela, Overhauser ve Werner'in ünlü nötron interferometresi deneyindeki durumu ele alıyoruz; ancak interferometre içindeki demet ayırıcıların ve aynaların kusursuz olduğunu varsayarak düzeneği idealleştiriyoruz. Deney, kütleçekiminin nötronların de Broglie dalgaları üzerindeki etkisini inceler.

Bu interferometrenin, bir optik interferometreye benzetilerek oluşturulan şematik gösterimi Şekil 1a'da verilmiştir. Nötronlar interferometreye IN girişinden girer ve gösterilen iki yolu izler. Nötronlar, OUT1 veya OUT2 çıkışlarının birinde algılanır. İki yol, alanı tipik olarak birkaç cm^2 olan eşkenar dörtgen biçiminde bir bölgeyi çevreler.

Nötronların de Broglie dalgaları (tipik dalga boyları 10^{-10} m) öyle girişim yapar ki interferometre düzlemi yatay olduğunda tüm nötronlar OUT1 çıkışından çıkar. Ancak interferometre, gelen nötron demetinin eksenini etrafında ϕ açısı kadar eğildiğinde (Şekil 1b), nötronların OUT1 ve OUT2 çıkışları

arasındaki dağılımının ϕ 'ye bağılı olarak değiştiği gözlenir.

Geometri $\phi = 0^\circ$ için interferometre düzlemi yataydır; $\phi = 90^\circ$ için ise düzlem düşeydir ve çıkışlar eğme ekseninin üzerindedir.

1.1 (1.0) İnterferometrenin iki yolunun çevrelediği eşkenar dörtgen biçimindeki bölgenin alanı A ne kadardır?

1.2 (1.0) OUT1 çıkışının, eğme ekseninden geçen yatay düzleme göre yüksekliği H ne kadardır? A ve H 'yi a , θ ve ϕ cinsinden ifade ediniz.

Optik yol uzunluğu Optik yol uzunluğu N_{opt} (bir sayı), geometrik yol uzunluğunun (bir mesafe) dalga boyu λ 'ya oranıdır. λ yol boyunca değişiyorsa, N_{opt} , yol boyunca λ^{-1} 'in integrali alınarak elde edilir.

1.3 (3.0) İnterferometre ϕ açısı kadar eğildiğinde iki yolun optik yol uzunlukları arasındaki fark ΔN_{opt} nedir? Cevabınızı a , θ ve ϕ 'nin yanı sıra nötron kütlesi M , gelen nötronların de Broglie dalga boyu λ_0 , yerçekimi ivmesi g ve Planck sabiti h cinsinden ifade ediniz.

1.4 (1.0) Hacim parametresini

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

olarak tanımlayınız ve ΔN_{opt} 'yi yalnızca A , V , λ_0 ve ϕ cinsinden ifade ediniz.

$M = 1.675 \times 10^{-27}$ kg, $g = 9.800 \text{ m s}^{-2}$ ve $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s için V 'nin değerini belirtiniz.

1.5 (2.0) ϕ , $\phi = -90^\circ$ 'den $\phi = 90^\circ$ 'ye artırıldığında OUT1 çıkışında kaç döngü — yüksek şiddetten düşük şiddete ve tekrar yüksek şiddete — tamamlanır?

DeneySEL veriler Gerçek bir deneyde kullanılan interferometrenin parametreleri $a = 3.600 \text{ cm}$ ve $\theta = 22.10^\circ$ idi ve 19.00 tam döngü gözlemlendi.

1.6 (1.0) Bu deneyde λ_0 ne kadardı?

1.7 (1.0) Aynı türden başka bir deneyde, $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm}$ dalga boyuna sahip nötronlar kullanılarak 30.00 tam döngü gözlemlenseydi, A alanı ne kadar olurdu?

İpucu: $|\alpha x| \ll 1$ ise, $(1 + x)^\alpha$ yerine $1 + \alpha x$ kullanılabilir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Yolları Şekil 1a'ya göre adlandırarak işaretli farkı $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{lower}} - N_{\text{upper}}$ olarak tanımlayalım. Fazla ilgili sonuçlarda, kütleçekimi potansiyel enerjisindeki değişimin birinci mertebesine kadar olan terimler tutulmuştur.

- **1.1:** $A = 2a^2 \tan \theta$.
- **1.2:** $H = 2a \sin \theta \sin \phi$.
- **1.3:** $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$.

- **1.4:** $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi$, $V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.
- **1.5:** $C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$ döngü.
- **1.6:** $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}$.
- **1.7:** $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2$.

Çözüm

1.1 — Çevrelenen alan

Şekil 1a'ya göre giriş demet ayırıcısını O , üst aynayı U , alt aynayı D ve çıkış demet ayırıcısını R ile gösterelim.

Eşkenar dörtgenin her bir kenarının uzunluğu

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Yatay köşegen OR 'nin uzunluğu $2a$, ona dik köşegen UD 'nin uzunluğu ise $2a \tan \theta$ 'dir. Dolayısıyla,

$$A = \frac{1}{2}(2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

Düzeneğin eğilmesi bu alanı değiştirmez.

1.2 — OUT1'in yüksekliği

Gelen demet OD ile aynı doğru üzerindedir; dolayısıyla eğme eksenini OD boyunca uzanır. Karşı kenar UR bu eksene paraleldir.

İnterferometre düzlemi içinde R 'den eğme eksenine olan dik uzaklık

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

Düzlem ϕ açısı kadar döndürüldüğünde bu uzaklığın düşey bileşeni $d \sin \phi$ olur. Böylece

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

Hem U hem de R , H yüksekliğindedir; O ve D ise sıfır yüksekliğinde kalır. OUT1 demeti eğme eksenine paralel olduğundan H yüksekliğinde kalır. Negatif ϕ için H negatiftir.

1.3 — Optik yol uzunlukları arasındaki fark

Görelili olmayan mekaniği, düzgün bir kütleçekim alanını ve durağan ideal optik elemanlarla esnek etkileşimleri kullanalım. Eğme eksenini üzerinde kütleçekimi potansiyel enerjisini sıfır alalım.

Gelen nötronların momentumu ve kinetik enerjisi

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

z yüksekliğinde enerjinin korunumu şu bağıntıyı verir:

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

Dolayısıyla, de Broglie bağıntısını kullanarak dalga boyunun tersini şöyle buluruz:

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

Küçük $Mg|z|/K_0$ oranında birinci mertebeye kadar olan terimleri tutuyoruz. Bu durumda ipucundan

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

elde edilir. Bu doğruluk düzeyinde, şekilde gösterilen doğru parçalarını kullanıyoruz. Uç noktalar sabitken, kütleçekiminin yol açtığı küçük bir sapmanın oluşturduğu ek geometrik uzunluk, bu sapmaya göre ikinci mertebededir.

İki eğik parça OU ve DR 'nin her ikisinin de uzunluğu ℓ 'dir ve yükseklikleri 0'dan H 'ye aynı biçimde değişir. Bu nedenle optik yol uzunlukları eşittir:

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

Geriye kalan parçalar sabit yüksekliklerdedir: OD sıfır yüksekliğinde, UR ise H yüksekliğindedir. Sonuç olarak,

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

Farklarını alırsak,

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

Şu eşitlik geçerli olduğundan,

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

istenen sonuç

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.$$

Pozitif ϕ için üst yolun optik uzunluğu daha küçüktür; çünkü yüksekteki parçasında nötron momentumu daha küçük, dolayısıyla dalga boyu daha büyüktür. Çıkarma sırasının ters seçilmesi, girişime ilişkin öngörülerini değiştirmeden işareti tersine çevirir.

1.4 — Hacim parametresi

$A = 2a^2 \tan \theta$ ve $V = h^2/(gM^2)$ kullanılırsa,

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi.$$

V 'nin boyutu

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2})\text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

Sayısal olarak,

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

Böylece

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

1.5 — Şiddet döngülerinin sayısı

Optik yol farkının bir olması, bağıl fazda 2π 'lik bir değişime karşılık gelir:

$$\delta = 2\pi \Delta N_{\text{opt}}.$$

$\phi = 0$ iken OUT1'de yapıcı girişim gerçekleştiğine ilişkin verilen bilgi, sabit faz kaymasını belirler. İdeal, eşit genlikli yollar için,

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left(\pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

Maksimumlar, ΔN_{opt} 'nin tam sayı değerlerinde; minimumlar ise yarım tam sayı değerlerinde oluşur. Dolayısıyla ΔN_{opt} 'deki her bir birimlik artış, bir şiddet döngüsü oluşturur.

ϕ , -90° 'den 90° 'ye artarken $\sin \phi$, -1 'den 1 'e monoton olarak artar. Bu nedenle toplam döngü sayısı

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left(-\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, aynı birinci merteye doğruluğunda,

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

1.6 — Gelen nötronların dalga boyu

Deneydeki alan

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Döngü formülünü dalga boyu için çözersek,

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

$C = 19.00$ kullanıp ara değerleri yuvarlamadan koruyarak,

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Böylece

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

Yukarıda kullanılan yaklaşım oldukça geçerlidir. Bu nötronların sürati

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

ve en büyük yükseklik $H_{\max} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\frac{MgH_{\max}}{K_0} = \frac{2gH_{\max}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

1.7 — İkinci deney için alan

Aynı döngü formülünü yeniden düzenlersek,

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

$C = 30.00$ ve $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$ ile,

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

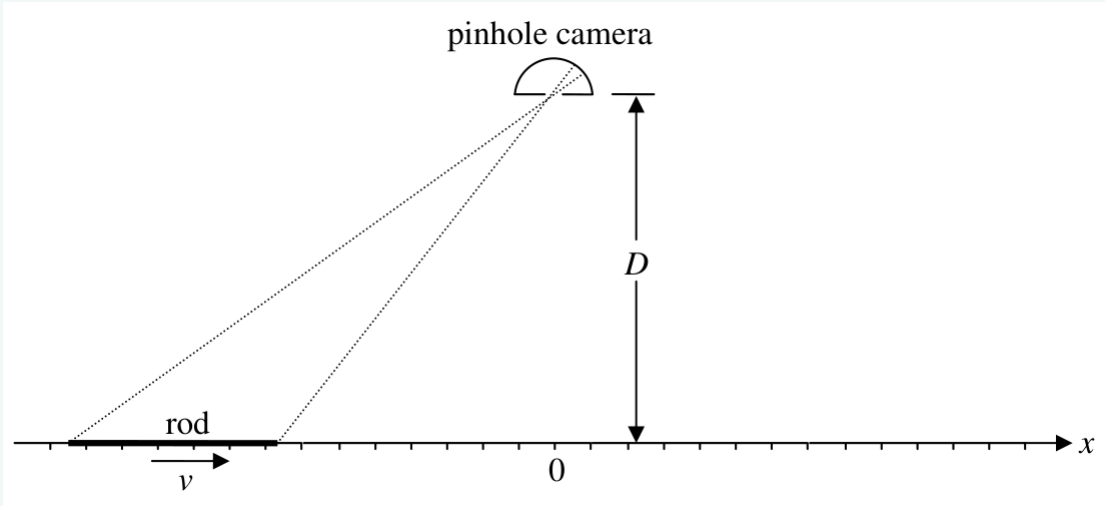
Böylece

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Hareket Hâlindeki Bir Çubuğu İzlemek

Tüm cevaplarınızı **Cevap Kâğıdı**na yazınız.



Fiziksel durum İğne deliği $x = 0$ konumunda ve x ekseninden D uzaklıkta bulunan bir iğne deliği kamerası, deliği çok kısa bir süre açarak bir çubuğun fotoğraflarını çekmektedir. x eksenı boyunca eşit aralıklarla yerleştirilmiş işaretler vardır; bu işaretler yardımıyla, iğne deliği kamerasının çektiği fotoğraflardan çubuğun fotoğrafta görülen *görünür uzunluğu* belirlenebilir. Çubuğun *durgun hâldeyken* çekilmiş bir fotoğrafında uzunluğu L 'dir. Ancak çubuk durgun *değildir*; x eksenı boyunca sabit v hızıyla hareket etmektedir.

Temel bağıntılar İğne deliği kamerasıyla çekilen bir fotoğrafta, çubuğun çok küçük bir parçası $\tilde{x}$ konumunda görülmektedir.

2.1 (0.6) Fotoğrafın çekildiği anda bu parçanın *gerçek konumu* x nedir? Cevabınızı $\tilde{x}$, D , L , v ve ışık hızı $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ cinsinden ifade ediniz. Sonucunuzu sadeleştirmeye yardımcı oluyorsa

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

niceliklerini kullanınız.

2.2 (0.9) Buna karşılık gelen ters bağıntıyı da bulunuz; yani $\tilde{x}$ 'i x , D , L , v ve c cinsinden ifade ediniz.

Not: *Gerçek konum*, kameranın durgun olduğu referans sistemindeki konumdur

Çubuğun görünür uzunluğu iğne deliği kamerası, çubuğun merkezinin gerçek konumunun bir x_0 noktasında olduğu anda bir fotoğraf çekmektedir.

2.3 (1.5) Verilen değişkenler cinsinden, çubuğun bu fotoğraftaki görünür uzunluğunu belirleyiniz.

2.4 (1.5) Görünür uzunluğun zamanla nasıl değiştiğini belirtmek için **Cevap Kâğıdındaki** kutulardan birini işaretleyiniz.

Simetrik fotoğraf iğne deliği kamerasıyla çekilen bir fotoğrafta, çubuğun her iki ucu da iğne deliğinden aynı uzaklıkta görülmektedir.

2.5 (0.8) Çubuğun bu fotoğraftaki görünür uzunluğunu belirleyiniz.

2.6 (1.0) Bu fotoğrafın çekildiği anda çubuğun orta noktasının gerçek konumu nedir?

2.7 (1.2) Fotoğrafta çubuğun orta noktasının görüntüsü nerede görülür?

Çok erken ve çok geç çekilen fotoğraflar iğne deliği kamerası, çubuk çok uzaktayken ve yaklaşırken çok erken bir anda bir fotoğraf çekmiştir; çubuk çok uzaktayken ve uzaklaşırken çok geç bir anda da başka bir fotoğraf çekmektedir. Fotoğraflardan birinde görünür uzunluk 1.00 m, diğesinde ise 3.00 m'dir.

2.8 (0.5) Hangi fotoğrafta hangi uzunluğun görüldüğünü belirtmek için **Cevap Kâğıdındaki** kutuyu işaretleyiniz.

2.9 (1.0) v hızını belirleyiniz.

2.10 (0.6) Çubuğun durgun hâldeki L uzunluğunu belirleyiniz.

2.11 (0.4) Simetrik fotoğraftaki görünür uzunluğu çıkarınız.

2.4	Birini işaretleyiniz: Görünür uzunluk ☐ önce artar, en büyük değerine ulaşır, sonra azalır. ☐ önce azalır, en küçük değerine ulaşır, sonra artar. ☐ sürekli azalır. ☐ sürekli artar.	1.5
------------	--	------------

	Çok erken ve çok geç çekilen fotoğraflar	Yalnızca Değerlendiricilerin Kullanımı İçindir
2.8	Birini işaretleyiniz: ☐ Görünür uzunluk erken çekilen fotoğrafta 1 m, geç çekilen fotoğrafta 3 m'dir.	0.5

Çok erken ve çok geç çekilen fotoğraflar**Yalnızca Değerlendiricilerin
Kullanımı İçindir**

- ☐ Görünür uzunluk erken çekilen fotoğrafta 3 m, geç çekilen fotoğrafta 1 m'dir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Şu kısaltmaları kullanınız:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

• 2.1

$$x = \tilde{x} + \beta\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

• 2.2

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x - \beta\sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

• 2.3

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta\gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

• 2.4 Üçüncü kutuyu seçiniz: görünür uzunluk **sürekli azalır**.

• 2.5

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

• 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta\sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

• 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta\gamma^2 \left(R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Görüntünün geometrik merkezinin sağında, öndeki uca doğru yer alır.

• 2.8 İkinci kutuyu seçiniz: **erken çekilen fotoğrafta 3.00 m, geç çekilen fotoğrafta 1.00 m.**

• 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

ve yönü pozitif x yönüdür.

• 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m.}$$

• 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m.}$$

Çözüm

Çözümün tamamında, çubuğun pozitif x yönünde hareket ettiği, kameranın durgun olduğu referans sisteminde çalışalım. Pozlama süresi, bir fotoğrafı oluşturan tüm ışığın aynı t anında ulaşmasını sağlayacak kadar kısadır. Işık, doğrusal yollar boyunca c hızıyla yayılır.

Durgun ölçek, bir ışının yayıldığı koordinatı belirler. Dolayısıyla $\tilde{x}$, parçanın ışığı yaydığı andaki konumu; x ise ışığın iğne deliğine ulaştığı andaki konumudur.

2.1

Işığın t_e anında yayıldığını varsayalım. İğne deliğine olan uzaklığı

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

olduğundan, yolculuk süresi

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

Bu süre içinde parça $v(t - t_e)$ kadar yer değiştirir. Dolayısıyla

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

buradan

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

Bu bağıntı tek bir parçayla ilgilidir ve L 'den bağımsızdır.

2.2

Önceki sonucu yeniden düzenleyip karesini alırsak

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2 (D^2 + \tilde{x}^2),$$

ya da

$$(1 - \beta^2) \tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2 D^2 = 0.$$

İkinci dereceden denklemin kökleri

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

Pozitif hız için, karesi alınmamış başlangıç denklemi $x - \tilde{x} > 0$ olmasını gerektirir: parça, ışığın yayılması ile alınması arasında ilerler. Bu koşul eksi işaretini seçtirir. Böylece şu tanımı yapalım:

$$\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

2.3

Verilen L , çubuğun durgun uzunluğudur. Dolayısıyla özel göreliliğe göre, kamera referans sisteminde eşzamanlı olarak ölçülen uzunluğu

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

Fotoğrafın çekildiği anda uçlarının konumları

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

Uçların görünür konumları $f(x_-)$ ve $f(x_+)$ 'dir.

$$f'(x) = \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

olduğundan uçların sıralaması korunur ve görünür uzunluk

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

Yerine koyarsak

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Bu ifade hem Lorentz büzülmesini hem de uçlardan gelen ışığın farklı yolculuk sürelerini içerir.

2.4

$f'(x)$ 'in türevini alalım:

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

Dolayısıyla $f'(x)$, x arttıkça kesin olarak azalır. Bunun sonucunda,

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

$dx_0/dt = v > 0$ olduğundan,

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

Bu nedenle görünür uzunluk **sürekli azalır**. **Üçüncü kutuyu** seçiniz.

2.5

Simetrik fotoğrafta, iki ucun görünür konumları $-b$ ve $+b$ 'dir; çünkü iğne deliğine olan uzaklıkları eşittir:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

Yolculuk mesafelerinin eşit ve varış anının ortak olması, yayılma anlarının eşit olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla yayılma anında uçlar arasındaki uzaklık, eşzamanlı olarak ölçülen, Lorentz büzülmesine uğramış uzunluktur:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

Böylece $b = a$ olur ve

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

2.6

Uçların ortak ışık yayma anında, uçlar $-a$ ve $+a$ konumlarındadır; dolayısıyla çubuğun gerçek orta noktası $x = 0$ konumundadır.

Uçlardan gelen ışığın iğne deliğine ulaşması için geçen süre

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

kadardır. Bu süre içinde orta nokta $v\Delta t$ kadar ilerler. Dolayısıyla fotoğrafın çekildiği andaki gerçek konumu

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

2.7

Ters bağıntıyı çubuğun orta noktasının gerçek konumuna uygulayalım:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

$R^2 = D^2 + a^2$ ve $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$ bağıntılarını kullanırsak,

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

Böylece

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

Eşleniğiyle çarparak şu eşdeğer ifadeyi elde ederiz:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Belirtilen hareket için $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$ olur. Dolayısıyla çubuğun maddesel orta noktası, görüntünün geometrik merkezi ile sağ ucu arasında görünür.

Orta noktadan gelen ışık, uçlardan gelen ışığa göre daha kısa bir mesafe katettiği için daha geç yayılır. Bu daha geç yayılma anına gelindiğinde, çubuğun maddesel orta noktası pozitif x konumuna ilerlemiştir.

2.8

Çok erken ve çok geç çekilen fotoğraflar için, büyük uzaklık limitini kullanalım:

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

Erken çekilen fotoğrafta çubuk, negatif x tarafından yaklaşmaktadır. Denklem 2.1 şu hâle gelir:

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

Bunu her iki uca uygulayarak erken çekilen fotoğraftaki görünür uzunluğu elde ederiz:

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

Geç çekilen fotoğrafta çubuk pozitif x yönünde uzaklaşmaktadır; dolayısıyla

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

ve

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

$\beta > 0$ olduğundan $A > B$ 'dir. Bu nedenle

$$\boxed{A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.}$$

İkinci kutuyu seçiniz.

2.9

Oran alındığında çubuğun uzunluğu elenir:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Çözersek,

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

Böylece

$$\boxed{v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},}$$

ve yönü pozitif x yönüdür.

2.10

Erken ve geç çekilen fotoğraflardaki görünür uzunlukları çarparsak

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.}$$

2.11

2.5 kısmından,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

$\beta = 1/2$ için,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Yuvarlanmamış durgun uzunluk $L = \sqrt{3}$ m kullanılarak,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Beş büyüklük mertebesi tahmini: Dijital Fotoğraf Makinesi, Katı Pişmiş Yumurta, Yıldırım, Kılcal Damarlar, Gökdelen

Bu soru birbirinden bağımsız beş bölümden oluşmaktadır. Her bölümde kesin bir cevap değil, yalnızca bir büyüklük mertebesi tahmini istenmektedir. Tüm cevaplarınızı **Cevap Kâğıdına** yazınız.

Dijital Fotoğraf Makinesi Kenar uzunluğu $L = 35$ mm olan, $N_p = 5$ Mpix (1 Mpix = 10^6 piksel) içeren kare bir CCD yongasına sahip bir dijital fotoğraf makinesi düşününüz. Bu makinenin objektifinin odak uzaklığı $f = 38$ mm'dir. Objektifin üzerinde yer alan, iyi bilinen (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) sayı dizisi, F sayısı olarak adlandırılan niceliği belirtir. Bu nicelik $F\#$ ile gösterilir ve odak uzaklığının objektif açıklığının D çapına oranı olarak tanımlanır: $F\# = f/D$.

3.1 (1.0) Fotoğraf makinesinin, objektifin sınırladığı, yonga üzerindeki mümkün olan en iyi uzaysal çözünürlüğünü $\Delta x_{\min}$ bulunuz. Sonucunuzu dalga boyu λ ve F sayısı $F\#$ cinsinden ifade ediniz ve $\lambda = 500$ nm için sayısal değerini veriniz.

3.2 (0.5) CCD yongasının bu en iyi çözünürlüğe uyum sağlaması için sahip olması gereken Mpix sayısı N 'yi bulunuz.

3.3 (0.5) Fotoğrafçılar bazen bir fotoğraf makinesini kullanılabilir en küçük açıklıkta kullanmaya çalışırlar. Şimdi, yonga boyutu ve odak uzaklığı yukarıda verilenlerle aynı olan, $N_0 = 16$ Mpix'lik bir fotoğraf makinemiz olduğunu varsayınız. Görüntü kalitesinin optik sistem tarafından sınırlanmaması için $F\#$ 'nin hangi değeri seçilmelidir?

3.4 (0.5) İnsan gözünün yaklaşık açısal çözünürlüğünün $\phi = 2$ arcmin olduğunu ve tipik bir fotoğraf yazıcısının en az 300 dpi (inç başına nokta) ile baskı yaptığını bilerek, tek tek noktaları görmemek için basılı sayfayı gözlerinizden en az ne kadar z uzaklığında tutmanız gerektiğini bulunuz.

Veriler

1 inç	= 25.4 mm
1 yay dakikası	= 2.91×10^{-4} rad

Katı pişmiş yumurta $T_0 = 4^\circ\text{C}$ sıcaklığındaki buzdolabından doğrudan alınan bir yumurta, içindeki su T_1 sıcaklığında kaynar durumda tutulan bir tencereye bırakılır.

3.5 (0.5) Yumurtanın pıhtılaşması için gereken enerji miktarı U ne kadardır?

3.6 (0.5) Yumurtanın içine doğru akan ısı akısı J ne kadardır?

3.7 (0.5) Yumurtaya aktarılan ısı güç P ne kadardır?

3.8 (0.5) Yumurtanın katı pişmiş olması için onu ne kadar süre pişirmeniz gerekir?

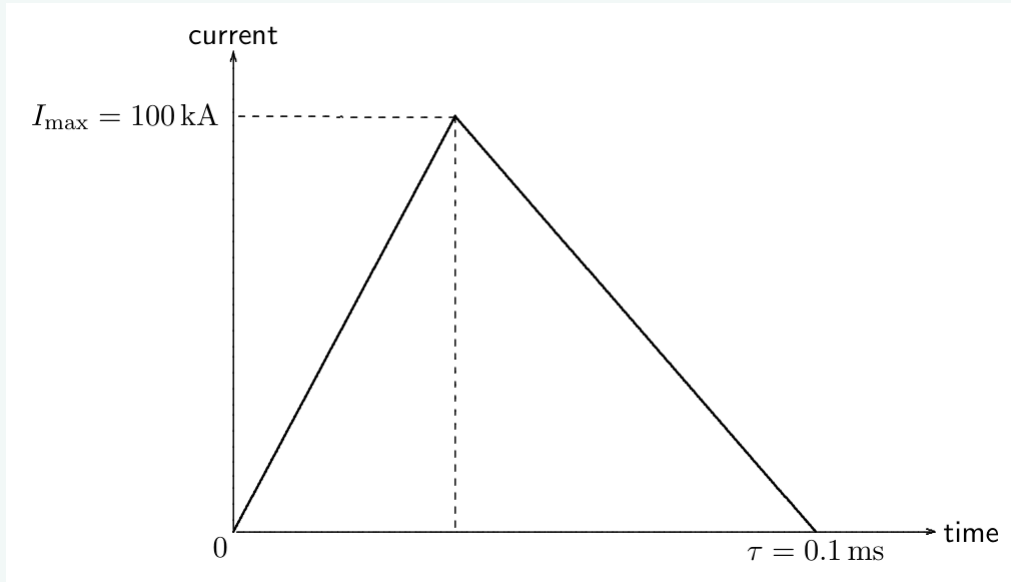
İpucu Fourier yasasının basitleştirilmiş biçimi olan $J = \kappa \Delta T / \Delta r$ bağıntısını kullanabilirsiniz.

Burada ΔT , problemin karakteristik uzunluk ölçeği Δr boyunca oluşan sıcaklık farkıdır. Isı akısı J 'nin birimi W m^{-2} 'dir.

Veriler

Yumurtanın kütle yoğunluğu:	$\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Yumurtanın özgül ısı kapasitesi:	$C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$
Yumurtanın yarıçapı:	$R = 2.5 \text{ cm}$
Albüminin (yumurta proteininin) pıhtılaşma sıcaklığı:	$T_c = 65^\circ \text{C}$
Isıl iletkenlik katsayısı:	$\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (sıvı ve katı albümin için aynı olduğu varsayılmaktadır)

Yıldırım Yıldırım için oldukça basitleştirilmiş bir model sunulmaktadır. Yıldırım, bulutlarda elektrostatik yük birikmesinden kaynaklanır. Bunun sonucunda bulutun alt kısmı genellikle pozitif, üst kısmı negatif yüklenir ve bulutun altındaki yer yüzeyi negatif yüklenir. Buna karşılık gelen elektrik alan, havanın delinme dayanımını aştığında bir elektriksel boşalma meydana gelir: bu, yıldırımdır.



Yıldırım sırasında bulut ile yer arasında akan idealleştirilmiş akım darbesi.

Akımın zamana bağlı değişimini gösteren bu basitleştirilmiş eğriden ve aşağıdaki verilerden yararlanarak soruları cevaplayınız:

Bulutun alt kısmı ile yer arasındaki uzaklık:	$h = 1 \text{ km};$
Nemli havanın delinme elektrik alanı:	$E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1};$
Bir yılda Dünya'ya düşen toplam yıldırım sayısı:	$32 \times 10^6;$

Toplam insan nüfusu:

6.5×10^9 kişi.

3.9 (0.5) Yıldırımla boşalan toplam yük Q ne kadardır?

3.10 (0.5) Yıldırım sırasında bulutun alt kısmı ile yer arasında akan ortalama akım I ne kadardır?

3.11 (1.0) Bir yıl boyunca meydana gelen tüm fırtınaların enerjisinin toplandığını ve tüm insanlar arasında eşit olarak paylaştırıldığını düşününüz. Payınıza düşen enerjiyle 100 W'lık bir ampulü kesintisiz olarak ne kadar süre yakabilirsiniz?

Kılcal Damarlar Kanı, kütle yoğunluğu μ suyunkine benzer ve dinamik viskozitesi $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ olan sıkıştırılmaz, viskoz bir akışkan olarak ele alalım. Kan damarlarını yarıçapı r , uzunluğu L olan dairesel kesitli düz borular olarak modelleyelim ve kan akışını Poiseuille yasasıyla ifade edelim:

$$\Delta p = RD,$$

Bu yasa, elektrikteki Ohm yasasının akışkanlar dinamiğindeki karşılığıdır. Burada Δp , kan damarının girişi ile çıkışı arasındaki basınç farkı; $D = Sv$, kan damarının S kesit alanından geçen hacimsel debi ve v , kanın hızıdır. Hidrolik direnç R şu şekilde verilir:

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

Büyük kan dolaşımında (kalbin sol karıncığından sağ kulakçığına doğru olan dolaşımda), dinlenme hâlindeki bir erkekte kanın hacimsel debisi $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ 'dir. Tüm kılcal damarların paralel bağlı olduğunu, her birinin yarıçapının $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$, uzunluğunun $L = 1 \text{ mm}$ olduğunu ve $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ basınç farkı altında çalıştığını varsayarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

3.12 (1.0) İnsan vücudunda kaç kılcal damar vardır?

3.13 (0.5) Kanın bir kılcal damardan akış hızı v ne kadardır?

Gökdelen 1000 m yüksekliğindeki bir gökdelenin tabanında dış ortam sıcaklığı $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$ 'dir. Amaç, tepedeki dış ortam sıcaklığı T_{top} 'ı tahmin etmektir. Basıncın daha düşük olduğu z yüksekliğine yavaşça yükselen ince bir hava tabakasını (adyabatik katsayısı $\gamma = 7/5$ olan ideal azot gazı) ele alınız ve bu tabakanın, sıcaklığı çevresindeki havanın sıcaklığına düşecek şekilde adyabatik olarak genleştiğini varsayınız.

3.14 (0.5) Sıcaklığın bağıl değişimi dT/T ile basıncın bağıl değişimi dp/p arasındaki ilişki nedir?

3.15 (0.5) Basınç farkı dp 'yi yükseklik değişimi dz cinsinden ifade ediniz.

3.16 (1.0) Binanın tepesinde elde edilen sıcaklık nedir?

Veriler

Boltzmann sabiti:	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Bir azot molekülünün kütlesi:	$m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$
Yerçekimi ivmesi:	$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Temel tahminlerde kırınım ölçeği olarak $\lambda F\#$, kaynayan suyun sıcaklığı olarak 100°C ve yıldırımın karakteristik gerilimi olarak $E_0 h$ kullanılmıştır.

- **3.1:** $\Delta x_{\min} \sim \lambda F\#$. Kullanılabilir en büyük açıklıkta, $F\# = 2$ için, bu değer $1.0 \mu\text{m}$ 'dir. Dairesel açıklık için Rayleigh değeri $1.22 \mu\text{m}$ 'dir.
- **3.2:** $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$; Rayleigh katsayısıyla ise $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$.
- **3.3:** $\Delta x \sim \lambda F\#$ kullanıldığında $F\# = 16$. Rayleigh ölçütüne kesin olarak uyulan bir karşılaştırma $F\# = 11$ verir.
- **3.4:** $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$.
- **3.5:** $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$.
- **3.6:** $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$.
- **3.7:** $P \sim 19 \text{ W}$.
- **3.8:** $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$.
- **3.9:** $Q = 5 \text{ C}$.
- **3.10:** $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$.
- **3.11:** $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$. Tamamen boşalan bir kondansatör modeli yaklaşık 10 h verir.
- **3.12:** $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$ kılcal damar.
- **3.13:** $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$.
- **3.14:** $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$.
- **3.15:** $dp = -\rho g dz = -\frac{m p g}{k T} dz$; burada ρ , yerel hava yoğunluğudur.
- **3.16:** $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ\text{C}$.

Çözüm

3.1. İdeal bir mercek için açıklıkta meydana gelen kırınım, ayırt edilebilir cisimlerin açısal ayrımını şu ölçekle sınırlar:

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Uzak cisimler için θ açısal ayrımı, odak düzleminde $f\theta$ uzaklığına karşılık gelir. Dolayısıyla

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

$\lambda = 500 \text{ nm}$ için,

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

En iyi çözünürlük, listelenen en küçük F sayısı olan $F\# = 2$ 'ye karşılık gelen en büyük açıklıkta elde edilir. Bu açıklığın çapı $D = f/2 = 19 \text{ mm}$ 'dir ve buradan

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \mu\text{m}.$$

Dairesel bir açıklık için Rayleigh ölçütü daha kesin olan şu ifadeyi verir:

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22\lambda F\#,$$

Dolayısıyla $F\# = 2$ için $1.22 \mu\text{m}$ elde edilir. İstenen büyüklük mertebesi tahmini için bu katsayı önemli değildir.

3.2. Piksel aralığı a olan kare piksellerden oluşan kare bir yonga için toplam piksel sayısı yaklaşık $(L/a)^2$ 'dir. Piksel aralığı optik çözünürlük ölçeğine eşitlendiğinde

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2.$$

Böylece,

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

Megapiksel cinsinden,

$$N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}.$$

Bunun yerine Rayleigh değeri kullanılırsa

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}.$$

Her iki tahmin de yaklaşık 10^3 Mpix gerektirir.

3.3. 16 Mpix'lik yonganın piksel aralığı

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \mu\text{m}.$$

Optik sistemin piksellerden daha kaba bir çözünürlük sınırı getirmemesi için şu koşul sağlanmalıdır:

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

Dolayısıyla

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \mu\text{m}}{0.500 \mu\text{m}} = 17.5.$$

En küçük açıklık, izin verilen en büyük F sayısına karşılık gelir. Kullanılabilir ayarlar arasında bu koşul

$$F\# = 16.$$

Bu ayarda tahmini kırınım ölçeği $8.0 \mu\text{m}$ 'dir; $F\# = 22$ için ise $11 \mu\text{m}$ olurdu.

Rayleigh katsayısı korunur ve eşitsizlik kesin olarak uygulanırsa,

$$1.22\lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

Bu durumda listelenen en büyük ayar $F\# = 11$ olur. Bu ayırık seçim, kullanılan çözünürlük tanımına bağlıdır.

3.4. 300 dpi'da, basılan komşu noktalar arasındaki uzaklık

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

z bakış uzaklığında bu noktaların açısal ayrımı yaklaşık d/z 'dir. Şu koşul sağlandığında noktalar tek tek ayırt edilemez:

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

Şu değeri kullanarak

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad,}$$

şunu elde ederiz:

$$z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m.}$$

3.5. Yumurtayı yoğunluğu ve özgül ısı kapasitesi her yerde aynı olan bir küre olarak ele alalım. Kabuğun ısı etkilerini ve hakkında veri verilmeyen ek pıhtılaşma entalpisini ihmal edelim.

Yumurtanın kütlesi

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg.}$$

Özgül ısı kapasitesinin birimini dönüştürelim:

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Yumurtanın sıcaklığını T_0 'dan pıhtılaşma sıcaklığına yükseltmek için gereken enerji şöyle tahmin edilir:

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

Buradan

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J,}$$

dolayısıyla

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J.}$$

3.6. Kaynamanın normal atmosfer basıncında gerçekleştiğini varsayalım; böylece $T_1 \approx 100^\circ\text{C}$ olur.

Karakteristik bir ısı akısı için iletim uzunluğunu yumurtanın yarıçapı, sıcaklık farkını ise başlangıçta su ile yumurta arasındaki fark olarak alalım:

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K.}$$

Bu durumda Fourier yasası, içeriye yönelen ısı akısının büyüklüğünü verir:

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

Böylece,

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Gerçek sıcaklık gradyanı pişirme sırasında değişir; burada hesaplanan, onun karakteristik ölçeğidir.

3.7. Isı, yumurtanın yüzeyinden içeri girer. Bu yüzeyin alanı

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Bunun sonucunda,

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3) (7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{P \sim 19 \text{ W}.}$$

3.8. Isıtma için gereken enerjiyi karakteristik ısı aktarım gücüne bölelim:

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

Önceki ifadeler birleştirilerek şu sonuç da elde edilir:

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Sayısal olarak,

$$\boxed{t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}.}$$

Bu tahmin, ısı yayılımı için beklenen $t \propto R^2$ ölçeklenmesine sahiptir.

3.9. Aktarılan yük, akım–zaman grafiğinin altında kalan alandır:

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

Darbe üçgen biçimindedir; dolayısıyla alanı, tepe değerine ne zaman ulaşıldığından bağımsızdır:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

$I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$ ve $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$ ile,

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}(10^5)(10^{-4}) = 5 \text{ C}.}$$

3.10. Darbe süresi boyunca ortalama akım

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

Böylece,

$$\boxed{I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}.}$$

3.11. Bulut ile yer arasındaki elektrik alanı düzgün kabul edersek, delinme anındaki gerilim

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3)(10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V}.$$

Açığa çıkan elektrik enerjisi

$$W = \int V(t) I(t) dt.$$

Karakteristik gerilim olarak V_0 kullanıldığında

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

enerji, her bir yıldırım düşmesinde açığa çıkar.

Dolayısıyla kişi başına düşen yıllık enerji payı

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J.}$$

100 W'lık bir ampul her saniye 100 J tüketir; dolayısıyla

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h.}$$

Tamamen boşalan bir kondansatör olarak modellenen bulut–yer sisteminde gerilim, kalan yüklerle birlikte azalır. Bu durumda açığa çıkan enerji

$$W = \frac{1}{2} QV_0,$$

olur ve kişi başına yaklaşık 3.7×10^4 s, yani 10 h verir. Her iki model de bir gün mertebesinde bir aydınlatma süresi verir.

3.12. İlgili niceliklerin SI birimlerindeki değerleri

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m},$$

$$\Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Poiseuille yasası, bir kılcal damardan geçen hacimsel debiyi verir:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta L}.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi(4 \times 10^{-6})^4(10^3)}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Özdeş kılcal damarlar paralel bağlı olduğundan her biri aynı basınç farkına maruz kalır ve hacimsel debileri toplanır:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

Dolayısıyla

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13. $D = Sv$ ifadesinde yer alan hız, kesit boyunca ortalama hızdır. Bu nedenle,

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta L}.$$

Sayısal olarak,

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

Buradan

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. Kuazistatik adyabatik genleşme geçiren sabit miktardaki ideal gaz için,

$$pV^\gamma = \text{sabit.}$$

Logaritmik diferansiyeller alındığında,

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

İdeal gaz yasası, T kelvin cinsinden ölçülmek üzere, $T \propto pV$ verir; dolayısıyla

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

Tabaka yükseldikçe hem basınç hem de sıcaklık azalır.

3.15. İnce bir yatay tabaka üzerindeki hidrostatik kuvvet dengesi

$$dp = -\rho g dz,$$

bağıntısını verir; burada ρ , yerel kütle yoğunluğudur.

Kütlesi m olan azot molekülleri için ideal gaz yasası

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

Böylece,

$$\boxed{dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.}$$

3.16. Hidrostatik basınç gradyanını adyabatik sıcaklık bağıntısında yerine koyalım:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz \right).$$

T ile çarpıldıktan sonra sağ taraftaki sıcaklık sadeleşir ve yükseklikle sabit bir sıcaklık azalma oranı elde edilir:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

Verilen sabitler için,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

$H = 1000$ m boyunca sıcaklık düşüşü yaklaşık 9.4 K'dir. Buradan

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

Böylece,

$$\boxed{T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}.}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.