

IPhO 2006

Теоретические задачи и решения · Сингапур · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2006/

Задача 1: Гравитация в нейтронном интерферометре

Запишите все ответы в **бланк ответов**.

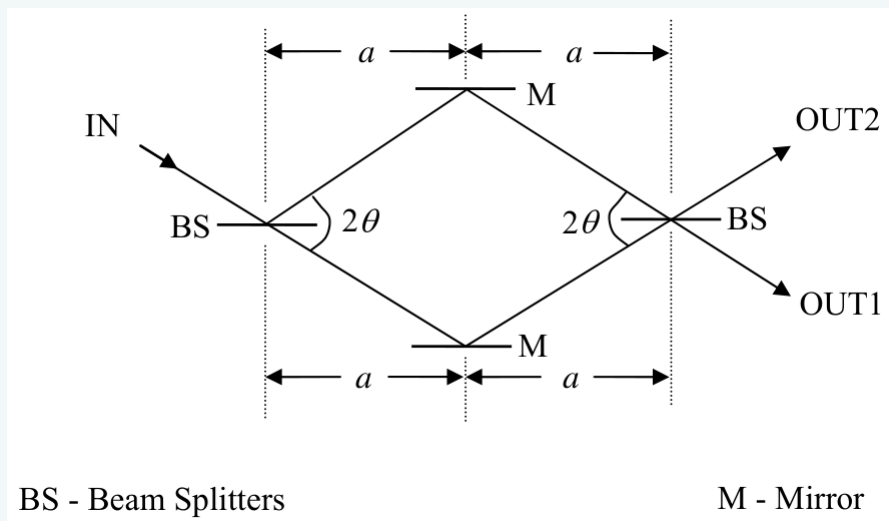


Рисунок 1a

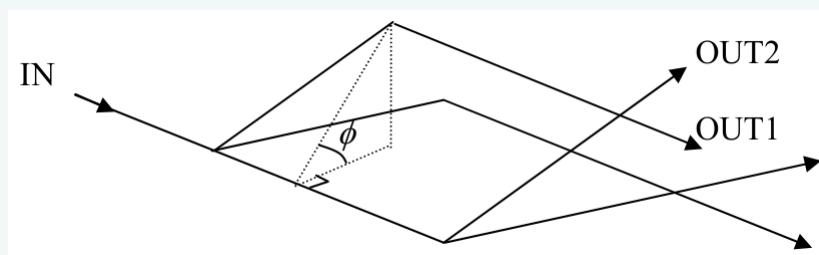


Рисунок 1b

Физическая ситуация Рассмотрим знаменитый эксперимент Колеллы, Оверхаузера и Вернера с нейтронным интерферометром, идеализировав установку: будем считать делители пучка и зеркала внутри интерферометра идеальными. В эксперименте исследуется влияние силы тяжести на волны де Бройля нейтронов.

Схематическое изображение этого интерферометра по аналогии с оптическим интерферометром приведено на рисунке 1a. Нейтроны входят в интерферометр через вход IN и проходят по двум показанным путям. Нейтроны регистрируются на одном из двух выходов, OUT1 или OUT2. Два пути ограничивают область в форме ромба, площадь которой обычно составляет несколько см^2 .

Волны де Бройля нейтронов (с типичной длиной волны 10^{-10} m) интерферируют так, что все нейтроны выходят через выход OUT1, если плоскость интерферометра горизонтальна. Однако при повороте интерферометра вокруг оси входящего нейтронного пучка на угол ϕ (рисунок 1b) наблюдается зависящее от ϕ перераспределение нейтронов между двумя выходами OUT1 и OUT2.

Геометрия При $\phi = 0^\circ$ плоскость интерферометра горизонтальна; при $\phi = 90^\circ$ она вертикальна, причём выходы расположены выше оси поворота.

1.1 (1.0) Чему равна площадь A ромба, ограниченного двумя путями интерферометра?

1.2 (1.0) На какой высоте H над горизонтальной плоскостью, проходящей через ось поворота, находится выход OUT1?

Выразите A и H через a , θ и ϕ .

Оптическая длина пути Оптическая длина пути N_{opt} (число) — это отношение геометрической длины пути (расстояния) к длине волны λ . Если λ изменяется вдоль пути, то N_{opt} определяется интегрированием λ^{-1} вдоль пути.

1.3 (3.0) Чему равна разность ΔN_{opt} оптических длин двух путей при повороте интерферометра на угол ϕ ? Выразите ответ через a , θ и ϕ , а также массу нейтрона M , длину волны де Бройля входящих нейтронов λ_0 , ускорение свободного падения g и постоянную Планка h .

1.4 (1.0) Введите параметр с размерностью объёма

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

и выразите ΔN_{opt} только через A , V , λ_0 и ϕ . Укажите значение V при $M = 1.675 \times 10^{-27}$ kg, $g = 9.800$ m s⁻² и $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s.

1.5 (2.0) Сколько циклов изменения интенсивности — от высокой к низкой и обратно к высокой — происходит на выходе OUT1 при увеличении ϕ от $\phi = -90^\circ$ до $\phi = 90^\circ$?

Экспериментальные данные Интерферометр в реальном эксперименте имел параметры $a = 3.600$ cm и $\theta = 22.10^\circ$; наблюдалось 19.00 полных циклов.

1.6 (1.0) Чему равнялась λ_0 в этом эксперименте?

1.7 (1.0) Если бы в другом аналогичном эксперименте с нейтронами, имеющими $\lambda_0 = 0.2000$ nm, наблюдалось 30.00 полных циклов, чему была бы равна площадь A ?

Указание: если $|\alpha x| \ll 1$, допустимо заменить $(1 + x)^\alpha$ на $1 + \alpha x$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Определим разность с учётом знака как $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{lower}} - N_{\text{upper}}$, называя пути в соответствии с рисунком 1a. В результатах для фазы сохраняются члены первого порядка по изменению гравитационной потенциальной энергии.

- 1.1: $A = 2a^2 \tan \theta$.
- 1.2: $H = 2a \sin \theta \sin \phi$.
- 1.3: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$.
- 1.4: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi, \quad V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ м}^3$.
- 1.5: $C = \frac{2A \lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$ циклов.
- 1.6: $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ м} = 0.1441 \text{ нм}$.
- 1.7: $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ м}^2 = 11.98 \text{ см}^2$.

Решение

1.1 — Площадь ограниченной области

Обозначим входной делитель пучка через O , верхнее зеркало через U , нижнее зеркало через D , а выходной делитель пучка через R , в соответствии с рисунком 1а.

Каждая сторона ромба имеет длину

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Горизонтальная диагональ OR равна $2a$, а перпендикулярная ей диагональ UD равна $2a \tan \theta$. Поэтому

$$A = \frac{1}{2}(2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

Поворот установки не изменяет эту площадь.

1.2 — Высота выхода OUT1

Входящий пучок лежит на одной прямой с OD , поэтому ось поворота направлена вдоль OD . Противоположная сторона UR параллельна этой оси.

Расстояние по перпендикуляру в плоскости интерферометра от R до оси поворота равно

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

При повороте плоскости на угол ϕ у этого отрезка появляется вертикальная проекция $d \sin \phi$. Следовательно,

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

Точки U и R находятся на высоте H , тогда как O и D остаются на нулевой высоте. Пучок OUT1 параллелен оси поворота, поэтому он остаётся на высоте H . При отрицательных ϕ величина H отрицательна.

1.3 — Разность оптических длин путей

Используем нерелятивистскую механику, считая гравитационное поле однородным, а взаимодействия с неподвижными идеальными оптическими элементами упругими. Примем гравитационную потенциальную энергию на оси поворота равной нулю.

Импульс и кинетическая энергия входящих нейтронов равны

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

Закон сохранения энергии на высоте z даёт

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

Следовательно, согласно соотношению де Бройля, обратная длина волны равна

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

Сохраним члены первого порядка по малому отношению $Mg|z|/K_0$. Тогда, воспользовавшись указанием, получаем

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

При такой точности можно использовать прямолинейные отрезки, показанные на рисунке. При фиксированных концах дополнительная геометрическая длина, обусловленная малым отклонением под действием силы тяжести, имеет второй порядок малости по этому отклонению.

Оба наклонных отрезка OU и DR имеют длину ℓ , а высота вдоль них изменяется одинаково от 0 до H . Поэтому их оптические длины равны:

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

Оставшиеся отрезки расположены на постоянной высоте: OD — на нулевой, а UR — на высоте H . Следовательно,

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

Вычитая, получаем

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

искомый результат имеет вид

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.$$

При положительных ϕ верхний путь имеет меньшую оптическую длину, поскольку на его приподнятом участке импульс нейтрона меньше, а значит, длина волны больше. Изменение порядка вычитания меняет знак разности, не изменяя предсказаний для интерференционной картины.

1.4 — Параметр с размерностью объёма

Используя $A = 2a^2 \tan \theta$ и $V = h^2/(gM^2)$, получаем

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi.$$

Размерность V определяется следующим образом:

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2})\text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

Численно

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

Таким образом,

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

1.5 — Число циклов изменения интенсивности

Разности оптических длин путей, равной единице, соответствует изменение разности фаз на 2π :

$$\delta = 2\pi \Delta N_{\text{opt}}.$$

Указанная в условии конструктивная интерференция на выходе OUT1 при $\phi = 0$ определяет постоянное смещение фазы. Для идеальных путей с равными амплитудами

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left(\pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

Максимумы возникают при целых значениях ΔN_{opt} , а минимумы — при полуцелых. Поэтому каждое увеличение ΔN_{opt} на единицу соответствует одному циклу изменения интенсивности.

При увеличении ϕ от -90° до 90° величина $\sin \phi$ монотонно возрастает от -1 до 1 .

Следовательно, полное число циклов равно

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left(-\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с той же точностью первого порядка,

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

1.6 — Длина волны входящих нейтронов

Площадь в данном эксперименте равна

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Выражая длину волны из формулы для числа циклов, получаем

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

Используя $C = 19.00$ и сохраняя неокруглённые промежуточные значения, получаем

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Таким образом,

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

Использованное выше приближение вполне обоснованно. Скорость этих нейтронов равна

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

а наибольшая высота составляет $H_{\max} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$. Поэтому

$$\frac{MgH_{\max}}{K_0} = \frac{2gH_{\max}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

1.7 — Площадь для второго эксперимента

Преобразуя ту же формулу для числа циклов, получаем

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

При $C = 30.00$ и $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

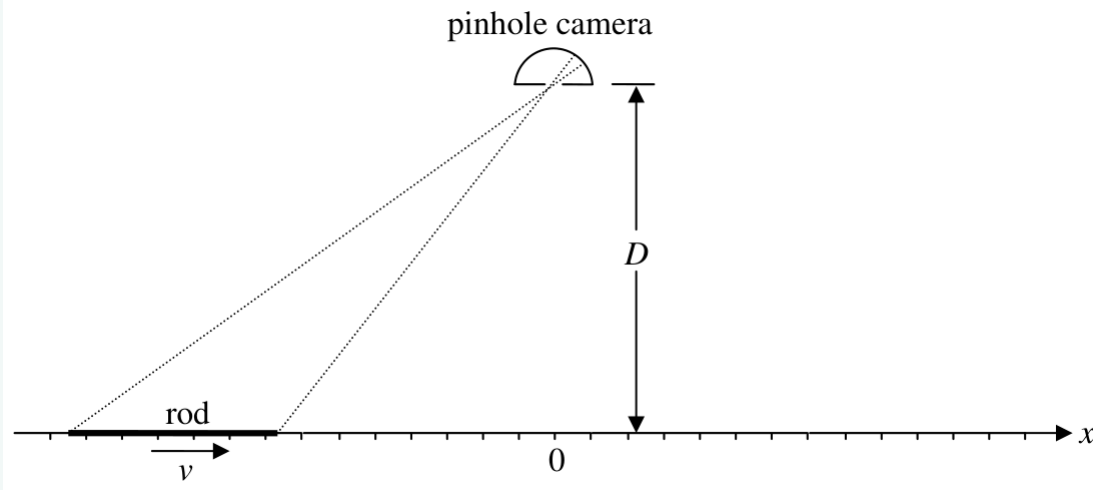
Следовательно,

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Наблюдение за движущимся стержнем

Занесите все ответы в **Бланк ответов**.



Физическая ситуация Камера-обскура, отверстие которой находится при $x = 0$ на расстоянии D от оси x , фотографирует стержень, открывая отверстие на очень короткое время. Вдоль оси x нанесены равноотстоящие метки, по которым на снимках, сделанных камерой-обскурой, можно определить *видимую длину* стержня, то есть его длину на снимке. На снимке *покоящегося* стержня его длина равна L . Однако стержень *не покоится*, а движется с постоянной скоростью v вдоль оси x .

Основные соотношения На снимке, сделанном камерой-обскурой, малый участок стержня виден в положении $\tilde{x}$.

2.1 (0.6) Каково *истинное положение* x этого участка в момент съёмки? Выразите ответ через $\tilde{x}$, D , L , v и скорость света $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Используйте величины

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

если они помогут упростить результат.

2.2 (0.9) Найдите также соответствующее обратное соотношение, то есть выразите $\tilde{x}$ через x , D , L , v и c .

Примечание: *Истинное положение* — это положение в системе отсчёта, в которой камера покоится

Видимая длина стержня Камера-обскура делает снимок в тот момент, когда центр стержня в действительности находится в некоторой точке x_0 .

2.3 (1.5) Выразите видимую длину стержня на этом снимке через заданные величины.

2.4 (1.5) Отметьте одну из клеток в **Бланке ответов**, чтобы указать, как видимая длина изменяется со временем.

Симметричный снимок На одном из снимков камеры-обскуры оба конца стержня видны на одинаковом расстоянии от отверстия.

2.5 (0.8) Определите видимую длину стержня на этом снимке.

2.6 (1.0) Каково истинное положение середины стержня в момент съёмки этого снимка?

2.7 (1.2) Где на снимке находится изображение середины стержня?

Очень ранний и очень поздний снимки Камера-обскура сделала один снимок очень рано, когда стержень находился очень далеко и приближался, а другой делает очень поздно, когда стержень находится очень далеко и удаляется. На одном из снимков видимая длина равна 1.00 м, а на другом — 3.00 м.

2.8 (0.5) Отметьте клетку в **Бланке ответов**, чтобы указать, какая длина видна на каждом из снимков.

2.9 (1.0) Определите скорость v .

2.10 (0.6) Определите длину L покоящегося стержня.

2.11 (0.4) Найдите видимую длину на симметричном снимке.

2.4	Отметьте один вариант: Видимая длина ☐ сначала увеличивается, достигает максимального значения, затем уменьшается. ☐ сначала уменьшается, достигает минимального значения, затем увеличивается. ☐ всё время уменьшается. ☐ всё время увеличивается.	1.5
------------	---	------------

	Очень ранний и очень поздний снимки	Только для проверяющих
2.8	Отметьте один вариант: ☐ Видимая длина равна 1 м на раннем снимке и 3 м на позднем снимке. ☐ Видимая длина равна 3 м на раннем снимке и 1 м на позднем снимке.	0.5

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Используем обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

• **2.1**

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

• **2.2**

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

• **2.3**

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

• **2.4** Отметьте **третью клетку**: видимая длина **всё время уменьшается**.

- 2.5

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

- 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

- 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left(R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Оно находится справа от геометрического центра изображения, в сторону переднего конца стержня.

- 2.8 Отметьте **вторую клетку**: 3.00 m на раннем снимке, 1.00 m на позднем снимке.

- 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

в положительном направлении оси x .

- 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m}.$$

- 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m}.$$

Решение

На протяжении всего решения будем работать в системе отсчёта камеры, считая, что стержень движется в положительном направлении оси x . Время экспозиции настолько мало, что весь свет, формирующий один снимок, приходит в один и тот же момент времени t . Свет распространяется прямолинейно со скоростью c .

Неподвижная шкала позволяет определить координату, из которой был испущен луч. Таким образом, $\tilde{x}$ — положение участка стержня в момент испускания света, а x — его положение в момент, когда свет достигает отверстия.

2.1

Пусть свет был испущен в момент времени t_e . Расстояние от точки испускания до отверстия равно

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

поэтому время распространения света равно

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

За этот промежуток времени участок стержня перемещается на $v(t - t_e)$. Следовательно,

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

откуда получаем

$$\boxed{x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}}.$$

Это соотношение относится к одному участку стержня и не зависит от L .

2.2

Переносим слагаемые в предыдущем равенстве и возводя его в квадрат, получаем

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2(D^2 + \tilde{x}^2),$$

или

$$(1 - \beta^2)\tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2 D^2 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения имеют вид

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

При положительной скорости исходное уравнение, до возведения в квадрат, требует $x - \tilde{x} > 0$: между испусканием и приёмом света участок стержня перемещается вперёд. Поэтому следует выбрать знак минус. Введём обозначение

$$\boxed{\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right)}.$$

2.3

Заданная величина L — собственная длина стержня. Согласно специальной теории относительности, его длина в системе отсчёта камеры, измеренная по одновременным положениям концов, равна

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

В момент съёмки положения его концов равны

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

Их видимые положения равны $f(x_-)$ и $f(x_+)$. Поскольку

$$f'(x) = \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

порядок расположения концов сохраняется, и видимая длина равна

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

Подстановка даёт

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Это выражение учитывает как лоренцево сокращение, так и различие времён распространения света от концов стержня.

2.4

Продифференцируем $f'(x)$:

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

Таким образом, $f'(x)$ строго убывает с ростом x . Следовательно,

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

Поскольку $dx_0/dt = v > 0$,

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

Следовательно, видимая длина **всё время уменьшается**. Отметьте **третью клетку**.

2.5

На симметричном снимке видимые положения концов равны $-b$ и $+b$, поскольку их расстояния до отверстия одинаковы:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

Равенство пройденных светом расстояний и общий момент прихода означают, что моменты испускания также одинаковы. Поэтому расстояние между концами в момент испускания равно длине, измеренной по одновременным положениям концов и сокращённой согласно преобразованиям Лоренца:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

Таким образом, $b = a$, и

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

2.6

В общий момент испускания света концами стержня они находятся в точках $-a$ и $+a$, поэтому истинная середина стержня находится при $x = 0$.

Свету от концов требуется время

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

чтобы достичь отверстия. За этот промежуток времени середина перемещается вперёд на $v\Delta t$. Поэтому её истинное положение в момент съёмки равно

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

2.7

Применим обратное соотношение к истинному положению середины стержня:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Используя $R^2 = D^2 + a^2$ и $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$, получаем

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

Умножая разность корней на сопряжённую сумму и деля на неё, получаем эквивалентное выражение

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

При заданном движении $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$. Таким образом, материальная точка в середине стержня видна между геометрическим центром изображения и его правым концом.

Свет от неё проходит меньшее расстояние, чем свет от концов, поэтому он испускается позже. К этому более позднему моменту испускания материальная точка в середине стержня уже переместилась в область положительных x .

2.8

Для очень раннего и очень позднего снимков используем приближение больших расстояний

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

На раннем снимке стержень приближается из области отрицательных x . Уравнение 2.1 принимает вид

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

Применяя его к обоим концам, получаем видимую длину на раннем снимке

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

На позднем снимке стержень удаляется в сторону положительных x , поэтому

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

и

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

Поскольку $\beta > 0$, $A > B$. Следовательно,

$$A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.$$

Отметьте **вторую клетку**.

2.9

Взяв отношение, исключаем длину стержня:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

Таким образом,

$$v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

причём скорость направлена в положительном направлении оси x .

2.10

Перемножая видимые длины на раннем и позднем снимках, получаем

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

Следовательно,

$$L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.$$

2.11

Согласно пункту 2.5,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

При $\beta = 1/2$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Используя неокруглённую собственную длину $L = \sqrt{3} \text{ m}$, получаем

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Пять оценок по порядку величины: цифровой фотоаппарат, яйцо вкрутую, молния, капилляры, небоскрёб

Эта задача состоит из пяти независимых частей. В каждой из них требуется лишь оценка по порядку величины, а не точный ответ. Занесите все ответы в **бланк ответов**.

Цифровой фотоаппарат Рассмотрим цифровой фотоаппарат с квадратной ПЗС-матрицей со стороной $L = 35 \text{ mm}$, содержащей $N_p = 5 \text{ Mpix}$ ($1 \text{ Mpix} = 10^6$ пикселей). Объектив этого фотоаппарата имеет фокусное расстояние $f = 38 \text{ mm}$. Хорошо известная последовательность чисел (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22), нанесённых на объектив, соответствует так называемому диафрагменному числу, которое обозначается $F\#$ и определяется как отношение фокусного расстояния к диаметру D отверстия диафрагмы объектива: $F\# = f/D$.

3.1 (1.0) Найдите наилучшее возможное пространственное разрешение $\Delta x_{\min}$ фотоаппарата в плоскости матрицы, ограниченное объективом. Выразите результат через длину волны λ и диафрагменное число $F\#$ и приведите численное значение для $\lambda = 500 \text{ nm}$.

3.2 (0.5) Найдите необходимое число N мегапикселей ПЗС-матрицы, обеспечивающее соответствие этому оптимальному разрешению.

3.3 (0.5) Иногда фотографы стремятся использовать фотоаппарат с наименьшим практически допустимым отверстием диафрагмы. Предположим, что теперь у нас есть фотоаппарат с $N_0 = 16 \text{ Mpix}$, размер матрицы и фокусное расстояние которого указаны выше. Какое значение $F\#$ следует выбрать, чтобы качество изображения не ограничивалось оптикой?

3.4 (0.5) Известно, что угловое разрешение человеческого глаза составляет приблизительно $\phi = 2 \text{ arcmin}$, а типичный фотопринтер печатает с разрешением не менее 300 dpi (точек на дюйм). На каком минимальном расстоянии z от глаз следует держать напечатанную страницу, чтобы не различать отдельные точки?

Данные

1 дюйм	$= 25.4 \text{ mm}$
1 угловая минута	$= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$

Яйцо вкрутую Яйцо, взятое непосредственно из холодильника при температуре $T_0 = 4^\circ\text{C}$, опускают в кастрюлю с водой, кипящей при постоянной температуре T_1 .

3.5 (0.5) Какое количество энергии U необходимо для свёртывания белка яйца?

3.6 (0.5) Какова плотность теплового потока J , поступающего в яйцо?

3.7 (0.5) Какова тепловая мощность P , передаваемая яйцу?

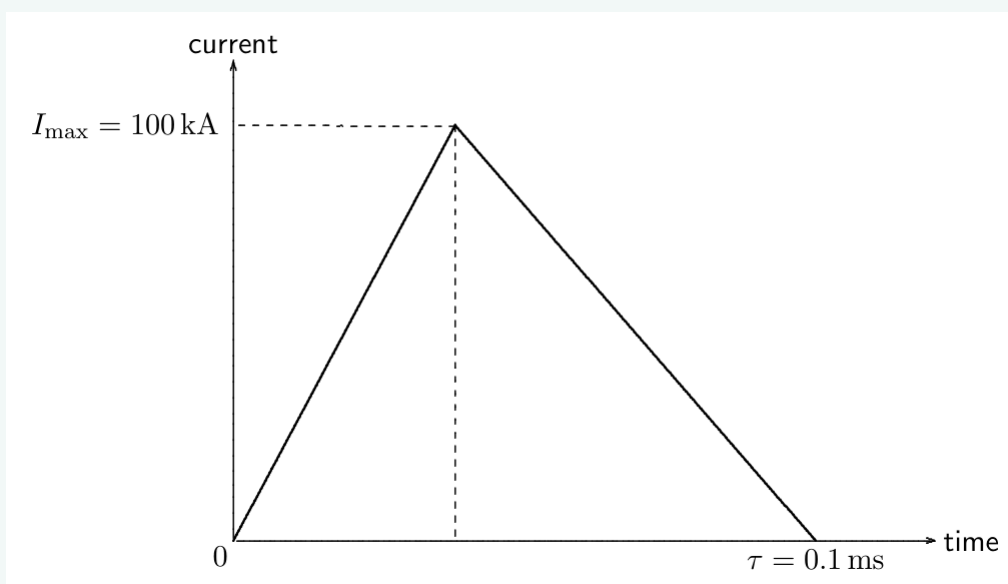
3.8 (0.5) Сколько времени нужно варить яйцо, чтобы оно сварилось вкрутую?

Указание Можно использовать упрощённую форму закона Фурье $J = \kappa \Delta T / \Delta r$, где ΔT — разность температур, соответствующая Δr , характерному масштабу длины в задаче. Плотность теплового потока J измеряется в W m^{-2} .

Данные

Плотность яйца:	$\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Удельная теплоёмкость яйца:	$C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$
Радиус яйца:	$R = 2.5 \text{ cm}$
Температура свёртывания альбумина (яичного белка):	$T_c = 65^\circ\text{C}$
Коэффициент теплопроводности:	$\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (считается одинаковым для жидкого и твёрдого белка)

Молния Рассмотрим сильно упрощённую модель молнии. Молния возникает вследствие накопления электростатического заряда в облаках. В результате нижняя часть облака обычно заряжается положительно, верхняя — отрицательно, а поверхность земли под облаком — отрицательно. Когда соответствующее электрическое поле превышает электрическую прочность воздуха, происходит пробой: это и есть молния.



Идеализированный импульс тока, протекающего между облаком и землёй во время молнии.

Ответьте на следующие вопросы, используя эту упрощённую кривую зависимости тока от времени и следующие данные:

Расстояние между нижней частью облака и землёй:	$h = 1 \text{ km};$
Пробивная напряжённость электрического поля для влажного воздуха:	$E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1};$
Общее число ударов молнии в Землю за год:	$32 \times 10^6;$
Общая численность населения Земли:	6.5×10^9 человек.

3.9 (0.5) Каков полный заряд Q , переносимый молнией?

3.10 (0.5) Каков средний ток I , протекающий между нижней частью облака и землёй во время молнии?

3.11 (1.0) Представьте, что энергия всех гроз за один год собрана и поровну распределена между всеми людьми. Как долго вы могли бы непрерывно питать лампочку мощностью 100 Вт за счёт своей доли энергии?

Капилляры Будем считать кровь несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью μ , близкой к плотности воды, и динамической вязкостью $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Будем моделировать кровеносные сосуды прямыми трубками круглого сечения радиусом r и длиной L , а течение крови описывать законом Пуазейля,

$$\Delta p = RD,$$

который является гидродинамическим аналогом закона Ома в электричестве. Здесь Δp — разность давлений между входом и выходом кровеносного сосуда, $D = Sv$ — объёмный расход через поперечное сечение сосуда площадью S , а v — скорость крови.

Гидравлическое сопротивление R определяется выражением

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

В большом круге кровообращения (от левого желудочка к правому предсердию сердца) объёмный расход крови у человека в состоянии покоя составляет $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

Ответьте на следующие вопросы, предполагая, что все капилляры соединены параллельно, каждый из них имеет радиус $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$ и длину $L = 1 \text{ mm}$, а разность давлений на его концах составляет $\Delta p = 1 \text{ kPa}$.

3.12 (1.0) Сколько капилляров в организме человека?

3.13 (0.5) Какова скорость v , с которой кровь течёт по капилляру?

Небоскрёб У основания небоскрёба высотой 1000 м температура наружного воздуха составляет $T_{\text{bot}} = 30^\circ \text{C}$. Требуется оценить температуру наружного воздуха T_{top} на вершине здания. Рассмотрим тонкий слой воздуха (идеального газообразного азота с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$), медленно поднимающийся на высоту z , где давление ниже, и предположим, что этот слой расширяется адиабатически, так что его температура понижается до температуры окружающего воздуха.

3.14 (0.5) Как относительное изменение температуры dT/T связано с относительным изменением давления dp/p ?

3.15 (0.5) Выразите изменение давления dp через изменение высоты dz .

3.16 (1.0) Какой в результате будет температура на вершине здания?

Данные

Постоянная Больцмана:	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Масса молекулы азота:	$m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$
Ускорение свободного падения:	$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В основных оценках используются дифракционный масштаб $\lambda F\#$, температура кипящей воды 100°C и величина $E_0 h$ в качестве характерного напряжения при молнии.

- **3.1:** $\Delta x_{\min} \sim \lambda F\#$. При наибольшем доступном отверстии диафрагмы, $F\# = 2$, это даёт $1.0 \mu\text{m}$. Значение по критерию Рэлея для круглого отверстия составляет $1.22 \mu\text{m}$.
- **3.2:** $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$, или $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$ с учётом коэффициента Рэлея.
- **3.3:** $F\# = 16$ при использовании $\Delta x \sim \lambda F\#$. Строгое сравнение по критерию Рэлея даёт $F\# = 11$.
- **3.4:** $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$.
- **3.5:** $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$.
- **3.6:** $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$.
- **3.7:** $P \sim 19 \text{ W}$.
- **3.8:** $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$.
- **3.9:** $Q = 5 \text{ C}$.
- **3.10:** $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$.
- **3.11:** $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$. Модель полностью разряжающегося конденсатора даёт приблизительно 10 h .
- **3.12:** $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$ капилляров.
- **3.13:** $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$.
- **3.14:** $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$.
- **3.15:** $dp = -\rho g dz = -\frac{m p g}{k T} dz$, где ρ — местная плотность воздуха.
- **3.16:** $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ\text{C}$.

Решение

3.1. Для идеального объектива дифракция на отверстии диафрагмы ограничивает минимальное угловое расстояние между различимыми объектами величиной порядка

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Для удалённых объектов угловому расстоянию θ соответствует расстояние $f\theta$ в фокальной плоскости. Поэтому

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

При $\lambda = 500 \text{ nm}$

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

Наилучшее разрешение достигается при наибольшем отверстии диафрагмы, которому соответствует наименьшее из приведённых диафрагменных чисел, $F\# = 2$. Диаметр отверстия равен $D = f/2 = 19 \text{ mm}$, что даёт

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \text{ } \mu\text{m}.$$

Для круглого отверстия критерий Рэлея даёт более точное выражение

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22\lambda F\#,$$

а значит, $1.22 \text{ } \mu\text{m}$ при $F\# = 2$. Этот коэффициент несущественен для требуемой оценки по порядку величины.

3.2. Для квадратной матрицы с квадратными пикселями с шагом a полное число пикселей приблизительно равно $(L/a)^2$. Приравнивая шаг пикселей к масштабу оптического разрешения, получаем

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2.$$

Следовательно,

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

В мегапикселях:

$$N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix.}$$

Если вместо этого использовать значение по критерию Рэлея, получим

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix.}$$

Обе оценки требуют около 10^3 Mpix .

3.3. Шаг пикселей матрицы с 16 мегапикселями равен

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \text{ } \mu\text{m}.$$

Чтобы разрешение, задаваемое оптикой, не было хуже разрешения, задаваемого пикселями, необходимо

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

Поэтому

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \text{ } \mu\text{m}}{0.500 \text{ } \mu\text{m}} = 17.5.$$

Наименьшему отверстию диафрагмы соответствует наибольшее допустимое диафрагменное число. Среди доступных значений это даёт

$$F\# = 16.$$

При такой настройке оценка дифракционного масштаба составляет $8.0 \text{ } \mu\text{m}$; при $F\# = 22$ она составила бы $11 \text{ } \mu\text{m}$.

Если сохранить коэффициент Рэлея и потребовать строгого выполнения неравенства,

$$1.22\lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

Тогда наибольшим из приведённых допустимых значений становится $F\# = 11$. Этот выбор из дискретного ряда зависит от принятого критерия разрешения.

3.4. При разрешении 300 dpi расстояние между соседними напечатанными точками равно

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

При наблюдении с расстояния z угловое расстояние между ними приблизительно равно d/z . Они перестают различаться по отдельности, когда

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

Используя

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

получаем

$$z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m}.$$

3.5. Будем считать яйцо шаром с однородными плотностью и удельной теплоёмкостью.

Пренебрежём тепловым влиянием скорлупы и дополнительной энтальпией свёртывания, для которой данные не приведены.

Масса яйца равна

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg}.$$

Переведём удельную теплоёмкость в единицы СИ:

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Энергия, необходимая для нагревания яйца от T_0 до температуры свёртывания, оценивается выражением

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

Следовательно,

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J},$$

так что

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}.$$

3.6. Предположим, что вода кипит при обычном атмосферном давлении, так что $T_1 \approx 100^\circ \text{C}$.

Для оценки характерной плотности теплового потока примем длину пути теплопроводности равной радиусу яйца, а разность температур — начальной разности температур воды и яйца:

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K}.$$

Тогда закон Фурье даёт модуль направленной внутрь плотности теплового потока

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

Следовательно,

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Реальный градиент температуры меняется в процессе варки; здесь оценена его характерная величина.

3.7. Теплота поступает через поверхность яйца, площадь которой равна

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Следовательно,

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3) (7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

Таким образом,

$$P \sim 19 \text{ W}.$$

3.8. Разделим необходимую для нагревания энергию на характерную мощность теплопередачи:

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

Объединяя предыдущие выражения, также получаем

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Численно:

$$t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}.$$

Эта оценка имеет ожидаемую для тепловой диффузии зависимость $t \propto R^2$.

3.9. Перенесённый заряд равен площади под графиком зависимости тока от времени:

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

Импульс имеет треугольную форму, поэтому его площадь не зависит от момента достижения максимума:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

При $I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$ и $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$

$$Q = \frac{1}{2} (10^5) (10^{-4}) = 5 \text{ C}.$$

3.10. Средний ток за время импульса равен

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

Следовательно,

$$I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}.$$

3.11. Считая электрическое поле между облаком и землёй однородным, получаем напряжение при пробое:

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3)(10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V}.$$

Выделившаяся электрическая энергия равна

$$W = \int V(t) I(t) dt.$$

Используя V_0 в качестве характерного напряжения, получаем

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

на один удар молнии.

Следовательно, годовая доля энергии на одного человека составляет

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J}.$$

Лампочка мощностью 100 W потребляет 100 J каждую секунду, поэтому

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}.$$

Если моделировать систему «облако — земля» полностью разряжающимся конденсатором, напряжение уменьшается вместе с оставшимся зарядом. Тогда выделившаяся энергия равна

$$W = \frac{1}{2} Q V_0,$$

что даёт приблизительно $3.7 \times 10^4 \text{ s}$, или 10 h, на человека. Обе модели дают время освещения порядка одних суток.

3.12. Нужные величины в единицах СИ:

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m},$$

$$\Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Закон Пуазейля даёт объёмный расход через один капилляр:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}.$$

Подстановка даёт

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi (4 \times 10^{-6})^4 (10^3)}{8 (4.5 \times 10^{-3}) (10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Поскольку одинаковые капилляры соединены параллельно, на каждом из них действует одна и та же разность давлений, а их объёмные расходы складываются:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

Таким образом,

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13. Скорость, входящая в $D = Sv$, — это средняя по поперечному сечению скорость. Поэтому

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta L}.$$

Численно:

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

Следовательно,

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. Для постоянного количества идеального газа при квазистатическом адиабатическом расширении

$$pV^\gamma = \text{постоянная}.$$

Логарифмически дифференцируя, получаем

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Уравнение состояния идеального газа даёт $T \propto pV$, где T измеряется в кельвинах, поэтому

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

Таким образом,

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

При подъёме слоя и давление, и температура уменьшаются.

3.15. Условие гидростатического равновесия сил, действующих на тонкий горизонтальный слой, даёт

$$dp = -\rho g dz,$$

где ρ — местная плотность.

Для молекул азота массой m уравнение состояния идеального газа даёт

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

Следовательно,

$$dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.$$

3.16. Подставим гидростатический градиент давления в адиабатическую зависимость температуры:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz\right).$$

После умножения на T температура в правой части сокращается, и получается постоянный вертикальный градиент температуры:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

Для приведённых постоянных

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

На высоте $H = 1000 \text{ m}$ падение температуры составляет приблизительно 9.4 K . Следовательно,

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

Таким образом,

$$\boxed{T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}.}$$

Решение проверено по официальному решению.