

IPhO 2006

Problemas teóricos y soluciones · Singapur · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2006/

Problema 1: La gravedad en un interferómetro de neutrones

Escriba todas sus respuestas en la **Hoja de respuestas**.

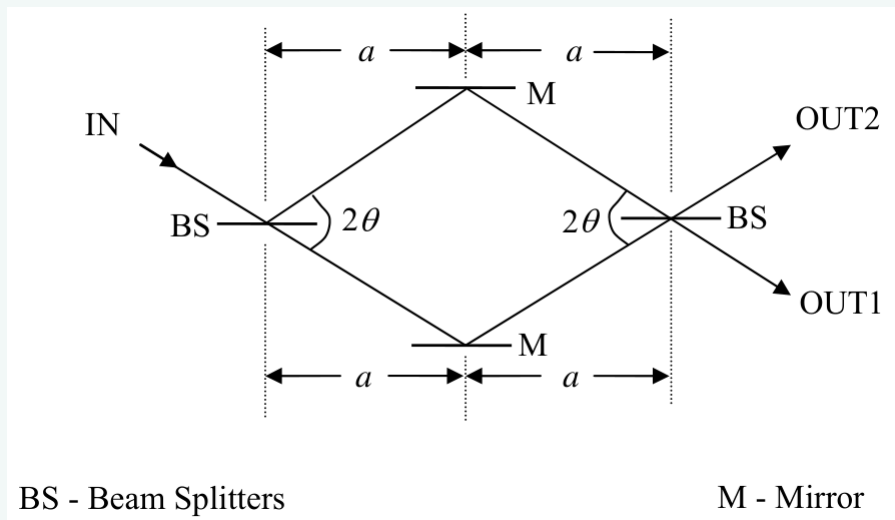


Figura 1a

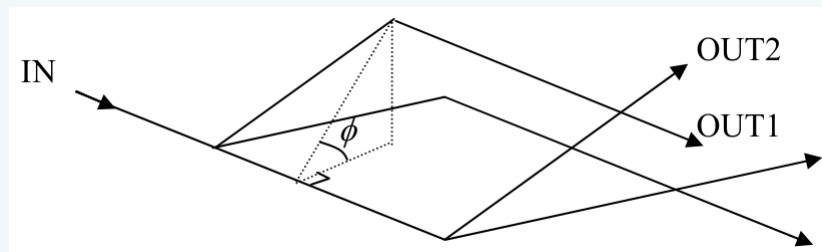


Figura 1b

Situación física Consideramos la situación del famoso experimento de interferometría de neutrones de Collela, Overhauser y Werner, pero idealizamos el montaje al suponer que los divisores de haz y los espejos del interferómetro son perfectos. El experimento estudia el efecto de la atracción gravitatoria sobre las ondas de de Broglie de los neutrones.

La representación simbólica de este interferómetro, por analogía con un interferómetro óptico, se muestra en la Figura 1a. Los neutrones entran en el interferómetro por el puerto IN y siguen las dos trayectorias indicadas. Los neutrones se detectan en uno de los dos puertos de salida, OUT1 u OUT2. Las dos trayectorias delimitan un área en forma de rombo, cuyo tamaño suele ser de unos pocos cm^2 .

Las ondas de de Broglie de los neutrones (cuya longitud de onda típica es de 10^{-10} m) interfieren de tal manera que todos los neutrones salen por el puerto de salida OUT1 si el plano del interferómetro es horizontal. Sin embargo, cuando el interferómetro se inclina un ángulo ϕ alrededor del eje del haz de neutrones incidente (Figura 1b), se observa una redistribución de los neutrones entre los dos puertos de salida OUT1 y OUT2 que depende de ϕ .

Geometría Para $\phi = 0^\circ$, el plano del interferómetro es horizontal; para $\phi = 90^\circ$, el plano es vertical y los puertos de salida se encuentran por encima del eje de inclinación.

1.1 (1.0) ¿Cuál es el área A del rombo delimitado por las dos trayectorias del interferómetro?

1.2 (1.0) ¿Cuál es la altura H del puerto de salida OUT1 sobre el plano horizontal que contiene el eje de inclinación?

Expresa A y H en función de a , θ y ϕ .

Longitud de camino óptico La longitud de camino óptico N_{opt} (un número) es el cociente entre la longitud geométrica del camino (una distancia) y la longitud de onda λ . Si λ varía a lo largo del camino, N_{opt} se obtiene integrando λ^{-1} a lo largo de él.

1.3 (3.0) ¿Cuál es la diferencia ΔN_{opt} entre las longitudes de camino óptico de las dos trayectorias cuando el interferómetro se ha inclinado un ángulo ϕ ? Expresa su respuesta en función de a , θ y ϕ , así como de la masa del neutrón M , la longitud de onda de de Broglie λ_0 de los neutrones incidentes, la aceleración de la gravedad g y la constante de Planck h .

1.4 (1.0) Introduzca el parámetro de volumen

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

y exprese ΔN_{opt} únicamente en función de A , V , λ_0 y ϕ . Indique el valor de V para $M = 1.675 \times 10^{-27}$ kg, $g = 9.800$ m s⁻² y $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s.

1.5 (2.0) ¿Cuántos ciclos —de intensidad alta a intensidad baja y de nuevo a intensidad alta— se completan en el puerto de salida OUT1 cuando ϕ aumenta desde $\phi = -90^\circ$ hasta $\phi = 90^\circ$?

Datos experimentales El interferómetro de un experimento real se caracterizaba por $a = 3.600$ cm y $\theta = 22.10^\circ$, y se observaron 19.00 ciclos completos.

1.6 (1.0) ¿Cuál era el valor de λ_0 en este experimento?

1.7 (1.0) Si se observaran 30.00 ciclos completos en otro experimento del mismo tipo que utilizara neutrones con $\lambda_0 = 0.2000$ nm, ¿cuál sería el área A ?

Indicación: Si $|\alpha x| \ll 1$, se puede sustituir $(1 + x)^\alpha$ por $1 + \alpha x$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Definimos la diferencia con signo como $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{lower}} - N_{\text{upper}}$, con las trayectorias denominadas según la Figura 1a. Los resultados relativos a la fase conservan los términos de primer orden en la variación de la energía gravitatoria.

- 1.1: $A = 2a^2 \tan \theta$.
- 1.2: $H = 2a \sin \theta \sin \phi$.
- 1.3: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$.
- 1.4: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi$, $V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.
- 1.5: $C = \frac{2A \lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$ ciclos.
- 1.6: $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}$.
- 1.7: $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2$.

Solución

1.1 — Área delimitada

Denotemos por O el divisor de haz de entrada, por U el espejo superior, por D el espejo inferior y por R el divisor de haz de salida, de acuerdo con la Figura 1a.

Cada lado del rombo tiene longitud

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

La diagonal horizontal OR mide $2a$, mientras que la diagonal perpendicular UD mide $2a \tan \theta$. Por tanto,

$$A = \frac{1}{2}(2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

La inclinación del aparato no modifica esta área.

1.2 — Altura de OUT1

El haz incidente es colineal con OD , por lo que el eje de inclinación se encuentra a lo largo de OD . El lado opuesto UR es paralelo a este eje.

La distancia perpendicular, dentro del plano del interferómetro, desde R hasta el eje de inclinación es

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

Al girar el plano un ángulo ϕ , esta distancia adquiere una componente vertical $d \sin \phi$. Así pues,

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

Tanto U como R se encuentran a una altura H , mientras que O y D permanecen a altura cero. El haz OUT1 es paralelo al eje de inclinación, por lo que permanece a la altura H . Para valores negativos de ϕ , H es negativa.

1.3 — Diferencia entre las longitudes de camino óptico

Utilizamos la mecánica no relativista, un campo gravitatorio uniforme e interacciones elásticas con los elementos ópticos ideales estacionarios. Fijamos el cero de la energía potencial gravitatoria en el eje de inclinación.

El momento lineal y la energía cinética de los neutrones incidentes son

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

La conservación de la energía a la altura z da

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

Utilizando la relación de de Broglie, el inverso de la longitud de onda es, por tanto,

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

Conservamos los términos de primer orden en el pequeño cociente $Mg|z|/K_0$. La indicación da entonces

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

Con este grado de precisión, utilizamos los segmentos rectos mostrados en la figura. Para extremos fijos, el incremento de longitud geométrica causado por una pequeña desviación gravitatoria es de segundo orden en dicha desviación.

Los dos segmentos inclinados OU y DR tienen ambos longitud ℓ , y sus alturas varían de forma idéntica desde 0 hasta H . Por ello, sus longitudes de camino óptico son iguales:

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

Los segmentos restantes se encuentran a alturas constantes: OD está a altura cero y UR , a altura H . En consecuencia,

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

Restando,

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

el resultado solicitado es

$$\boxed{\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.}$$

Para valores positivos de ϕ , la trayectoria superior tiene la menor longitud de camino óptico porque, en su segmento elevado, el momento lineal del neutrón es menor y, por tanto, su longitud de onda es mayor. Invertir la convención de la resta invierte el signo sin modificar las predicciones de interferencia.

1.4 — Parámetro de volumen

Utilizando $A = 2a^2 \tan \theta$ y $V = h^2/(gM^2)$,

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi.$$

Las dimensiones de V son

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2})\text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

Numéricamente,

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

Así,

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

1.5 — Número de ciclos de intensidad

Una diferencia de camino óptico de una unidad corresponde a una variación de fase relativa de 2π :

$$\delta = 2\pi\Delta N_{\text{opt}}.$$

La interferencia constructiva en OUT1 para $\phi = 0$, indicada en el enunciado, fija el desfase constante. Para las trayectorias ideales de igual amplitud,

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left(\pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

Los máximos se producen para valores enteros de ΔN_{opt} , y los mínimos, para valores semienteros. Por tanto, cada incremento de una unidad en ΔN_{opt} produce un ciclo de intensidad.

A medida que ϕ aumenta desde -90° hasta 90° , $\sin \phi$ aumenta monótonamente desde -1 hasta 1 . Así pues, el número total de ciclos es

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left(-\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, con la misma precisión de primer orden,

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

1.6 — Longitud de onda incidente

El área experimental es

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Despejando la longitud de onda en la fórmula del número de ciclos,

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

Utilizando $C = 19.00$ y conservando los valores intermedios sin redondear,

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Así,

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

La aproximación utilizada anteriormente está bien justificada. Estos neutrones tienen una rapidez

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

y la altura máxima es $H_{\max} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$. Por tanto,

$$\frac{MgH_{\max}}{K_0} = \frac{2gH_{\max}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

1.7 — Área para el segundo experimento

Reordenando la misma fórmula del número de ciclos,

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

Con $C = 30.00$ y $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$,

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

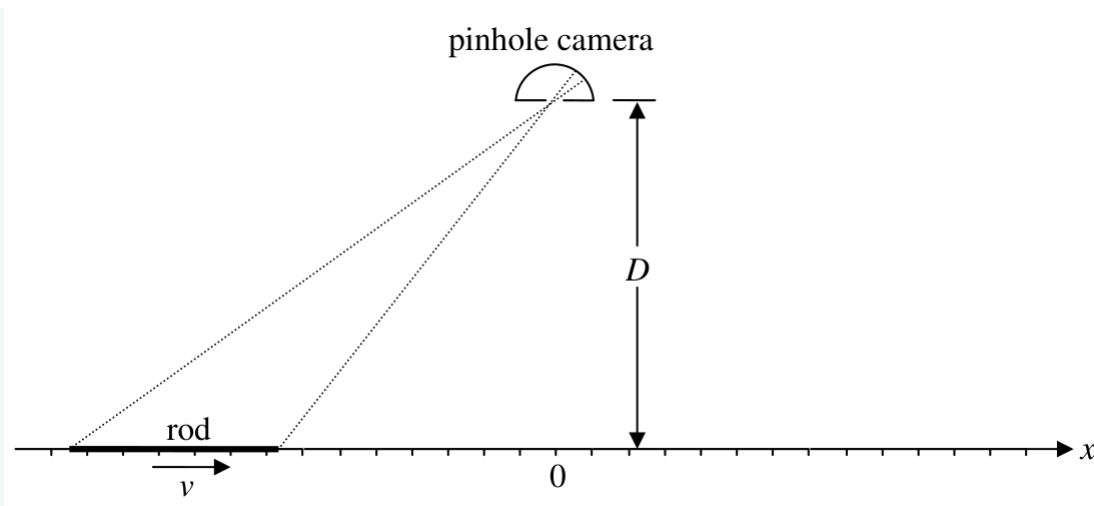
Así pues,

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Observación de una varilla en movimiento

Escriba todas sus respuestas en la **Hoja de respuestas**.



Situación física Una cámara estenopeica, cuyo orificio se encuentra en $x = 0$ y a una distancia D del eje x , toma fotografías de una varilla abriendo el orificio durante un tiempo muy breve. A lo largo del eje x hay marcas equidistantes que permiten determinar la *longitud aparente* de la varilla, tal como se ve en la imagen, a partir de las fotografías tomadas por la cámara estenopeica. En una fotografía de la varilla *en reposo*, su longitud es L . Sin embargo, la varilla *no está* en reposo, sino que se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje x .

Relaciones básicas Una fotografía tomada por la cámara estenopeica muestra un pequeño segmento de la varilla en la posición $\tilde{x}$.

2.1 (0.6) ¿Cuál es la *posición real* x de este segmento en el instante en que se toma la fotografía? Exprese su respuesta en función de $\tilde{x}$, D , L , v y la velocidad de la luz $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Utilice las magnitudes

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

si ayudan a simplificar el resultado.

2.2 (0.9) Halle también la relación inversa correspondiente, es decir: exprese $\tilde{x}$ en función de x , D , L , v y c .

Nota: La *posición real* es la posición en el sistema de referencia en el que la cámara está en reposo

Longitud aparente de la varilla La cámara estenopeica toma una fotografía en el instante en que la posición real del centro de la varilla se encuentra en cierto punto x_0 .

2.3 (1.5) En función de las variables dadas, determine la longitud aparente de la varilla en esta fotografía.

2.4 (1.5) Marque una de las casillas de la **Hoja de respuestas** para indicar cómo cambia la longitud aparente con el tiempo.

Fotografía simétrica Una fotografía tomada con la cámara estenopeica muestra ambos extremos de la varilla a la misma distancia del orificio.

2.5 (0.8) Determine la longitud aparente de la varilla en esta fotografía.

2.6 (1.0) ¿Cuál es la posición real del punto medio de la varilla en el instante en que se toma esta fotografía?

2.7 (1.2) ¿En qué posición aparece la imagen del punto medio de la varilla en la fotografía?

Fotografías muy temprana y muy tardía La cámara estenopeica tomó una fotografía muy temprana, cuando la varilla estaba muy lejos y se acercaba, y toma otra fotografía muy tarde, cuando la varilla está muy lejos y se aleja. En una de las fotografías la longitud aparente es 1.00 m, y en la otra es 3.00 m.

2.8 (0.5) Marque la casilla de la **Hoja de respuestas** para indicar qué longitud se observa en cada fotografía.

2.9 (1.0) Determine la velocidad v .

2.10 (0.6) Determine la longitud L de la varilla en reposo.

2.11 (0.4) Deduzca la longitud aparente en la fotografía simétrica.

2.4	Marque una opción: La longitud aparente ☐ aumenta al principio, alcanza un valor máximo y luego disminuye. ☐ disminuye al principio, alcanza un valor mínimo y luego aumenta. ☐ disminuye en todo momento. ☐ aumenta en todo momento.	1.5
------------	---	------------

	Fotografías muy temprana y muy tardía	Solo para uso de los examinadores
2.8	Marque una opción: ☐ La longitud aparente es de 1 m en la fotografía temprana y de 3 m en la fotografía tardía. ☐ La longitud aparente es de 3 m en la fotografía temprana y de 1 m en la fotografía tardía.	0.5

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Utilice las abreviaturas

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

• **2.1**

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

• **2.2**

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

• 2.3

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

• 2.4 Seleccione la **tercera casilla**: la longitud aparente **disminuye en todo momento**.

• 2.5

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

• 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

• 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left(R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Se encuentra a la derecha del centro geométrico de la imagen, hacia el extremo delantero.

• 2.8 Seleccione la **segunda casilla**: 3.00 m en la temprana, 1.00 m en la tardía.

• 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

en el sentido positivo del eje x .

• 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m}.$$

• 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m}.$$

Solución

Trabajamos en todo momento en el sistema de referencia en reposo respecto de la cámara, con la varilla moviéndose en el sentido positivo del eje x . La exposición es lo suficientemente breve como para que toda la luz que forma una fotografía llegue en el mismo instante t . La luz se propaga en línea recta con velocidad c .

La escala fija identifica la coordenada desde la que se emitió un rayo. Por tanto, $\tilde{x}$ es la posición del segmento en el momento de la emisión, mientras que x es su posición cuando la luz llega al orificio.

2.1

Supongamos que la luz se emitió en el instante t_e . Su distancia al orificio es

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

por lo que su tiempo de propagación es

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

Durante este intervalo, el segmento se desplaza $v(t - t_e)$. Por tanto,

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

lo que da

$$\boxed{x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.}$$

La relación se refiere a un solo segmento y es independiente de L .

2.2

Reordenando el resultado anterior y elevándolo al cuadrado se obtiene

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2(D^2 + \tilde{x}^2),$$

o bien

$$(1 - \beta^2)\tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2 D^2 = 0.$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado son

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

Para una velocidad positiva, la ecuación original, antes de elevarla al cuadrado, exige $x - \tilde{x} > 0$: el segmento avanza entre la emisión y la recepción. Esto selecciona el signo menos. Así pues, definimos

$$\boxed{\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).}$$

2.3

La longitud $\bar{L}$ dada es la longitud propia de la varilla. Por tanto, la relatividad especial da su longitud, medida simultáneamente en el sistema de referencia de la cámara, como

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

En el instante de la fotografía, las posiciones de sus extremos son

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

Sus posiciones aparentes son $f(x_-)$ y $f(x_+)$. Puesto que

$$f'(x) = \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

se conserva el orden de los extremos, y la longitud aparente es

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

La sustitución da

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Esto incluye tanto la contracción de Lorentz como los distintos tiempos de propagación de la luz desde los extremos.

2.4

Derivamos $f'(x)$:

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

Así, $f'(x)$ disminuye estrictamente con x . En consecuencia,

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

Puesto que $dx_0/dt = v > 0$,

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

Por tanto, la longitud aparente **disminuye en todo momento**. Seleccione la **tercera casilla**.

2.5

En la fotografía simétrica, las dos posiciones aparentes de los extremos son $-b$ y $+b$, porque sus distancias al orificio son iguales:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

La igualdad de las distancias recorridas y un instante común de llegada implican instantes de emisión iguales. Por tanto, la separación entre los extremos en el momento de la emisión es la longitud medida simultáneamente y contraída por el efecto de Lorentz:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

Así, $b = a$, y

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

2.6

En el instante común de emisión de los extremos, estos se encuentran en $-a$ y $+a$, por lo que el punto medio real de la varilla está en $x = 0$.

La luz procedente de ellos tarda un tiempo

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

en llegar al orificio. Durante este intervalo, el punto medio avanza $v\Delta t$. Por tanto, su posición real cuando se toma la fotografía es

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

2.7

Aplicamos la relación inversa a la posición real del punto medio de la varilla:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Usando $R^2 = D^2 + a^2$ y $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$,

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

Por tanto,

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

Racionalizando se obtiene la expresión equivalente

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Para el movimiento indicado, $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$. Así, el punto medio material aparece entre el centro geométrico de la imagen y su extremo derecho.

Su luz recorre una distancia menor que la luz de los extremos, por lo que se emite más tarde. En ese instante posterior de emisión, el punto medio material ya se ha desplazado hacia valores positivos de x .

2.8

Para las fotografías muy temprana y muy tardía, utilizamos el límite de grandes distancias

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

En la fotografía temprana, la varilla se acerca desde valores negativos de x . La ecuación 2.1 se convierte en

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

Aplicando esto a ambos extremos se obtiene la longitud aparente en la fotografía temprana

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

En la fotografía tardía, la varilla se aleja hacia valores positivos de x , de modo que

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

y

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

Como $\beta > 0$, $A > B$. Por tanto,

$$A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.$$

Seleccione la **segunda casilla**.

2.9

Tomando el cociente se elimina la longitud de la varilla:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Despejando,

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

Así,

$$v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

dirigida en el sentido positivo del eje x .

2.10

Multiplicando las longitudes aparentes temprana y tardía se obtiene

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

Por tanto,

$$L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.$$

2.11

Del apartado 2.5,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

Con $\beta = 1/2$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Usando la longitud propia sin redondear $L = \sqrt{3} \text{ m}$,

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Cinco estimaciones de orden de magnitud: Cámara digital, Huevo duro, Rayo, Vasos capilares, Rascacielos

Esta cuestión consta de cinco partes independientes. En cada una de ellas se pide únicamente una estimación de orden de magnitud, no una respuesta precisa. Anote todas sus respuestas en la **Hoja de respuestas**.

Cámara digital Considere una cámara digital con un chip CCD cuadrado de lado $L = 35 \text{ mm}$ que tiene $N_p = 5 \text{ Mpix}$ ($1 \text{ Mpix} = 10^6$ píxeles). El objetivo de esta cámara tiene una distancia focal de $f = 38 \text{ mm}$. La conocida secuencia de números (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) que aparecen en el objetivo corresponde al llamado número F , que se denota por $F\#$ y se define como el cociente entre la distancia focal y el diámetro D de la abertura del objetivo, $F\# = f/D$.

3.1 (1.0) Determine la mejor resolución espacial posible $\Delta x_{\min}$ de la cámara en el chip, limitada por el objetivo. Expresé el resultado en función de la longitud de onda λ y del número F $F\#$, y dé su valor numérico para $\lambda = 500 \text{ nm}$.

3.2 (0.5) Determine el número necesario N de Mpix que debería tener el chip CCD para alcanzar esta resolución óptima.

3.3 (0.5) A veces, los fotógrafos intentan utilizar una cámara con la menor abertura posible en la práctica. Suponga que ahora tenemos una cámara de $N_0 = 16 \text{ Mpix}$, con el tamaño del chip y la distancia focal indicados anteriormente. ¿Qué valor debe elegirse para $F\#$ para que la calidad de la imagen no esté limitada por la óptica?

3.4 (0.5) Sabiendo que el ojo humano tiene una resolución angular aproximada de $\phi = 2 \text{ arcmin}$ y que una impresora fotográfica típica imprime como mínimo a 300 dpi (puntos por pulgada), ¿a qué distancia mínima z de los ojos debe sostener la página impresa para no distinguir los puntos individuales?

Datos

1 pulgada	$= 25.4 \text{ mm}$
1 minuto de arco	$= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$

Huevo duro Se introduce un huevo, sacado directamente del frigorífico a una temperatura $T_0 = 4^\circ\text{C}$, en una olla con agua que se mantiene en ebullición a una temperatura T_1 .

3.5 (0.5) ¿Cuál es la cantidad de energía U necesaria para que el huevo coagule?

3.6 (0.5) ¿Cuál es la densidad de flujo de calor J que entra en el huevo?

3.7 (0.5) ¿Cuál es la potencia térmica P transferida al huevo?

3.8 (0.5) ¿Durante cuánto tiempo hay que cocer el huevo para que quede duro?

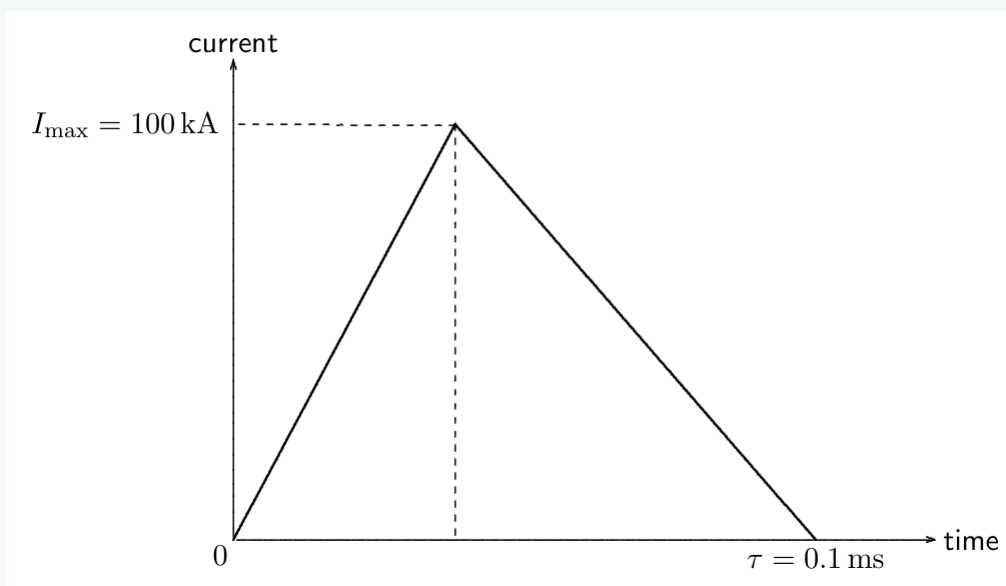
Indicación Puede utilizar la forma simplificada de la ley de Fourier $J = \kappa \Delta T / \Delta r$, donde ΔT es la diferencia de temperatura asociada a Δr , la escala de longitud característica del problema. La densidad de flujo de calor J se expresa en unidades de W m^{-2} .

Datos

Densidad de masa del huevo:	$\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
-----------------------------	--------------------------------

Calor específico del huevo:	$C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$
Radio del huevo:	$R = 2.5 \text{ cm}$
Temperatura de coagulación de la albúmina (proteína del huevo):	$T_c = 65^\circ \text{C}$
Conductividad térmica:	$\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (se supone igual para la albúmina líquida y sólida)

Rayo Se presenta un modelo muy simplificado del rayo. Los rayos se deben a la acumulación de carga electrostática en las nubes. Como consecuencia, la parte inferior de la nube suele cargarse positivamente y la parte superior negativamente, y el suelo situado bajo la nube se carga negativamente. Cuando el campo eléctrico correspondiente supera la rigidez dieléctrica del aire, se produce una descarga disruptiva: el rayo.



Pulso de corriente idealizado que circula entre la nube y el suelo durante un rayo.

Responda a las siguientes preguntas con ayuda de esta curva simplificada de la corriente en función del tiempo y de estos datos:

Distancia entre la parte inferior de la nube y el suelo:	$h = 1 \text{ km};$
Campo eléctrico de ruptura del aire húmedo:	$E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1};$
Número total de rayos que caen sobre la Tierra al año:	$32 \times 10^6;$
Población humana total:	$6.5 \times 10^9 \text{ personas.}$

3.9 (0.5) ¿Cuál es la carga total Q liberada por un rayo?

3.10 (0.5) ¿Cuál es la corriente media I que circula entre la parte inferior de la nube y el suelo durante un rayo?

3.11 (1.0) Imagine que se recoge la energía de todas las tormentas de un año y se reparte por igual entre todas las personas. ¿Durante cuánto tiempo podría mantener encendida de forma continua una bombilla de 100 W con la parte que le corresponde?

Vasos capilares Consideremos la sangre como un fluido viscoso incompresible cuya densidad de masa μ es similar a la del agua y cuya viscosidad dinámica es $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Modelizamos los vasos sanguíneos como tubos rectos de sección circular con radio r y longitud L , y describimos el flujo sanguíneo mediante la ley de Poiseuille,

$$\Delta p = RD,$$

el análogo en dinámica de fluidos de la ley de Ohm en electricidad. Aquí, Δp es la diferencia de presión entre la entrada y la salida del vaso sanguíneo, $D = Sv$ es el caudal volumétrico a través de la sección transversal de área S del vaso sanguíneo y v es la velocidad de la sangre. La resistencia hidráulica R viene dada por

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

Para la circulación sanguínea sistémica (la que va del ventrículo izquierdo a la aurícula derecha del corazón), el caudal sanguíneo es $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ en un hombre en reposo. Responda a las siguientes preguntas suponiendo que todos los vasos capilares están conectados en paralelo y que cada uno tiene un radio $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$ y una longitud $L = 1 \text{ mm}$, y está sometido a una diferencia de presión $\Delta p = 1 \text{ kPa}$.

3.12 (1.0) ¿Cuántos vasos capilares hay en el cuerpo humano?

3.13 (0.5) ¿Cuál es la velocidad v con la que circula la sangre por un vaso capilar?

Rascacielos En la base de un rascacielos de 1000 m de altura, la temperatura exterior es $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$. El objetivo es estimar la temperatura exterior T_{top} en la parte superior. Considere una capa delgada de aire (nitrógeno gaseoso ideal con coeficiente adiabático $\gamma = 7/5$) que asciende lentamente hasta una altura z , donde la presión es menor, y suponga que esta capa se expande adiabáticamente, de modo que su temperatura desciende hasta la del aire circundante.

3.14 (0.5) ¿Cómo se relaciona la variación relativa de temperatura dT/T con dp/p , la variación relativa de presión?

3.15 (0.5) Expresé la diferencia de presión dp en función de dz , la variación de altura.

3.16 (1.0) ¿Cuál es la temperatura resultante en la parte superior del edificio?

Datos

Constante de Boltzmann:	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Masa de una molécula de nitrógeno:	$m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$
Aceleración de la gravedad:	$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Las estimaciones principales utilizan la escala de difracción $\lambda F\#$, agua hirviendo a 100°C y $E_0 h$ como tensión característica del rayo.

- **3.1:** $\Delta x_{\text{min}} \sim \lambda F\#$. Con la mayor abertura disponible, $F\# = 2$, resulta $\boxed{1.0 \text{ }\mu\text{m}}$. El valor de Rayleigh para una abertura circular es $1.22 \text{ }\mu\text{m}$.

- 3.2: $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$, o $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$ con el coeficiente de Rayleigh.
- 3.3: $F\# = 16$ utilizando $\Delta x \sim \lambda F\#$. Una comparación estricta según el criterio de Rayleigh da $F\# = 11$.
- 3.4: $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$.
- 3.5: $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$.
- 3.6: $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$.
- 3.7: $P \sim 19 \text{ W}$.
- 3.8: $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$.
- 3.9: $Q = 5 \text{ C}$.
- 3.10: $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$.
- 3.11: $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$. Un modelo de condensador que se descarga por completo da aproximadamente 10 h.
- 3.12: $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$ vasos capilares.
- 3.13: $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$.
- 3.14: $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$.
- 3.15: $dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz$, donde ρ es la densidad local del aire.
- 3.16: $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}$.

Solución

3.1. Para un objetivo ideal, la difracción en la abertura limita la separación angular de los objetos distinguibles a la escala

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Para objetos lejanos, una separación angular θ corresponde a una separación $f\theta$ en el plano focal. Por tanto,

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

Para $\lambda = 500 \text{ nm}$,

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

La mejor resolución se obtiene con la mayor abertura, que corresponde al menor número F de la lista, $F\# = 2$. Su diámetro es $D = f/2 = 19 \text{ mm}$, lo que da

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \mu\text{m}.$$

Para una abertura circular, el criterio de Rayleigh da la expresión más precisa

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22\lambda F\#,$$

y, por tanto, $1.22 \mu\text{m}$ para $F\# = 2$. El coeficiente no es esencial para la estimación de orden de magnitud solicitada.

3.2. Para un chip cuadrado con píxeles cuadrados de paso a , el número total de píxeles es aproximadamente $(L/a)^2$. Al igualar el paso de los píxeles a la escala de resolución óptica se obtiene

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2.$$

Por tanto,

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

En megapíxeles,

$$\boxed{N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix.}}$$

Si se utiliza en cambio el valor de Rayleigh, se obtiene

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix.}$$

Ambas estimaciones requieren unos 10^3 Mpix.

3.3. El paso de los píxeles del chip de 16 Mpix es

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \mu\text{m}.$$

Para que la óptica no imponga una resolución más gruesa que la de los píxeles, se exige

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

Así,

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \mu\text{m}}{0.500 \mu\text{m}} = 17.5.$$

La menor abertura corresponde al mayor número F permitido. Entre los ajustes disponibles, esto da

$$\boxed{F\# = 16.}$$

Con este ajuste, la escala de difracción estimada es $8.0 \mu\text{m}$; para $F\# = 22$, sería $11 \mu\text{m}$.

Si se conserva el coeficiente de Rayleigh y se aplica la desigualdad estrictamente,

$$1.22\lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

El mayor ajuste de la lista pasa entonces a ser $F\# = 11$. Esta elección discreta depende de la convención utilizada para la resolución.

3.4. A 300 dpi , la separación entre puntos impresos adyacentes es

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

A una distancia de observación z , su separación angular es aproximadamente d/z . Dejan de distinguirse individualmente cuando

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

Utilizando

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

obtenemos

$$z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m}.$$

3.5. Tratamos el huevo como una esfera de densidad y calor específico uniformes. Despreciamos los efectos térmicos de la cáscara y cualquier entalpía adicional de coagulación, para la que no se proporcionan datos.

La masa del huevo es

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg}.$$

Convertimos el calor específico:

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

La energía necesaria para calentar el huevo desde T_0 hasta la temperatura de coagulación se estima mediante

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

Por tanto,

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J},$$

de modo que

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}.$$

3.6. Suponemos ebullición a presión atmosférica normal, de modo que $T_1 \approx 100^\circ\text{C}$. Para estimar una densidad de flujo de calor característica, tomamos como longitud de conducción el radio del huevo y como diferencia de temperatura la diferencia inicial entre el agua y el huevo:

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K}.$$

La ley de Fourier da entonces la magnitud de la densidad de flujo de calor hacia el interior

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

Por tanto,

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

El gradiente real de temperatura cambia durante la cocción; esta es su escala característica.

3.7. El calor entra a través de la superficie del huevo, cuya área es

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

En consecuencia,

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3) (7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

Así,

$$P \sim 19 \text{ W}.$$

3.8. Dividimos la energía necesaria para el calentamiento entre la potencia característica de transferencia de calor:

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

Al combinar las expresiones anteriores también se obtiene

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Numéricamente,

$$t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min.}$$

Esta estimación presenta la dependencia $t \propto R^2$ esperada para la difusión térmica.

3.9. La carga transferida es el área bajo la gráfica de corriente frente al tiempo:

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

El pulso es triangular, por lo que su área no depende del instante en que se alcanza el máximo:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

Con $I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$ y $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$,

$$Q = \frac{1}{2} (10^5) (10^{-4}) = 5 \text{ C.}$$

3.10. La corriente media durante el pulso es

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

Por tanto,

$$I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA.}$$

3.11. Aproximando el campo eléctrico entre la nube y el suelo como uniforme, la tensión de ruptura es

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3)(10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V.}$$

La energía eléctrica liberada es

$$W = \int V(t) I(t) dt.$$

Utilizando V_0 como tensión característica se obtiene

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

por rayo.

La parte de la energía anual que corresponde a cada persona es, por tanto,

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J.}$$

Una bombilla de 100 W consume 100 J cada segundo, de modo que

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h.}$$

Para un sistema nube-suelo modelizado como un condensador que se descarga por completo, la tensión disminuye con la carga restante. La energía liberada es entonces

$$W = \frac{1}{2} Q V_0,$$

lo que da aproximadamente $3.7 \times 10^4 \text{ s}$, o 10 h, por persona. Ambos modelos dan un tiempo de iluminación del orden de un día.

3.12. Las magnitudes pertinentes en el SI son

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m}, \\ \Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

La ley de Poiseuille da el caudal volumétrico a través de un capilar:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}.$$

Al sustituir se obtiene

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi (4 \times 10^{-6})^4 (10^3)}{8 (4.5 \times 10^{-3}) (10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Como los capilares idénticos están conectados en paralelo, todos están sometidos a la misma diferencia de presión y sus caudales volumétricos se suman:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

Así,

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13. La velocidad que aparece en $D = S v$ es la velocidad media sobre la sección transversal. Por tanto,

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8 \eta L}.$$

Numéricamente,

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

Por consiguiente,

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. Para una cantidad fija de gas ideal que experimenta una expansión adiabática cuasiestática,

$$p V^\gamma = \text{constante}.$$

Tomando diferenciales logarítmicos,

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

La ley de los gases ideales da $T \propto pV$, con T expresada en kelvin, por lo que

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

Así,

$$\boxed{\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

Tanto la presión como la temperatura disminuyen a medida que asciende la capa.

3.15. El equilibrio hidrostático de fuerzas sobre una capa horizontal delgada da

$$dp = -\rho g dz,$$

donde ρ es la densidad de masa local.

Para moléculas de nitrógeno de masa m , la ley de los gases ideales da

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

Por tanto,

$$\boxed{dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.}$$

3.16. Sustituimos el gradiente hidrostático de presión en la relación adiabática de temperatura:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz\right).$$

Al multiplicar por T , la temperatura se cancela en el miembro derecho, lo que da un gradiente térmico vertical constante:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

Con las constantes proporcionadas,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

A lo largo de $H = 1000 \text{ m}$, el descenso de temperatura es aproximadamente 9.4 K . Por consiguiente,

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}.}$$

La solución se comprobó con la solución oficial.