

IPhO 2006

Theorieaufgaben und Lösungen · Singapur · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2006/

Aufgabe 1: Gravitation in einem Neutroneninterferometer

Tragen Sie alle Ihre Antworten in den **Antwortbogen** ein.

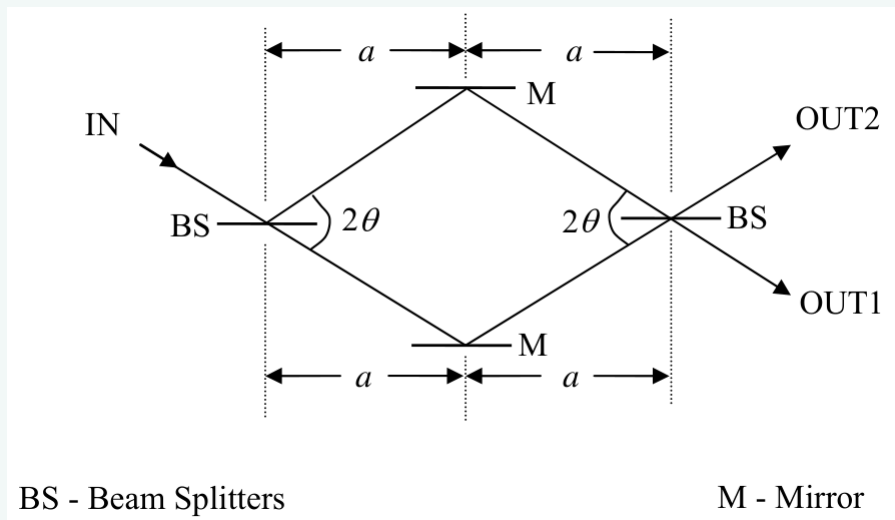


Abbildung 1a

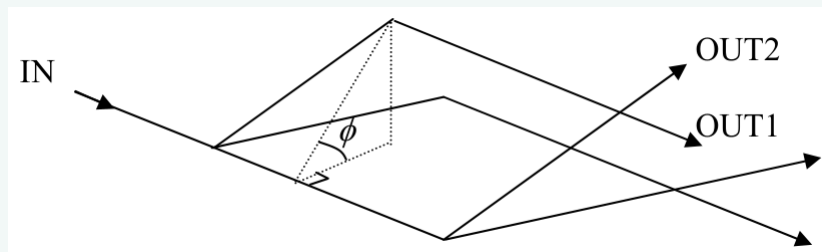


Abbildung 1b

Physikalische Situation Wir betrachten die Situation des berühmten Neutroneninterferometerexperiments von Colla, Overhauser und Werner, idealisieren den Aufbau jedoch insofern, als wir perfekte Strahlteiler und Spiegel innerhalb des Interferometers annehmen. Das Experiment untersucht den Einfluss der Schwerkraft auf die De-Broglie-Wellen von Neutronen.

Die schematische Darstellung dieses Interferometers in Analogie zu einem optischen Interferometer ist in Abbildung 1a gezeigt. Die Neutronen treten durch den Eingang IN in das Interferometer ein und folgen den beiden dargestellten Wegen. Die Neutronen werden an einem der beiden Ausgänge OUT1 oder OUT2 nachgewiesen. Die beiden Wege schließen eine rautenförmige Fläche ein, die typischerweise einige cm^2 groß ist.

Die De-Broglie-Wellen der Neutronen (mit einer typischen Wellenlänge von 10^{-10} m) interferieren so, dass alle Neutronen am Ausgang OUT1 austreten, wenn die Interferometerebene horizontal liegt. Wird das Interferometer jedoch um die Achse des einfallenden Neutronenstrahls um den Winkel ϕ gekippt (Abbildung 1b), beobachtet man eine von ϕ abhängige Umverteilung der Neutronen zwischen den beiden Ausgängen OUT1 und OUT2.

Geometrie Für $\phi = 0^\circ$ liegt die Interferometerebene horizontal; für $\phi = 90^\circ$ steht die Ebene vertikal, wobei sich die Ausgänge oberhalb der Kippachse befinden.

1.1 (1.0) Wie groß ist die rautenförmige Fläche A , die von den beiden Wegen des Interferometers eingeschlossen wird?

1.2 (1.0) In welcher Höhe H liegt der Ausgang OUT1 über der horizontalen Ebene durch die Kippachse?

Drücken Sie A und H durch a , θ und ϕ aus.

Optische Weglänge Die optische Weglänge N_{opt} (eine Zahl) ist das Verhältnis der geometrischen Weglänge (einer Strecke) zur Wellenlänge λ . Wenn sich λ entlang des Weges ändert, erhält man N_{opt} durch Integration von λ^{-1} entlang des Weges.

1.3 (3.0) Wie groß ist die Differenz ΔN_{opt} der optischen Weglängen der beiden Wege, wenn das Interferometer um den Winkel ϕ gekippt wurde? Drücken Sie Ihre Antwort durch a , θ und ϕ sowie durch die Neutronenmasse M , die De-Broglie-Wellenlänge λ_0 der einfallenden Neutronen, die Erdbeschleunigung g und die Planck-Konstante h aus.

1.4 (1.0) Führen Sie den Volumenparameter

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

ein und drücken Sie ΔN_{opt} ausschließlich durch A , V , λ_0 und ϕ aus. Geben Sie den Wert von V für $M = 1.675 \times 10^{-27}$ kg, $g = 9.800 \text{ m s}^{-2}$ und $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s an.

1.5 (2.0) Wie viele Zyklen – von hoher Intensität zu niedriger Intensität und zurück zu hoher Intensität – werden am Ausgang OUT1 durchlaufen, wenn ϕ von $\phi = -90^\circ$ auf $\phi = 90^\circ$ erhöht wird?

Experimentelle Daten Das Interferometer eines tatsächlich durchgeführten Experiments war durch $a = 3.600$ cm und $\theta = 22.10^\circ$ gekennzeichnet, und es wurden 19.00 vollständige Zyklen beobachtet.

1.6 (1.0) Wie groß war λ_0 in diesem Experiment?

1.7 (1.0) Wenn in einem weiteren Experiment derselben Art mit Neutronen der Wellenlänge $\lambda_0 = 0.2000$ nm 30.00 vollständige Zyklen beobachtet würden, wie groß wäre dann die Fläche A ?

Hinweis: Wenn $|\alpha x| \ll 1$, darf $(1 + x)^\alpha$ durch $1 + \alpha x$ ersetzt werden.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir definieren die vorzeichenbehaftete Differenz als $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{lower}} - N_{\text{upper}}$, wobei die Wege gemäß Abbildung 1a benannt sind. Die Ergebnisse für die Phase berücksichtigen die Änderung der gravitativen potenziellen Energie bis zur ersten Ordnung.

- 1.1: $A = 2a^2 \tan \theta$.
- 1.2: $H = 2a \sin \theta \sin \phi$.
- 1.3: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$.
- 1.4: $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi$, $V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.
- 1.5: $C = \frac{2A \lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$ Zyklen.
- 1.6: $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}$.
- 1.7: $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2$.

Lösung

1.1 — Eingeschlossene Fläche

Wir bezeichnen gemäß Abbildung 1a den Eingangsstrahlteiler mit O , den oberen Spiegel mit U , den unteren Spiegel mit D und den Ausgangsstrahlteiler mit R .

Jede Seite der Raute hat die Länge

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

Die horizontale Diagonale OR hat die Länge $2a$, während die dazu senkrechte Diagonale UD die Länge $2a \tan \theta$ hat. Daher gilt

$$A = \frac{1}{2} (2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

Durch das Kippen der Apparatur ändert sich diese Fläche nicht.

1.2 — Höhe von OUT1

Der einfallende Strahl verläuft auf derselben Geraden wie OD , sodass die Kippachse entlang OD liegt. Die gegenüberliegende Seite UR ist parallel zu dieser Achse.

Der innerhalb der Interferometerebene senkrecht zur Kippachse gemessene Abstand von R zur Kippachse ist

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

Wird die Ebene um ϕ gedreht, erhält dieser Abstand eine vertikale Komponente $d \sin \phi$. Somit gilt

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

Sowohl U als auch R liegen auf der Höhe H , während O und D auf der Höhe null bleiben. Der Strahl am Ausgang OUT1 ist parallel zur Kippachse und bleibt daher auf der Höhe H . Für negative ϕ ist H negativ.

1.3 — Differenz der optischen Weglängen

Wir verwenden die nichtrelativistische Mechanik, ein homogenes Gravitationsfeld und elastische Wechselwirkungen mit den ruhenden idealen optischen Elementen. Wir setzen die gravitative potenzielle Energie auf der Kippachse gleich null.

Der Impuls und die kinetische Energie der einfallenden Neutronen sind

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

Aus der Energieerhaltung auf der Höhe z folgt

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

Mit der De-Broglie-Beziehung ergibt sich daher für den Kehrwert der Wellenlänge

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

Wir berücksichtigen Terme bis zur ersten Ordnung im kleinen Verhältnis $Mg|z|/K_0$. Mit dem Hinweis ergibt sich dann

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

Bei dieser Genauigkeit verwenden wir die in der Abbildung dargestellten geraden Teilstrecken. Bei festen Endpunkten ist die zusätzliche geometrische Weglänge, die durch eine kleine gravitative Ablenkung entsteht, von zweiter Ordnung in dieser Ablenkung.

Die beiden ansteigenden Teilstrecken OU und DR haben beide die Länge ℓ , und ihre Höhen ändern sich auf identische Weise von 0 bis H . Daher sind ihre optischen Weglängen gleich:

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

Die übrigen Teilstrecken liegen auf konstanten Höhen: OD auf der Höhe null und UR auf der Höhe H . Folglich gilt

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

Da

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

lautet das gesuchte Ergebnis

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.$$

Für positive ϕ hat der obere Weg die kleinere optische Weglänge, weil die Neutronen auf seiner höher gelegenen Teilstrecke einen kleineren Impuls und damit eine größere Wellenlänge haben. Eine Umkehrung der Subtraktionskonvention kehrt das Vorzeichen um, ohne die Vorhersagen für die Interferenz zu verändern.

1.4 — Volumenparameter

Mit $A = 2a^2 \tan \theta$ und $V = h^2/(gM^2)$ gilt

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi.$$

Die Dimension von V ergibt sich aus

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2}) \text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

Numerisch ergibt sich

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

Somit gilt

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

1.5 — Anzahl der Intensitätszyklen

Eine optische Weglängendifferenz von eins entspricht einer relativen Phasenänderung von 2π :

$$\delta = 2\pi \Delta N_{\text{opt}}.$$

Die vorgegebene konstruktive Interferenz am Ausgang OUT1 bei $\phi = 0$ legt den konstanten Phasenversatz fest. Für die idealen Wege mit gleichen Amplituden gilt

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left(\pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

Maxima treten bei ganzzahligen Werten von ΔN_{opt} auf, Minima bei halbzahligen Werten. Jede Zunahme von ΔN_{opt} um eins erzeugt daher einen Intensitätszyklus.

Wenn ϕ von -90° auf 90° zunimmt, steigt $\sin \phi$ monoton von -1 auf 1 . Somit ist die Gesamtzahl der Zyklen

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left(-\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

Daher gilt mit derselben Genauigkeit erster Ordnung

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

1.6 — Wellenlänge der einfallenden Neutronen

Die Fläche im Experiment beträgt

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Löst man die Formel für die Zyklenzahl nach der Wellenlänge auf, erhält man

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

Mit $C = 19.00$ und ungerundeten Zwischenwerten ergibt sich

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Somit gilt

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

Die oben verwendete Näherung ist gut gerechtfertigt. Diese Neutronen haben die Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

und die größte Höhe ist $H_{\max} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$. Daher gilt

$$\frac{MgH_{\max}}{K_0} = \frac{2gH_{\max}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

1.7 — Fläche für das zweite Experiment

Durch Umstellen derselben Formel für die Zyklenzahl erhält man

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

Mit $C = 30.00$ und $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$ ergibt sich

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

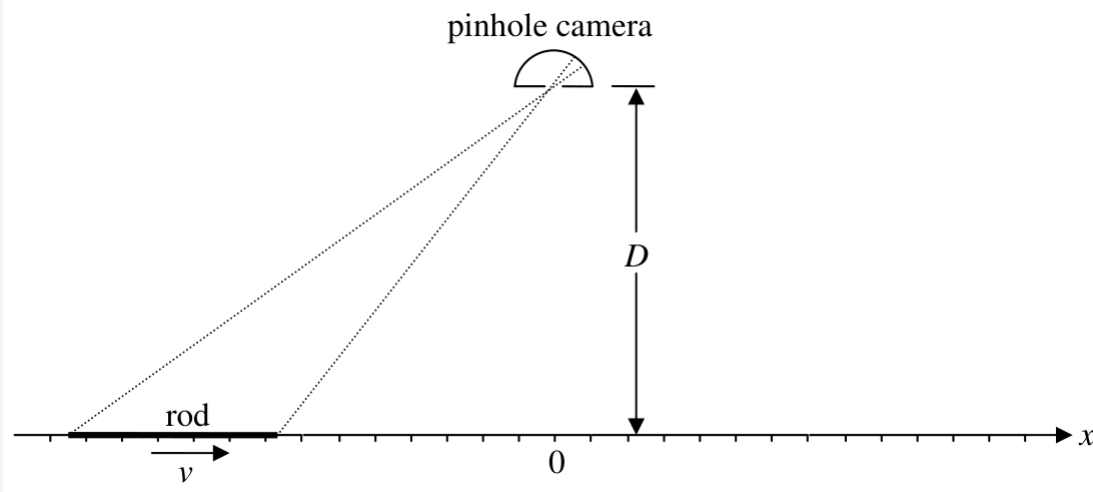
Somit gilt

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Beobachtung eines bewegten Stabes

Tragen Sie alle Ihre Antworten in den **Antwortbogen** ein.



Physikalische Situation Eine Lochkamera, deren Loch sich bei $x = 0$ im Abstand D von der x -Achse befindet, nimmt Bilder eines Stabes auf, indem das Loch für eine sehr kurze Zeit geöffnet wird. Entlang der x -Achse befinden sich Markierungen in gleichen Abständen, anhand derer sich die *scheinbare Länge* des Stabes, wie sie auf dem Bild erscheint, aus den Aufnahmen der Lochkamera bestimmen lässt. Auf einem Bild des *ruhenden* Stabes beträgt seine Länge L . Der Stab *ruht jedoch nicht*, sondern bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der x -Achse.

Grundlegende Beziehungen Ein mit der Lochkamera aufgenommenes Bild zeigt einen sehr kleinen Abschnitt des Stabes an der Position $\tilde{x}$.

2.1 (0.6) Wie lautet die *tatsächliche Position* x dieses Abschnitts zum Zeitpunkt der Aufnahme? Geben Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\tilde{x}$, D , L , v und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ an. Verwenden Sie die Größen

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

falls diese Ihr Ergebnis vereinfachen.

2.2 (0.9) Bestimmen Sie auch die entsprechende Umkehrbeziehung, das heißt: Drücken Sie $\tilde{x}$ durch x , D , L , v und c aus.

Hinweis: Die *tatsächliche Position* ist die Position in dem Bezugssystem, in dem die Kamera ruht

Scheinbare Länge des Stabes Die Lochkamera nimmt ein Bild zu dem Zeitpunkt auf, zu dem sich die tatsächliche Position des Stabmittelpunkts an einem Punkt x_0 befindet.

2.3 (1.5) Bestimmen Sie anhand der gegebenen Variablen die scheinbare Länge des Stabes auf diesem Bild.

2.4 (1.5) Kreuzen Sie eines der Kästchen im **Antwortbogen** an, um anzugeben, wie sich die scheinbare Länge mit der Zeit ändert.

Symmetrisches Bild Eine Aufnahme der Lochkamera zeigt beide Enden des Stabes im gleichen Abstand vom Loch.

2.5 (0.8) Bestimmen Sie die scheinbare Länge des Stabes auf diesem Bild.

2.6 (1.0) Wie lautet die tatsächliche Position der Mitte des Stabes zum Zeitpunkt dieser Aufnahme?

2.7 (1.2) An welcher Position zeigt das Bild die Abbildung der Mitte des Stabes?

Sehr frühe und sehr späte Aufnahmen Die Lochkamera hat sehr früh ein Bild aufgenommen, als der Stab sehr weit entfernt war und sich näherte, und nimmt sehr spät ein weiteres Bild auf, wenn der Stab sehr weit entfernt ist und sich entfernt. Auf einem der Bilder beträgt die scheinbare Länge 1.00 m, auf dem anderen 3.00 m.

2.8 (0.5) Kreuzen Sie das Kästchen im **Antwortbogen** an, das angibt, welche Länge auf welchem Bild zu sehen ist.

2.9 (1.0) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v .

2.10 (0.6) Bestimmen Sie die Länge L des ruhenden Stabes.

2.11 (0.4) Leiten Sie daraus die scheinbare Länge auf dem symmetrischen Bild ab.

2.4	Kreuzen Sie eine Antwort an: Die scheinbare Länge	1.5
	☐ nimmt zunächst zu, erreicht einen Höchstwert und nimmt dann ab.	
	☐ nimmt zunächst ab, erreicht einen Mindestwert und nimmt dann zu.	
	☐ nimmt die ganze Zeit ab.	
	☐ nimmt die ganze Zeit zu.	

	Sehr frühe und sehr späte Aufnahmen	Nur für die Korrektur
2.8	Kreuzen Sie eine Antwort an: ☐ Die scheinbare Länge beträgt auf der frühen Aufnahme 1 m und auf der späten Aufnahme 3 m. ☐ Die scheinbare Länge beträgt auf der frühen Aufnahme 3 m und auf der späten Aufnahme 1 m.	0.5

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Verwenden Sie die Abkürzungen

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

- **2.1**

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

- **2.2**

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

- 2.3

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

- 2.4 Kreuzen Sie das **dritte Kästchen** an: Die scheinbare Länge **nimmt die ganze Zeit ab**.

- 2.5

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

- 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

- 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left(R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Sie liegt rechts vom geometrischen Mittelpunkt der Abbildung, zum vorderen Ende hin.

- 2.8 Kreuzen Sie das **zweite Kästchen** an: 3.00 m **auf der frühen Aufnahme**, 1.00 m **auf der späten Aufnahme**.

- 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

in positiver x -Richtung.

- 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m}.$$

- 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m}.$$

Lösung

Wir arbeiten durchgehend im Ruhesystem der Kamera, wobei sich der Stab in positiver x -Richtung bewegt. Die Belichtungszeit ist so kurz, dass das gesamte Licht, das eine Aufnahme erzeugt, zur selben Zeit t eintrifft. Licht breitet sich geradlinig mit der Geschwindigkeit c aus.

Die ruhende Skala gibt die Koordinate an, von der ein Lichtstrahl ausgesandt wurde. Somit ist $\tilde{x}$ die Position des Abschnitts bei der Emission, während x seine Position ist, wenn das Licht das Loch erreicht.

2.1

Nehmen wir an, das Licht wurde zur Zeit t_e ausgesandt. Sein Abstand zum Loch beträgt

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

sodass für seine Laufzeit gilt:

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

Während dieses Zeitintervalls legt der Abschnitt die Strecke $v(t - t_e)$ zurück. Daher gilt

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

woraus folgt:

$$\boxed{x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.}$$

Die Beziehung betrifft einen einzelnen Abschnitt und ist unabhängig von L .

2.2

Umstellen und Quadrieren des vorherigen Ergebnisses ergibt

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2 (D^2 + \tilde{x}^2),$$

oder

$$(1 - \beta^2) \tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2 D^2 = 0.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung lauten

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

Für eine positive Geschwindigkeit verlangt die ursprüngliche, nicht quadrierte Gleichung $x - \tilde{x} > 0$: Der Abschnitt bewegt sich zwischen Emission und Empfang vorwärts. Damit ist das Minuszeichen zu wählen. Wir definieren daher

$$\boxed{\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).}$$

2.3

Die gegebene Größe L ist die Ruhelänge des Stabes. Nach der speziellen Relativitätstheorie beträgt seine bei gleichzeitiger Messung bestimmte Länge im Ruhesystem der Kamera daher

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

Zum Zeitpunkt der Aufnahme befinden sich seine Endpunkte an den Positionen

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

Ihre scheinbaren Positionen sind $f(x_-)$ und $f(x_+)$. Da

$$f'(x) = \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

bleibt die Reihenfolge der Endpunkte erhalten, und die scheinbare Länge beträgt

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

Einsetzen liefert

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Dies berücksichtigt sowohl die Lorentzkontraktion als auch die unterschiedlichen Lichtlaufzeiten von den Endpunkten.

2.4

Wir differenzieren $f'(x)$:

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

Somit nimmt $f'(x)$ mit wachsendem x streng monoton ab. Folglich gilt

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

Da $dx_0/dt = v > 0$, gilt

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

Die scheinbare Länge **nimmt daher die ganze Zeit ab**. Kreuzen Sie das **dritte Kästchen** an.

2.5

In der symmetrischen Aufnahme sind die beiden scheinbaren Positionen der Endpunkte $-b$ und $+b$, da ihre Abstände vom Loch gleich sind:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

Gleiche Laufstrecken und eine gemeinsame Ankunftszeit bedeuten gleiche Emissionszeiten. Der Abstand der Endpunkte bei der Emission ist daher die bei gleichzeitiger Messung bestimmte, lorentzkontrahierte Länge:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

Somit ist $b = a$, und es gilt

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

2.6

Zum gemeinsamen Emissionszeitpunkt der Endpunkte befinden sich diese bei $-a$ und $+a$, sodass die tatsächliche Mitte des Stabes bei $x = 0$ liegt.

Ihr Licht benötigt die Zeit

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

um das Loch zu erreichen. Während dieses Zeitintervalls bewegt sich die Mitte um $v\Delta t$ vorwärts. Ihre tatsächliche Position zum Zeitpunkt der Aufnahme ist daher

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

2.7

Wir wenden die Umkehrbeziehung auf die tatsächliche Position der Stabmitte an:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

Mit $R^2 = D^2 + a^2$ und $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$ gilt

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

Daher folgt

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

Durch Rationalisieren erhält man den gleichwertigen Ausdruck

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

Für die angegebene Bewegung gilt $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$. Der materielle Mittelpunkt erscheint somit zwischen dem geometrischen Mittelpunkt der Abbildung und ihrem rechten Endpunkt.

Sein Licht legt eine kürzere Strecke zurück als das Licht der Endpunkte und wird daher später ausgesandt. Bis zu diesem späteren Emissionszeitpunkt hat sich der materielle Mittelpunkt zu einem positiven x bewegt.

2.8

Für die sehr frühen und sehr späten Aufnahmen verwenden wir den Grenzfall großer Entfernungen

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

Auf der frühen Aufnahme nähert sich der Stab von negativen x -Werten her. Gleichung 2.1 wird zu

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

Wendet man dies auf beide Endpunkte an, erhält man für die scheinbare Länge auf der frühen Aufnahme

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

Auf der späten Aufnahme entfernt sich der Stab in Richtung positiver x -Werte, sodass gilt:

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

und

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

Wegen $\beta > 0$ gilt $A > B$. Daher ist

$$A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.$$

Kreuzen Sie das **zweite Kästchen** an.

2.9

Durch Bildung des Verhältnisses wird die Stablänge eliminiert:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

Auflösen ergibt

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

Somit gilt

$$v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

wobei die Geschwindigkeit in positive x -Richtung gerichtet ist.

2.10

Die Multiplikation der scheinbaren Längen auf der frühen und der späten Aufnahme ergibt

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

Daher gilt

$$L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.$$

2.11

Aus Teil 2.5 folgt

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

Mit $\beta = 1/2$ gilt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mit der ungerundeten Ruhelänge $L = \sqrt{3} \text{ m}$ erhält man

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Fünf Größenordnungsabschätzungen: Digitalkamera,

hartgekochtes Ei, Blitz, Kapillargefäße, Wolkenkratzer

Diese Aufgabe besteht aus fünf unabhängigen Teilen. In jedem davon wird lediglich eine Größenordnung abgeschätzt; eine genaue Antwort ist nicht erforderlich. Tragen Sie alle Ihre Antworten in den **Antwortbogen** ein.

Digitalkamera Betrachten Sie eine Digitalkamera mit einem quadratischen CCD-Chip der Seitenlänge $L = 35 \text{ mm}$ mit $N_p = 5 \text{ Mpix}$ ($1 \text{ Mpix} = 10^6 \text{ Pixel}$). Das Objektiv dieser Kamera hat eine Brennweite von $f = 38 \text{ mm}$. Die bekannte Zahlenfolge (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) auf dem Objektiv bezeichnet die sogenannte Blendenzahl, die mit $F\#$ bezeichnet wird und als Verhältnis der Brennweite zum Durchmesser D der Objektivöffnung definiert ist: $F\# = f/D$.

3.1 (1.0) Bestimmen Sie die bestmögliche räumliche Auflösung $\Delta x_{\min}$ der Kamera auf dem Chip, die durch das Objektiv begrenzt wird. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Wellenlänge λ und die Blendenzahl $F\#$ aus und geben Sie den Zahlenwert für $\lambda = 500 \text{ nm}$ an.

3.2 (0.5) Bestimmen Sie die erforderliche Anzahl N an Mpix, die der CCD-Chip besitzen sollte, um dieser optimalen Auflösung zu entsprechen.

3.3 (0.5) Fotografen versuchen manchmal, eine Kamera mit der kleinsten praktisch nutzbaren Blendenöffnung zu verwenden. Angenommen, wir haben nun eine Kamera mit $N_0 = 16 \text{ Mpix}$, deren Chipgröße und Brennweite den oben angegebenen Werten entsprechen. Welcher Wert ist für $F\#$ zu wählen, damit die Bildqualität nicht durch die Optik begrenzt wird?

3.4 (0.5) Das menschliche Auge hat eine Winkelauflösung von ungefähr $\phi = 2 \text{ arcmin}$, und ein typischer Fotodrucker druckt mit mindestens 300 dpi (Punkten pro Zoll). In welchem Mindestabstand z von Ihren Augen sollten Sie das bedruckte Blatt halten, damit Sie die einzelnen Punkte nicht sehen?

Daten

1 Zoll	$= 25.4 \text{ mm}$
1 Winkelminute	$= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$

Hartgekochtes Ei Ein Ei wird direkt aus dem Kühlschrank bei einer Temperatur von $T_0 = 4^\circ\text{C}$ entnommen und in einen Topf mit Wasser gegeben, das bei der Temperatur T_1 am Sieden gehalten wird.

3.5 (0.5) Wie groß ist die Energiemenge U , die benötigt wird, um das Ei zum Gerinnen zu bringen?

3.6 (0.5) Wie groß ist die Wärmestromdichte J , mit der Wärme in das Ei fließt?

3.7 (0.5) Wie groß ist die auf das Ei übertragene Wärmeleistung P ?

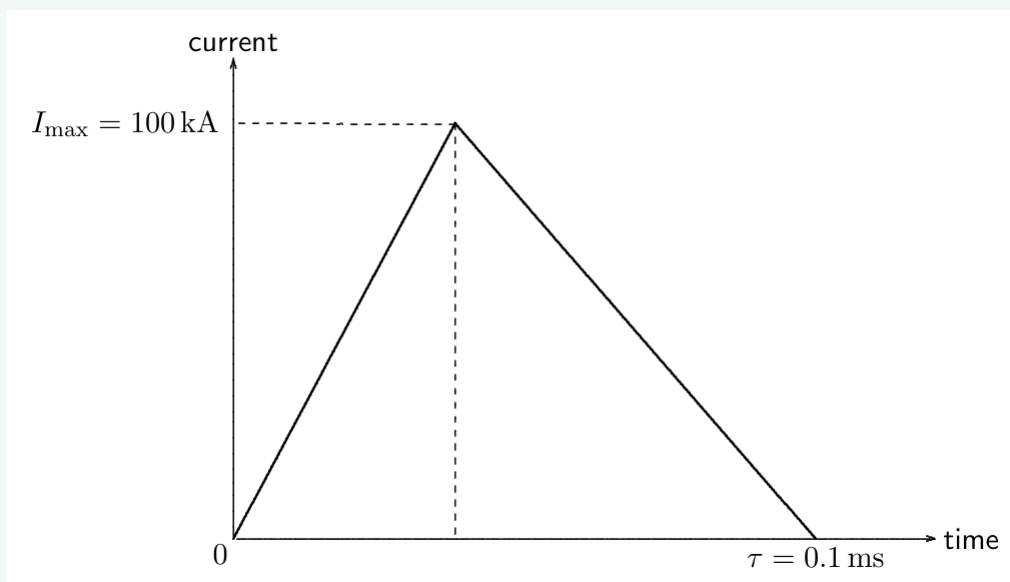
3.8 (0.5) Wie lange müssen Sie das Ei kochen, damit es hartgekocht ist?

Hinweis Sie dürfen die vereinfachte Form des Fourierschen Gesetzes $J = \kappa \Delta T / \Delta r$ verwenden. Dabei ist ΔT die Temperaturdifferenz über die Strecke Δr , die charakteristische Längenskala des Problems. Die Wärmestromdichte J wird in Einheiten von W m^{-2} angegeben.

Daten

Massendichte des Eis:	$\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Spezifische Wärmekapazität des Eis:	$C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$
Radius des Eis:	$R = 2.5 \text{ cm}$
Gerinnungstemperatur des Eiklars (Eiproteins):	$T_c = 65^\circ \text{C}$
Wärmeleitfähigkeit:	$\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (für flüssiges und festes Eiklar als gleich angenommen)

Blitz Es wird ein stark vereinfachtes Modell eines Blitzes vorgestellt. Blitze entstehen durch die Ansammlung elektrostatischer Ladung in Wolken. Dabei lädt sich die Unterseite der Wolke gewöhnlich positiv und die Oberseite negativ auf, während sich der Erdboden unter der Wolke negativ auflädt. Wenn das entsprechende elektrische Feld die Durchschlagsfeldstärke der Luft überschreitet, kommt es zu einer elektrischen Durchschlagsentladung: einem Blitz.



Idealisierter Stromimpuls, der während eines Blitzes zwischen der Wolke und dem Erdboden fließt.

Beantworten Sie die folgenden Fragen mithilfe dieser vereinfachten Kurve der Stromstärke als Funktion der Zeit und der folgenden Daten:

Abstand zwischen der Wolkenunterseite und dem Erdboden:	$h = 1 \text{ km};$
Durchschlagsfeldstärke feuchter Luft:	$E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1};$
Gesamtzahl der Blitzeinschläge auf der Erde pro Jahr:	$32 \times 10^6;$
Gesamtbevölkerung der Erde:	$6.5 \times 10^9 \text{ Menschen.}$

3.9 (0.5) Wie groß ist die gesamte bei einem Blitz freigesetzte Ladung Q ?

3.10 (0.5) Wie groß ist die mittlere Stromstärke I , die während eines Blitzes zwischen der Wolkenunterseite und dem Erdboden fließt?

3.11 (1.0) Stellen Sie sich vor, die Energie aller Gewitter eines Jahres würde gesammelt und gleichmäßig unter allen Menschen aufgeteilt. Wie lange könnten Sie mit Ihrem Anteil eine 100-W-Glühlampe ununterbrochen leuchten lassen?

Kapillargefäße Wir betrachten Blut als inkompressible viskose Flüssigkeit mit einer Massendichte μ , die der von Wasser ähnelt, und einer dynamischen Viskosität von $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Wir modellieren Blutgefäße als gerade Rohre mit kreisförmigem Querschnitt, Radius r und Länge L und beschreiben den Blutstrom durch das Hagen-Poiseuille-Gesetz,

$$\Delta p = RD,$$

das strömungsmechanische Analogon zum Ohmschen Gesetz der Elektrizitätslehre. Dabei ist Δp die Druckdifferenz zwischen Eintritt und Austritt des Blutgefäßes, $D = Sv$ der Volumenstrom durch die Querschnittsfläche S des Blutgefäßes und v die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes. Der hydraulische Widerstand R ist gegeben durch

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

Im Körperkreislauf (vom linken Ventrikel zum rechten Vorhof des Herzens) beträgt der Blutvolumenstrom bei einem ruhenden Mann $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen unter der Annahme, dass alle Kapillargefäße parallel geschaltet sind, jedes von ihnen den Radius $r = 4 \text{ }\mu\text{m}$ und die Länge $L = 1 \text{ mm}$ hat und an jedem eine Druckdifferenz von $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ anliegt.

3.12 (1.0) Wie viele Kapillargefäße gibt es im menschlichen Körper?

3.13 (0.5) Wie groß ist die Geschwindigkeit v , mit der das Blut durch ein Kapillargefäß fließt?

Wolkenkratzer Am Fuß eines 1000 m hohen Wolkenkratzers beträgt die Außentemperatur $T_{\text{bot}} = 30^\circ \text{C}$. Ziel ist es, die Außentemperatur T_{top} an der Spitze abzuschätzen. Betrachten Sie eine dünne Luftschicht (ideales Stickstoffgas mit dem Adiabatenexponenten $\gamma = 7/5$), die langsam bis zur Höhe z aufsteigt, wo der Druck niedriger ist. Nehmen Sie an, dass sich diese Schicht adiabatisch ausdehnt, sodass ihre Temperatur auf die Temperatur der umgebenden Luft sinkt.

3.14 (0.5) Wie hängt die relative Temperaturänderung dT/T mit der relativen Druckänderung dp/p zusammen?

3.15 (0.5) Drücken Sie die Druckdifferenz dp durch die Höhenänderung dz aus.

3.16 (1.0) Welche Temperatur ergibt sich an der Spitze des Gebäudes?

Daten

Boltzmann-Konstante:	$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Masse eines Stickstoffmoleküls:	$m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$
Erdbeschleunigung:	$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die Hauptabschätzungen verwenden die Beugungsskala $\lambda F\#$, siedendes Wasser bei 100°C und $E_0 h$ als charakteristische Spannung eines Blitzes.

- **3.1:** $\Delta x_{\min} \sim \lambda F\#$. Bei der größten verfügbaren Blendenöffnung, $F\# = 2$, ergibt sich $1.0 \mu\text{m}$. Der Rayleigh-Wert für eine kreisförmige Öffnung beträgt $1.22 \mu\text{m}$.
- **3.2:** $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$, beziehungsweise $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$ mit dem Rayleigh-Koeffizienten.
- **3.3:** $F\# = 16$ bei Verwendung von $\Delta x \sim \lambda F\#$. Ein strenger Vergleich nach dem Rayleigh-Kriterium ergibt $F\# = 11$.
- **3.4:** $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$.
- **3.5:** $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$.
- **3.6:** $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$.
- **3.7:** $P \sim 19 \text{ W}$.
- **3.8:** $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$.
- **3.9:** $Q = 5 \text{ C}$.
- **3.10:** $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$.
- **3.11:** $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$. Ein Modell mit einem sich vollständig entladenden Kondensator ergibt ungefähr 10 h.
- **3.12:** $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$ Kapillargefäße.
- **3.13:** $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$.
- **3.14:** $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$.
- **3.15:** $dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz$, wobei ρ die lokale Luftdichte ist.
- **3.16:** $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ\text{C}$.

Lösung

3.1. Bei einer idealen Linse begrenzt die Beugung an der Blendenöffnung den Winkelabstand unterscheidbarer Objekte auf die Größenordnung

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Bei weit entfernten Objekten entspricht ein Winkelabstand θ einem Abstand $f\theta$ in der Brennebene. Somit gilt

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

Bei $\lambda = 500 \text{ nm}$ gilt

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

Die beste Auflösung wird bei der größten Blendenöffnung erreicht, die der kleinsten aufgeführten Blendenzahl $F\# = 2$ entspricht. Ihr Durchmesser beträgt $D = f/2 = 19 \text{ mm}$, woraus folgt:

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \mu\text{m}.$$

Für eine kreisförmige Öffnung liefert das Rayleigh-Kriterium den genaueren Ausdruck

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22 \lambda F\#,$$

und damit $1.22 \mu\text{m}$ bei $F\# = 2$. Für die verlangte Größenordnungsabschätzung ist der Koeffizient nicht wesentlich.

3.2. Bei einem quadratischen Chip mit quadratischen Pixeln mit dem Rasterabstand a beträgt die Gesamtzahl der Pixel ungefähr $(L/a)^2$. Wird der Pixelabstand an die optische Auflösungsskala angepasst, ergibt sich

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{L}{\Delta x_{\text{min}}} \right)^2.$$

Daher gilt

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

In Megapixeln ergibt sich

$$\boxed{N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix.}}$$

Verwendet man stattdessen den Rayleigh-Wert, erhält man

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix.}$$

Beide Abschätzungen erfordern etwa 10^3 Mpix.

3.3. Der Pixelabstand des 16-Mpix-Chips beträgt

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \mu\text{m}.$$

Damit die Optik keine gröbere Auflösung als die Pixel vorgibt, muss gelten:

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

Somit gilt

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \mu\text{m}}{0.500 \mu\text{m}} = 17.5.$$

Die kleinste Blendenöffnung entspricht der größten zulässigen Blendenzahl. Unter den verfügbaren Einstellungen ergibt sich damit

$$\boxed{F\# = 16.}$$

Bei dieser Einstellung beträgt die abgeschätzte Beugungsskala $8.0 \mu\text{m}$; bei $F\# = 22$ wären es $11 \mu\text{m}$.

Wird der Rayleigh-Koeffizient beibehalten und die Ungleichung streng eingehalten, gilt

$$1.22 \lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

Die größte aufgeführte Einstellung ist dann $F\# = 11$. Diese diskrete Auswahl hängt von der verwendeten Auflösungskonvention ab.

3.4. Bei 300 dpi beträgt der Abstand benachbarter gedruckter Punkte

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

Bei einem Betrachtungsabstand z beträgt ihr Winkelabstand ungefähr d/z . Sie werden nicht mehr einzeln aufgelöst, wenn

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

Mit

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad,}$$

erhalten wir

$$z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m.}$$

3.5. Wir behandeln das Ei als Kugel mit einheitlicher Dichte und spezifischer Wärmekapazität. Die thermischen Einflüsse der Schale sowie eine zusätzliche Gerinnungsenthalpie, für die keine Daten angegeben sind, werden vernachlässigt.

Die Masse des Eis beträgt

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg.}$$

Wir rechnen die spezifische Wärmekapazität um:

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Die Energie, die benötigt wird, um das Ei von T_0 auf die Gerinnungstemperatur zu erwärmen, wird abgeschätzt durch

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

Daraus folgt

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J,}$$

also

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J.}$$

3.6. Wir nehmen Sieden bei normalem Atmosphärendruck an, sodass $T_1 \approx 100^\circ\text{C}$ gilt. Zur Abschätzung einer charakteristischen Wärmestromdichte setzen wir die Wärmeleitungslänge gleich dem Radius des Eis und die Temperaturdifferenz gleich der anfänglichen Temperaturdifferenz zwischen Wasser und Ei:

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K.}$$

Das Fouriersche Gesetz liefert dann für den Betrag der nach innen gerichteten Wärmestromdichte

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

Daher gilt

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Der tatsächliche Temperaturgradient ändert sich während des Kochens; dies ist seine charakteristische Größenordnung.

3.7. Wärme tritt durch die Oberfläche des Eis ein. Ihr Flächeninhalt beträgt

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Folglich gilt

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3) (7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

Somit ergibt sich

$$\boxed{P \sim 19 \text{ W.}}$$

3.8. Wir dividieren die erforderliche Heizenergie durch die charakteristische übertragene Wärmeleistung:

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

Durch Kombination der vorherigen Ausdrücke erhält man auch

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\boxed{t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min.}}$$

Diese Abschätzung zeigt die für Wärmediffusion erwartete Skalierung $t \propto R^2$.

3.9. Die übertragene Ladung entspricht der Fläche unter dem Stromstärke-Zeit-Diagramm:

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

Der Impuls ist dreieckig, daher ist seine Fläche unabhängig davon, wann das Maximum auftritt:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

Mit $I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$ und $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$ folgt

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} (10^5) (10^{-4}) = 5 \text{ C.}}$$

3.10. Die über die Impulsdauer gemittelte Stromstärke beträgt

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

Daher gilt

$$\boxed{I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA.}}$$

3.11. Nähern wir das elektrische Feld zwischen Wolke und Erdboden als homogen an, so beträgt die Spannung beim Durchschlag

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3) (10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V}.$$

Die freigesetzte elektrische Energie ist

$$W = \int V(t) I(t) dt.$$

Verwenden wir V_0 als charakteristische Spannung, ergibt sich

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

pro Blitzeinschlag.

Der jährliche Energieanteil pro Person beträgt daher

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J.}$$

Eine 100 W-Glühlampe verbraucht pro Sekunde 100 J, somit gilt

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h.}$$

Wird das System aus Wolke und Erdboden als Kondensator modelliert, der sich vollständig entlädt, so sinkt die Spannung mit der verbleibenden Ladung. Die freigesetzte Energie beträgt dann

$$W = \frac{1}{2} Q V_0,$$

woraus sich ungefähr $3.7 \times 10^4 \text{ s}$, also 10 h, pro Person ergeben. Beide Modelle liefern eine Leuchtdauer in der Größenordnung eines Tages.

3.12. Die relevanten Größen in SI-Einheiten sind

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m}, \\ \Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Das Hagen-Poiseuille-Gesetz liefert für den Volumenstrom durch eine einzelne Kapillare:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}.$$

Einsetzen ergibt

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi (4 \times 10^{-6})^4 (10^3)}{8 (4.5 \times 10^{-3}) (10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Da die identischen Kapillaren parallel geschaltet sind, liegt an jeder dieselbe Druckdifferenz an, und ihre Volumenströme addieren sich:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

Somit gilt

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13. Die in $D = S v$ auftretende Geschwindigkeit ist die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit. Daher gilt

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8 \eta L}.$$

Numerisch ergibt sich

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

Daraus folgt

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. Für eine feste Menge eines idealen Gases, das sich quasistatisch und adiabatisch ausdehnt, gilt

$$pV^\gamma = \text{konstant.}$$

Logarithmisches Differenzieren ergibt

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Das ideale Gasgesetz liefert $T \propto pV$, wobei T in Kelvin gemessen wird. Daher gilt

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

Sowohl Druck als auch Temperatur nehmen beim Aufsteigen der Schicht ab.

3.15. Das hydrostatische Kräftegleichgewicht an einer dünnen horizontalen Schicht liefert

$$dp = -\rho g dz,$$

wobei ρ die lokale Massendichte ist.

Für Stickstoffmoleküle der Masse m ergibt das ideale Gasgesetz

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

Daher gilt

$$dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.$$

3.16. Wir setzen den hydrostatischen Druckgradienten in die adiabatische Temperaturbeziehung ein:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz \right).$$

Nach Multiplikation mit T kürzt sich die Temperatur auf der rechten Seite heraus, sodass sich ein konstanter vertikaler Temperaturgradient ergibt:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

Mit den angegebenen Konstanten ergibt sich

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

Über $H = 1000 \text{ m}$ beträgt die Temperaturabnahme ungefähr 9.4 K . Daraus folgt

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

Daher gilt

$$T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.