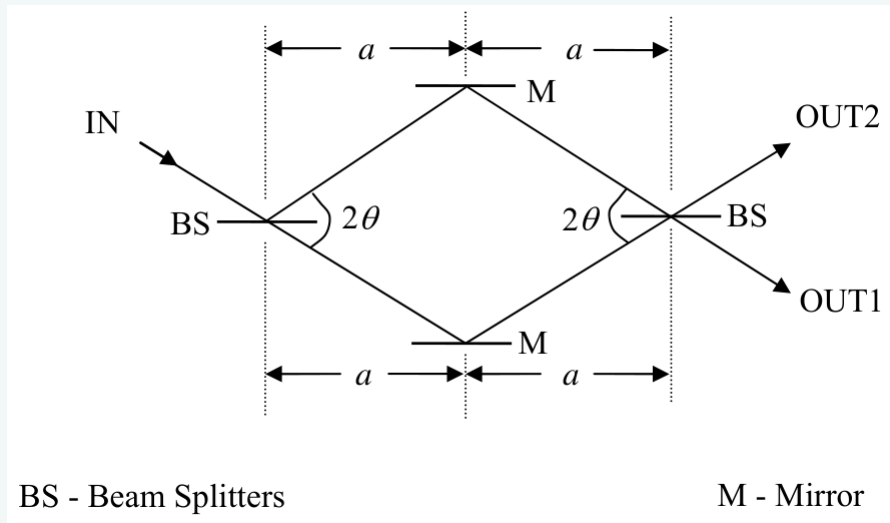
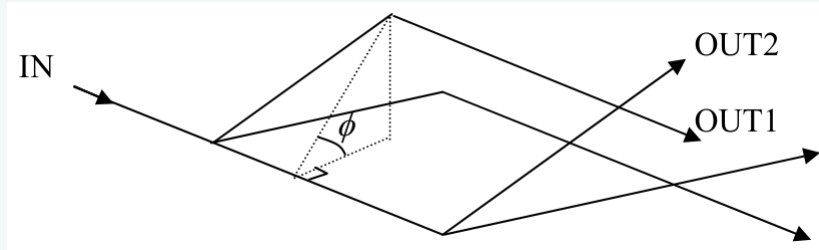


المسألة 1: الجاذبية في مقياس تداخل النيوترونات

دُون جميع إجاباتك في ورقة الإجابة.



الشكل 1a



الشكل 1b

الوضع الفيزيائي ندرس الوضع الذي تناولته تجربة كوليل وأوفرهاوزر وويرنر الشهيرة باستخدام مقياس تداخل النيوترونات، ولكننا نجعل التجهيز مثالياً بافتراض أن مقسّمات الحزمة والمرايا داخل مقياس التداخل مثالية. تدرس التجربة تأثير قوة الجاذبية في موجات دي برولي للنيوترونات.

يُبين الشكل 1a تمثيلاً رمزياً لمقياس التداخل هذا، على غرار مقياس التداخل الضوئي. تدخل النيوترونات مقياس التداخل عبر منفذ الدخول IN وتسلك المسارين المبيتين. وتُرصّد النيوترونات عند أحد منفذي الخروج، OUT1 أو OUT2. يحيط المساران بمساحة على شكل مُعين، تبلغ عادةً بضعة cm^2 .

تتداخل موجات دي برولي للنيوترونات (التي يبلغ طولها الموجي عادةً 10^{-10} m) بحيث تخرج جميع النيوترونات من منفذ الخروج OUT1 إذا كان مستوى مقياس التداخل أفقياً. ولكن عند إمالة مقياس التداخل حول محور حزمة النيوترونات الواردة بزاوية ϕ (الشكل 1b)، يُلاحظ إعادة توزّع النيوترونات بين منفذي الخروج OUT1 وOUT2 على نحو يعتمد على ϕ .

الهندسة عند $\phi = 0^\circ$ يكون مستوى مقياس التداخل أفقيًا؛ وعند $\phi = 90^\circ$ يكون المستوى رأسياً وتكون منافذ الخروج فوق محور الإمالة.

1.1 (1.0) ما مقدار المساحة A ذات الشكل المُعين التي يحيط بها مساراً مقياس التداخل؟

1.2 (1.0) ما ارتفاع H منفذ الخروج OUT1 فوق المستوى الأفقي الذي يمر بمحور الإمالة؟

عبر عن A و H بدلالة a و θ و ϕ .

طول المسار البصري طول المسار البصري N_{opt} (وهو عدد) هو نسبة طول المسار الهندسي (وهو مسافة) إلى الطول الموجي λ . إذا تغير λ على امتداد المسار، يُحسب N_{opt} بتكامل λ^{-1} على امتداد المسار.

1.3 (3.0) ما الفرق ΔN_{opt} بين طولي المسارين البصريين عند إمالة مقياس التداخل بزاوية ϕ ؟ عبر عن إجابتك بدلالة a و θ و ϕ ، وكذلك كتلة النيوترون M ، وطول موجة دي برولي λ_0 للنيوترونات الواردة، وتسارع الجاذبية g ، وثابت بلانك h .

1.4 (1.0) عرّف المعامل الحجمي

$$V = \frac{h^2}{gM^2}$$

وعبر عن ΔN_{opt} بدلالة A و V و λ_0 و ϕ فقط. اذكر قيمة V عندما تكون $M = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ، و $g = 9.800 \text{ m s}^{-2}$ ، و $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$.

1.5 (2.0) كم دورة — من شدة مرتفعة إلى شدة منخفضة ثم العودة إلى شدة مرتفعة — يُتمّها منفذ الخروج OUT1 عند زيادة ϕ من -90° إلى 90° ؟

البيانات التجريبية اتّسم مقياس التداخل في تجربة فعلية بالقيمتين $a = 3.600 \text{ cm}$ و $\theta = 22.10^\circ$ ، ورُصدت 19.00 دورة كاملة.

1.6 (1.0) ما مقدار λ_0 في هذه التجربة؟

1.7 (1.0) إذا رُصدت 30.00 دورة كاملة في تجربة أخرى من النوع نفسه تستخدم نيوترونات ذات $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm}$ ، فما مقدار المساحة A ؟

تلميح: إذا كان $|\alpha x| \ll 1$ ، يجوز استبدال $(1+x)^\alpha$ بـ $1 + \alpha x$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نعرف الفرق ΔN_{opt} بالإشارة بالعلاقة $\Delta N_{\text{opt}} = N_{\text{upper}} - N_{\text{lower}}$ ، مع تسمية المسارين وفقاً للشكل 1a. تحتفظ نتائج الطور بحدود الرتبة الأولى في تغيير طاقة وضع الجاذبية.

• **1.1:** $A = 2a^2 \tan \theta$.

• **1.2:** $H = 2a \sin \theta \sin \phi$.

• **1.3:** $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi$.

• **1.4:** $\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi$ ، $V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$.

• **1.5:** $C = \frac{2A \lambda_0}{V} = \frac{4M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta$ دورة.

• **1.6:** $\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}$.

• **1.7:** $A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2$.

الحل

1.1 — المساحة المحصورة

لنرمز إلى مقسّم الحزمة عند المدخل بـ O ، وإلى المرآة العلوية بـ U ، وإلى المرآة السفلية بـ D ، وإلى مقسّم الحزمة عند المخرج بـ R ، وفقاً للشكل 1a.

طول كل ضلع من أضلاع المَعْيَن هو

$$\ell = \frac{a}{\cos \theta}.$$

طول القطر الأفقي OR هو $2a$ ، بينما طول القطر العمودي عليه UD هو $2a \tan \theta$. ومن ثم،

$$A = \frac{1}{2}(2a)(2a \tan \theta) = 2a^2 \tan \theta.$$

لا تتغيّر هذه المساحة عند إمالة الجهاز.

1.2 — ارتفاع OUT1

تقع الحزمة الواردة على استقامة OD ، لذا يمتد محور الإمالة على طول OD . ويوازي الضلع المقابل UR هذا المحور.

المسافة العمودية، ضمن مستوى مقياس التداخل، من R إلى محور الإمالة هي

$$d = \ell \sin(2\theta) = \frac{a}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta.$$

يُكسب دوران المستوى بزاوية ϕ هذه المسافة مركبة رأسية $d \sin \phi$. ومن ثم

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi.$$

تقع كل من U و R على ارتفاع H ، بينما تبقى O و D عند ارتفاع يساوي صفراً. وحزمة OUT1 موازية لمحور الإمالة، لذا تبقى على ارتفاع H . وعندما تكون ϕ سالبة، يكون H سالباً.

1.3 — الفرق بين طولي المسارين البصريين

نستخدم الميكانيكا غير النسبية، ومجال جاذبية منتظماً، وتفاعلات مرنة مع العناصر البصرية المثالية الساكنة. ونجعل طاقة وضع الجاذبية مساوية للصفر على محور الإمالة.

زخم النيوترونات الواردة وطاقتها الحركية هما

$$p_0 = \frac{h}{\lambda_0}, \quad K_0 = \frac{h^2}{2M\lambda_0^2}.$$

يعطي انحفاظ الطاقة عند ارتفاع z

$$\frac{p(z)^2}{2M} + Mgz = \frac{p_0^2}{2M}.$$

وباستخدام علاقة دي برولي، يكون مقلوب الطول الموجي إذن

$$\frac{1}{\lambda(z)} = \frac{p(z)}{h} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 z}{h^2}}.$$

نحتفظ بحدود الرتبة الأولى في النسبة الصغيرة $Mg|z|/K_0$. وعندئذ يعطي التلميح

$$\frac{1}{\lambda(z)} \simeq \frac{1}{\lambda_0} - \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} z.$$

عند هذا المستوى من الدقة نستخدم المقاطع المستقيمة المبينة في الشكل. فعندما تكون نقطتا النهاية ثابتتين، تكون الزيادة في الطول الهندسي الناتجة عن انحراف صغير بفعل الجاذبية من الرتبة الثانية في ذلك الانحراف.

طول كل من المقطعين المائلين OU و DR هو ℓ ، وتتغير ارتفاعاتهما بالطريقة نفسها من 0 إلى H . لذا فإن طولي مساريهما البصريين متساويان:

$$J = \int_0^\ell \frac{ds}{\lambda(Hs/\ell)}.$$

أما المقطعان الباقيان فهما عند ارتفاعين ثابتين: يقع OD عند ارتفاع يساوي صفراً، ويقع UR عند ارتفاع H . وبناءً على ذلك،

$$N_{\text{lower}} = \frac{\ell}{\lambda_0} + J, \quad N_{\text{upper}} = J + \frac{\ell}{\lambda(H)}.$$

بالطرح،

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{opt}} &= \ell \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda(H)} \right) \\ &= \frac{\ell}{\lambda_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M^2 g \lambda_0^2 H}{h^2}} \right] \\ &\simeq \frac{M^2 g \lambda_0}{h^2} \ell H. \end{aligned}$$

وبما أن

$$\ell H = \frac{a}{\cos \theta} 2a \sin \theta \sin \phi = 2a^2 \tan \theta \sin \phi,$$

فإن النتيجة المطلوبة هي

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{2M^2 g a^2 \lambda_0}{h^2} \tan \theta \sin \phi.$$

عندما تكون ϕ موجبة، يكون الطول البصري للمسار العلوي أصغر، لأن زخم النيوترون في مقطعه المرتفع أصغر، ومن ثم يكون طوله الموجي أكبر. ويؤدي عكس اصطلاح الطرح إلى عكس الإشارة دون تغيير التنبؤات المتعلقة بالتداخل.

1.4 — المعامل الحجمي

باستخدام $A = 2a^2 \tan \theta$ و $V = h^2/(gM^2)$

$$\Delta N_{\text{opt}} \simeq \frac{A \lambda_0}{V} \sin \phi.$$

أبعاد V هي

$$[V] = \frac{(\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{(\text{m s}^{-2}) \text{kg}^2} = \text{m}^3.$$

عددياً،

$$V = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{9.800(1.675 \times 10^{-27})^2} = 1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

إن

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3.$$

1.5 — عدد دورات الشدة

يقابل فرق في طول المسار البصري مقداره واحد تغيراً في الطور النسبي مقداره 2π :

$$\delta = 2\pi \Delta N_{\text{opt}}.$$

يُحدّد التداخل البنّاء المعطى عند OUT1 عندما تكون $\phi = 0$ إزاحة الطور الثابتة. وللمسارين المتأولين ذوي السعتين المتساويتين،

$$\frac{I_{\text{OUT1}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1 + \cos \delta}{2} = \cos^2 \left(\pi \frac{A\lambda_0}{V} \sin \phi \right).$$

تحدث القيم العظمى عند قيم صحيحة لـ ΔN_{opt} ، والقيم الصغرى عند قيم تساوي عدداً صحيحاً مضافاً إليه نصف. ولذلك فإن كل زيادة بمقدار واحد في ΔN_{opt} تُنتج دورة واحدة للشدة.

عندما تزداد ϕ من -90° إلى 90° ، تزداد $\sin \phi$ رتيباً من -1 إلى 1 . ومن ثم يكون العدد الكلي للدورات

$$\begin{aligned} C &= \Delta N_{\text{opt}}(90^\circ) - \Delta N_{\text{opt}}(-90^\circ) \\ &= \frac{A\lambda_0}{V} - \left(-\frac{A\lambda_0}{V} \right). \end{aligned}$$

وعليه، ضمن دقة الرتبة الأولى نفسها،

$$C = \frac{2A\lambda_0}{V} = \frac{4M^2ga^2\lambda_0}{h^2} \tan \theta.$$

1.6 — الطول الموجي الوارد

المساحة في التجربة هي

$$A = 2(0.03600 \text{ m})^2 \tan(22.10^\circ) = 1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

بحل صيغة عدد الدورات لإيجاد الطول الموجي،

$$\lambda_0 = \frac{CV}{2A}.$$

باستخدام $C = 19.00$ والاحتفاظ بالقيم الوسيطة دون تقريب،

$$\lambda_0 = \frac{19.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(1.052502 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 1.441278 \dots \times 10^{-10} \text{ m}.$$

إذن

$$\lambda_0 = 1.441 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.1441 \text{ nm}.$$

التقريب المستخدم أعلاه مبرر جيداً. فسرعة هذه النيوترونات هي

$$v_0 = \frac{h}{M\lambda_0} \simeq 2.745 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

وأكبر ارتفاع هو $H_{\text{max}} = 2a \sin \theta \simeq 0.02709 \text{ m}$ ، ولذلك،

$$\frac{MgH_{\text{max}}}{K_0} = \frac{2gH_{\text{max}}}{v_0^2} \simeq 7.05 \times 10^{-8} \ll 1.$$

1.7 — المساحة في التجربة الثانية

بإعادة ترتيب صيغة عدد الدورات نفسها،

$$A = \frac{CV}{2\lambda_0}.$$

عند $C = 30.00$ و $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm} = 2.000 \times 10^{-10} \text{ m}$ ،

$$A = \frac{30.00(1.5967876 \dots \times 10^{-14} \text{ m}^3)}{2(2.000 \times 10^{-10} \text{ m})} = 1.1975907 \dots \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

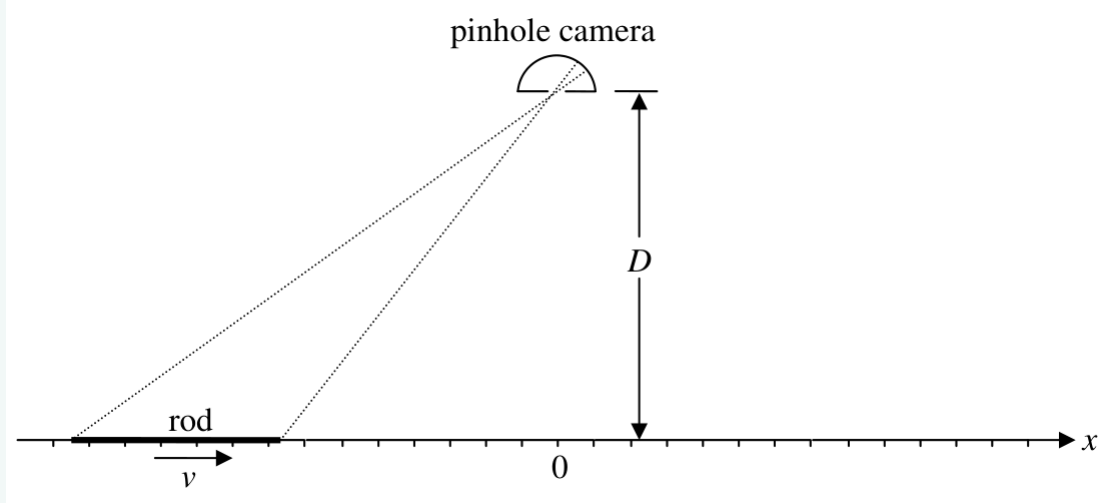
ومن ثم

$$A = 1.198 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 11.98 \text{ cm}^2.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مشاهدة قضيب متحرك

دوّن جميع إجاباتك في ورقة الإجابة.



الوضع الفيزيائي تلتقط كاميرا ذات ثقب، يقع ثقبها عند $x = 0$ وعلى مسافة D من محور x ، صورًا للقضيب، وذلك بفتح الثقب لمدة قصيرة جدًا. توجد علامات متساوية التباعد على طول محور x ، يمكن بواسطتها تحديد *الطول الظاهري* للقضيب، كما يبدو في الصورة، من الصور التي تلتقطها الكاميرا ذات الثقب. في صورة للقضيب وهو ساكن، يكون طوله L . لكن القضيب ليس ساكنًا، بل يتحرك بسرعة ثابتة v على طول محور x .

العلاقات الأساسية تُظهر صورة التقطتها الكاميرا ذات الثقب جزءًا صغيرًا جدًا من القضيب عند الموضع $\tilde{x}$.

2.1 (0.6) ما *الموضع الفعلي* x لهذا الجزء لحظة التقاط الصورة؟ عبّر عن إجابتك بدلالة $\tilde{x}$ و D و L و v وسرعة الضوء $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. استخدم الكميتين

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

إذا كانتا تساعدان على تبسيط نتيجتك.

2.2 (0.9) أوجد أيضًا العلاقة العكسية المقابلة، أي عبّر عن $\tilde{x}$ بدلالة x و D و L و v و c .

ملاحظة: *الموضع الفعلي* هو الموضع في الإطار المرجعي الذي تكون فيه الكاميرا ساكنة

الطول الظاهري للقضيب تلتقط الكاميرا ذات الثقب صورة في اللحظة التي يكون فيها الموضع الفعلي لمركز القضيب عند نقطة ما x_0 .

2.3 (1.5) حدّد، بدلالة المتغيرات المعطاة، *الطول الظاهري* للقضيب في هذه الصورة.

2.4 (1.5) ضع علامة في أحد المربعات في ورقة الإجابة لتبيّن كيف يتغير *الطول الظاهري* مع الزمن.

الصورة المتناظرة تُظهر إحدى صور الكاميرا ذات الثقب طرفي القضيب على المسافة نفسها من الثقب.

2.5 (0.8) حدّد *الطول الظاهري* للقضيب في هذه الصورة.

2.6 (1.0) ما *الموضع الفعلي* لمنتصف القضيب لحظة التقاط هذه الصورة؟

2.7 (1.2) أين تظهر صورة منتصف القضيب في هذه الصورة؟

صورتان في وقت مبكر جداً ووقت متأخر جداً التقطت الكاميرا ذات الثقب صورة في وقت مبكر جداً، عندما كان القضيب بعيداً جداً ويقترب، وتلتقط صورة أخرى في وقت متأخر جداً، عندما يكون القضيب بعيداً جداً ويبتعد. في إحدى الصورتين يبلغ الطول الظاهري 1.00 m، وفي الصورة الأخرى يبلغ 3.00 m.

2.8 (0.5) ضع علامة في المربع في ورقة الإجابة لتبين أيّ الطولين يظهر في كل صورة.

2.9 (1.0) حدّد السرعة v .

2.10 (0.6) حدّد طول القضيب L في حالة السكون.

2.11 (0.4) استنتج الطول الظاهري في الصورة المتناظرة.

1.5	اختر إجابة واحدة: الطول الظاهري
	□ يزداد أولاً، ويبلغ قيمة عظمى، ثم يتناقص.
	□ يتناقص أولاً، ويبلغ قيمة صغرى، ثم يزداد.
	□ يتناقص طوال الوقت.
	□ يزداد طوال الوقت.

لاستخدام المصححين فقط	صورتان في وقت مبكر جداً ووقت متأخر جداً
0.5	اختر إجابة واحدة:
	2.8 □ الطول الظاهري هو 1 m في الصورة المبكرة و 3 m في الصورة المتأخرة. □ الطول الظاهري هو 3 m في الصورة المبكرة و 1 m في الصورة المتأخرة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

استخدم الاختصارات

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad a = \frac{L}{2\gamma}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2}.$$

2.1 •

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

2.2 •

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

2.3 •

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

2.4 • اختر المربع الثالث: الطول الظاهري يتناقص طوال الوقت.

2.5 •

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

• 2.6

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

• 2.7

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left(R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right) = \frac{\beta a^2}{R + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

يقع إلى يمين المركز الهندسي للصورة، باتجاه الطرف المتقدم.

• 2.8 اختر المربع الثاني: 3.00 m في الصورة المبكرة، و 1.00 m في الصورة المتأخرة.

• 2.9

$$v = 0.500c = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

في اتجاه x الموجب.

• 2.10

$$L = \sqrt{3} \text{ m} = 1.73 \text{ m}.$$

• 2.11

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 1.50 \text{ m}.$$

الحل

نعمل طوال الحل في إطار سكون الكاميرا، مع تحرك القضيب في اتجاه x الموجب. مدة التعريض قصيرة بما يكفي لوصول كل الضوء الذي يشكّل صورة واحدة في الوقت نفسه t . ينتشر الضوء على خطوط مستقيمة بسرعة c .

يحدّد التدرج الساكن الإحداثي الذي انبعث منه الشعاع. ومن ثم فإن $\tilde{x}$ هو موضع الجزء عند الانبعاث، بينما x هو موضعه عندما يصل الضوء إلى الثقب.

2.1

نفترض أن الضوء انبعث في الزمن t_e . المسافة التي تفصله عن الثقب هي

$$r = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

ومن ثم فإن زمن انتقاله هو

$$t - t_e = \frac{r}{c}.$$

خلال هذه الفترة يتحرك الجزء مسافة $v(t - t_e)$. لذلك

$$x = \tilde{x} + v(t - t_e) = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2},$$

فنحصل على

$$x = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}.$$

تخص هذه العلاقة جزءاً واحداً، وهي مستقلة عن L .

2.2

بإعادة ترتيب النتيجة السابقة وتربيعها نحصل على

$$(x - \tilde{x})^2 = \beta^2(D^2 + \tilde{x}^2),$$

أو

$$(1 - \beta^2)\tilde{x}^2 - 2x\tilde{x} + x^2 - \beta^2 D^2 = 0.$$

جذرا المعادلة التربيعية هما

$$\tilde{x} = \gamma^2 \left(x \pm \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

عندما تكون السرعة موجبة، تقتضي المعادلة الأصلية، قبل تربيعها، أن يكون $x - \tilde{x} > 0$: فالجزء يتقدم بين الانبعاث والاستقبال. وهذا يحدد إشارة الطرح. ومن ثم نعرّف

$$\tilde{x} = f(x) = \gamma^2 \left(x - \beta \sqrt{x^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right).$$

2.3

الطول المعطى L هو طول القضيب في حالة السكون. لذا تعطي النسبية الخاصة طوله المقاس بتحديد موضعي طرفيه في اللحظة نفسها في إطار الكاميرا على الصورة

$$\ell = \frac{L}{\gamma}.$$

في لحظة التقاط الصورة، يكون موضعاً طرفيه

$$x_- = x_0 - a, \quad x_+ = x_0 + a, \quad a = \frac{\ell}{2} = \frac{L}{2\gamma}.$$

وموضعاهما الظاهريان هما $f(x_-)$ و $f(x_+)$. وبما أن

$$f'(x) = \gamma^2 \left(1 - \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + D^2/\gamma^2}} \right) > 0,$$

فإن ترتيب الطرفين محفوظ، والطول الظاهري هو

$$\tilde{L}(x_0) = f(x_0 + a) - f(x_0 - a).$$

بالتعويض نحصل على

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L - \beta \gamma^2 \left[\sqrt{(x_0 + a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} - \sqrt{(x_0 - a)^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

يشمل ذلك كلاً من انكماش لورنتز واختلاف زمني انتقال الضوء من الطرفين.

2.4

نشتق $f'(x)$:

$$f''(x) = -\frac{\beta D^2}{(x^2 + D^2/\gamma^2)^{3/2}} < 0.$$

إن تنقص $f'(x)$ تناقصاً صارماً مع x . وبناءً عليه،

$$\frac{d\tilde{L}}{dx_0} = f'(x_0 + a) - f'(x_0 - a) < 0.$$

وبما أن $dx_0/dt = v > 0$ ، فإن

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} < 0.$$

لذلك فإن الطول الظاهري يتناقص طوال الوقت. اختر المربع الثالث.

2.5

في الصورة المتناظرة، يكون الموضعان الظاهريان للطرفين هما $-b$ و $+b$ ، لأن مسافتيهما من الثقب متساويتان:

$$r_- = r_+ = \sqrt{D^2 + b^2}.$$

إن تساوي مسافتي انتقال الضوء ووصوله في وقت واحد يقتضيان تساوي وقتي الانبعاث. لذا فإن المسافة بين الطرفين عند الانبعاث هي الطول المنكمش وفق لورنتز، المقاس بتحديد موضعي الطرفين في اللحظة نفسها:

$$2b = \frac{L}{\gamma}.$$

إذن $b = a$ ، و

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = 2a = \frac{L}{\gamma}.$$

2.6

عند وقت الانبعاث المشترك للطرفين، يكون الطرفان عند $-a$ و $+a$ ، ومن ثم يكون المنتصف الفعلي للقضيبي عند $x = 0$. يستغرق الضوء الصادر منهما زمناً

$$\Delta t = \frac{R}{c}, \quad R = \sqrt{D^2 + a^2},$$

ليصل إلى الثقب. وخلال هذه الفترة يتقدم المنتصف مسافة $v\Delta t$. لذلك يكون موضعه الفعلي عند التقاط الصورة

$$x_{0,\text{sym}} = \beta R = \beta \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}}.$$

2.7

نطبق العلاقة العكسية على الموضع الفعلي لمنتصف القضيبي:

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = f(\beta R) = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2}} \right].$$

باستخدام $R^2 = D^2 + a^2$ و $1/\gamma^2 = 1 - \beta^2$

$$\beta^2 R^2 + \frac{D^2}{\gamma^2} = D^2 + \beta^2 a^2.$$

ومن ثم

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \beta \gamma^2 \left[R - \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2} \right].$$

بالضرب والقسمة في المرافق نحصل على التعبير المكافئ

$$\tilde{x}_{\text{mid}} = \frac{\beta a^2}{\sqrt{D^2 + a^2} + \sqrt{D^2 + \beta^2 a^2}}.$$

بالنسبة إلى الحركة المذكورة، $0 < \tilde{x}_{\text{mid}} < a$. لذا تظهر النقطة المادية الواقعة في منتصف القضيب بين المركز الهندسي للصورة وطرفها الأيمن.

يقطع الضوء الصادر منها مسافة أقصر من الضوء الصادر من الطرفين، ولذلك ينبعث في وقت لاحق. وبحلول وقت الانبعاث اللاحق هذا، تكون النقطة المادية الواقعة في منتصف القضيب قد انتقلت إلى موضع ذي x موجب.

2.8

بالنسبة إلى الصورتين الملتقطتين في وقت مبكر جداً ووقت متأخر جداً، نستخدم تقريب المسافات البعيدة

$$\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} \simeq |\tilde{x}|.$$

في الصورة المبكرة يقترب القضيب من جهة x السالبة. وتصبح المعادلة 2.1

$$x \simeq (1 - \beta)\tilde{x}.$$

بتطبيق ذلك على الطرفين نحصل على الطول الظاهري في الصورة المبكرة

$$A \equiv \tilde{L}_{\text{early}} = \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{L}{\gamma(1 - \beta)}.$$

في الصورة المتأخرة يبتعد القضيب نحو جهة x الموجب، لذا

$$x \simeq (1 + \beta)\tilde{x},$$

و

$$B \equiv \tilde{L}_{\text{late}} = \frac{\ell}{1 + \beta} = \frac{L}{\gamma(1 + \beta)}.$$

لأن $\beta > 0$ ، فإن $A > B$. ولذلك

$$A = 3.00 \text{ m}, \quad B = 1.00 \text{ m}.$$

اختر المربع الثاني.

2.9

بأخذ النسبة نتخلص من طول القضيب:

$$\frac{A}{B} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

بحل المعادلة،

$$\beta = \frac{A - B}{A + B} = \frac{3.00 - 1.00}{3.00 + 1.00} = 0.500.$$

إذن

$$v = \beta c = 0.500(3.00 \times 10^8) = 1.50 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

وتتجه على امتداد x الموجب.

2.10

بضرب الطولين الظاهريين في الصورتين المبكرة والمتأخرة نحصل على

$$AB = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)} = \frac{L^2}{\gamma^2(1 - \beta^2)} = L^2.$$

ولذلك

$$L = \sqrt{AB} = \sqrt{(3.00 \text{ m})(1.00 \text{ m})} = 1.73 \text{ m}.$$

2.11

من الجزء 2.5،

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{L}{\gamma}.$$

عندما تكون $\beta = 1/2$ ،

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

باستخدام طول السكون دون تقريب $L = \sqrt{3} \text{ m}$ ،

$$\tilde{L}_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} \text{ m} = 1.50 \text{ m}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: خمسة تقديرات لرتبة المقدار: الكاميرا الرقمية، البيضة المسلوقة جيداً، البرق، الأوعية الشعرية، ناطحة السحاب

يتألف هذا السؤال من خمسة أجزاء مستقلة. ويطلب في كل منها تقدير رتبة المقدار فقط، وليس إجابة دقيقة. دون جميع إجاباتك في كراسة الإجابة.

الكاميرا الرقمية لننظر في كاميرا رقمية ذات شريحة CCD مربعة طول ضلعها $L = 35 \text{ mm}$ ، وتحتوي على $N_p = 5 \text{ Mpix}$ ($1 \text{ Mpix} = 10^6$ بكسل). البعد البؤري لعدسة هذه الكاميرا هو $f = 38 \text{ mm}$. تشير سلسلة الأعداد المعروفة (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22) التي تظهر على العدسة إلى ما يسمى بالعدد البؤري، الذي يُرمز إليه بـ $F\#$ ، ويُعرف بأنه نسبة البعد البؤري إلى قطر فتحة العدسة D ، أي $F\# = f/D$.

3.1 (1.0) أوجد أفضل استبانة مكانية ممكنة Δx_{min} للكاميرا عند الشريحة، كما تحددها العدسة. عبّر عن نتيجتك بدلالة الطول الموجي λ والعدد البؤري $F\#$ ، وأعطِ القيمة العددية عند $\lambda = 500 \text{ nm}$.

3.2 (0.5) أوجد العدد اللازم N من الميغابكسلات الذي ينبغي أن تحتوي عليه شريحة CCD لكي تتوافق مع هذه الاستبانة المثلى.

3.3 (0.5) يحاول المصورون أحياناً استخدام الكاميرا بأصغر فتحة عملية ممكنة. افترض أن لدينا الآن كاميرا ذات $N_0 = 16 \text{ Mpix}$ ، وبحجم الشريحة والبعد البؤري المعطيين أعلاه. ما القيمة التي يجب اختيارها للعدد $F\#$ بحيث لا تكون المنظومة البصرية هي العامل المحدد لجودة الصورة؟

3.4 (0.5) إذا علمت أن الاستبانة الزاوية التقريبية للعين البشرية هي $\phi = 2 \text{ arcmin}$ ، وأن طابعة الصور المعتادة تطبع بدقة لا تقل عن 300 dpi (نقطة لكل بوصة)، فما أقل مسافة z ينبغي أن تبعد بها الصفحة المطبوعة عن عينيك حتى لا ترى النقاط منفردة؟

المعطيات

1 بوصة	$= 25.4 \text{ mm}$
1 دقيقة قوسية	$= 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$

البيضة المسلوقة جيداً تُؤخذ بيضة مباشرة من الثلاجة عند درجة حرارة $T_0 = 4^\circ \text{C}$ ، وتُسقط في قدر يحتوي على ماء يُحافظ على غليانه عند درجة حرارة T_1 .

3.5 (0.5) ما مقدار الطاقة U اللازمة لتخثر البيضة؟

3.6 (0.5) ما مقدار الفيض الحراري J المتجه إلى داخل البيضة؟

3.7 (0.5) ما مقدار القدرة الحرارية P المنقولة إلى البيضة؟

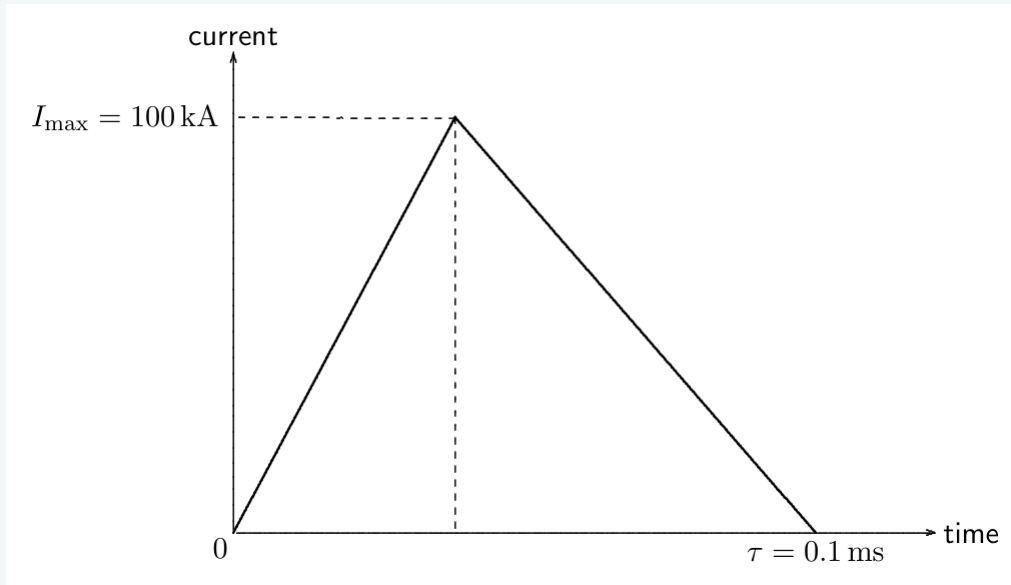
3.8 (0.5) ما المدة اللازمة لطهو البيضة حتى تصبح مسلوقة جيداً؟

تلميح يمكنك استخدام الصيغة المبسطة لقانون فورييه $J = \kappa \Delta T / \Delta r$ ، حيث ΔT هو فرق درجة الحرارة المرتبط بـ Δr ، وهو مقياس الطول المميز للمسألة. يُقاس الفيض الحراري J بوحدة W m^{-2} .

المعطيات

$\mu = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$	الكثافة الكتلية للبيضة:
$C = 4.2 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$	السعة الحرارية النوعية للبيضة:
$R = 2.5 \text{ cm}$	نصف قطر البيضة:
$T_c = 65^\circ \text{C}$	درجة حرارة تخثر الزلال (بروتين البيض):
$\kappa = 0.64 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (يُفترض أنه متساوٍ للزلال السائل والصلب)	معامل التوصيل الحراري:

البرق نعرض هنا نموذجاً شديداً التبسيط للبرق. ينشأ البرق عن تراكم الشحنة الكهروستاتيكية في السحب. ونتيجة لذلك، يُشحن أسفل السحابة عادةً بشحنة موجبة، ويُشحن أعلاها بشحنة سالبة، كما تُشحن الأرض تحت السحابة بشحنة سالبة. وعندما يتجاوز المجال الكهربائي الناتج قيمة شدة الانهيار الكهربائي للهواء، يحدث تفريغ كهربائي انهيار: وهذا هو البرق.



نبضة تيار مثالية تسري بين السحابة والأرض أثناء البرق.

أجب عن الأسئلة الآتية مستعيناً بهذا المنحنى المبسط للتيار بدلالة الزمن وبالمعطيات التالية:

$h = 1 \text{ km}$	المسافة بين أسفل السحابة والأرض:
$E_0 = 300 \text{ kV m}^{-1}$	مجال الانهيار الكهربائي للهواء الرطب:
32×10^6	العدد الإجمالي للصواعق التي تضرب الأرض سنوياً:
6.5×10^9 نسمة.	العدد الإجمالي لسكان العالم:

3.9 (0.5) ما الشحنة الكلية Q التي يفرغها البرق؟

3.10 (0.5) ما متوسط التيار I الذي يسري بين أسفل السحابة والأرض أثناء البرق؟

3.11 (1.0) تخيل أن طاقة جميع العواصف خلال سنة واحدة تُجمَع وتُوزَّع بالتساوي على جميع الناس. ما المدة التي يمكنك خلالها إضاءة مصباح قدرته 100 W بصورة متواصلة باستخدام حصتك؟

الأوعية الشعرية لنعبر الدم مائعاً لزجاً غير قابل للانضغاط، كثافته الكتلية μ مماثلة لكثافة الماء، ولزوجته الديناميكية $\eta = 4.5 \text{ g m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. نمثل الأوعية الدموية بأنابيب مستقيمة دائرية المقطع، نصف قطرها r وطولها L ، ونصف جريان الدم بقانون بواسوي،

$$\Delta p = RD,$$

وهو النظير في ديناميكا الموائع لقانون أوم في الكهرباء. هنا Δp هو فرق الضغط بين مدخل الوعاء الدموي ومخرجه، و $D = Sv$ هو معدل التدفق الحجمي عبر مساحة المقطع العرضي S للوعاء الدموي، و v هي سرعة الدم. وتُعطي المقاومة الهيدروليكية R بالعلاقة

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.$$

في الدورة الدموية الكبرى (التي يجري فيها الدم من البطين الأيسر إلى الأذين الأيمن للقلب)، يكون معدل تدفق الدم $D \approx 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ لرجل في حالة راحة. أجب عن الأسئلة الآتية بافتراض أن جميع الأوعية الشعرية موصولة على التوازي، وأن نصف قطر كل منها $r = 4 \mu\text{m}$ ، وطولها $L = 1 \text{ mm}$ ، وتعمل تحت فرق ضغط $\Delta p = 1 \text{ kPa}$.

3.12 (1.0) كم عدد الأوعية الشعرية في جسم الإنسان؟

3.13 (0.5) ما مقدار السرعة v التي يجري بها الدم عبر وعاء شعري؟

ناطحة السحاب عند أسفل ناطحة سحاب يبلغ ارتفاعها 1000 m، تكون درجة الحرارة الخارجية $T_{\text{bot}} = 30^\circ\text{C}$. والهدف هو تقدير درجة الحرارة الخارجية T_{top} عند القمة. لننظر في طبقة رقيقة من الهواء (غاز نيتروجين مثالي معامل الأديباتي $\gamma = 7/5$) ترتفع ببطء إلى ارتفاع z حيث يكون الضغط أقل، ولنفترض أن هذه الطبقة تتمدد أديباتياً بحيث تنخفض درجة حرارتها إلى درجة حرارة الهواء المحيط.

3.14 (0.5) كيف يرتبط التغير النسبي في درجة الحرارة dT/T بالتغير النسبي في الضغط dp/p ؟

3.15 (0.5) عبّر عن فرق الضغط dp بدلالة dz ، وهو التغير في الارتفاع.

3.16 (1.0) ما درجة الحرارة الناتجة عند قمة المبنى؟

المعطيات

$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	ثابت بولتزمان:
$m = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$	كتلة جزيء النيتروجين:
$g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$	تسارع الجاذبية:

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم التقديرات الرئيسية مقياس الحيود $\lambda F\#$ ، وماء يغلي عند 100°C ، والمقدار $E_0 h$ بوصفه فرق الجهد المميز للبرق.

• **3.1:** $\Delta x_{\min} \sim \lambda F\#$. عند أكبر فتحة متاحة، $F\# = 2$ ، تكون هذه القيمة $1.0 \mu\text{m}$. أما القيمة وفق معيار رايلي لفتحة دائرية فهي $1.22 \mu\text{m}$.

• **3.2:** $N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}$ ، أو $8.2 \times 10^2 \text{ Mpix}$ باستخدام معامل رايلي.

• **3.3:** $F\# = 16$ باستخدام $\Delta x \sim \lambda F\#$. وتعطي المقارنة الصارمة وفق معيار رايلي $F\# = 11$.

• **3.4:** $z_{\min} \approx 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$.

• **3.5:** $U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}$.

• **3.6:** $J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$.

- 3.7 : $P \sim 19 \text{ W}$.
- 3.8 : $t \sim 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$.
- 3.9 : $Q = 5 \text{ C}$.
- 3.10 : $I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$.
- 3.11 : $t \sim 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h}$. ويعطي نموذج مكثف يفرغ شحنته بالكامل نحو 10 h.
- 3.12 : $N_{\text{cap}} \approx 4.5 \times 10^9$ وعاء شعري.
- 3.13 : $v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}$.
- 3.14 : $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}$.
- 3.15 : $dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz$ ، حيث ρ هي كثافة الهواء المحلية.
- 3.16 : $T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ \text{C}$.

الحل

3.1. في حالة عدسة مثالية، يحدّ الحيود عند الفتحة الفصل الزاوي بين الأجسام التي يمكن تمييزها إلى المقياس

$$\theta_{\min} \sim \frac{\lambda}{D}.$$

بالنسبة إلى الأجسام البعيدة، يقابل الفصل الزاوي θ فصلاً مقداره $f\theta$ في المستوى البؤري. ومن ثم

$$\Delta x_{\min} \sim f \frac{\lambda}{D} = \lambda F\#.$$

عند $\lambda = 500 \text{ nm}$

$$\Delta x_{\min} \sim 0.50(F\#) \mu\text{m}.$$

تتحقق أفضل استبانة عند أكبر فتحة، وهي التي تقابل أصغر عدد بؤري مدرج، $F\# = 2$. ويبلغ قطرها $D = f/2 = 19 \text{ mm}$ ، مما يعطي

$$\Delta x_{\min} \sim 1.0 \mu\text{m}.$$

بالنسبة إلى فتحة دائرية، يعطي معيار رايلي التعبير الأكثر تحديداً

$$\Delta x_{\text{Rayleigh}} = 1.22\lambda F\#.$$

ومن ثم القيمة $1.22 \mu\text{m}$ عند $F\# = 2$. وليس هذا المعامل جوهرياً لتقدير رتبة المقدار المطلوب.

3.2. لشريحة مربعة ذات بكسلات مربعة بتباعد a ، يكون العدد الإجمالي للبكسلات نحو $(L/a)^2$. ويجعل تباعد البكسلات مساوياً لمقياس الاستبانة البصرية نحصل على

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}} \right)^2.$$

وعليه،

$$N_{\text{pixels}} \sim \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.0 \times 10^{-6}} \right)^2 = 1.225 \times 10^9.$$

بوحدة الميغابكسل،

$$N \sim 1.2 \times 10^3 \text{ Mpix}.$$

أما استخدام قيمة رايلي فيعطي

$$N_{\text{Rayleigh}} = \frac{1}{10^6} \left(\frac{35 \times 10^{-3}}{1.22 \times 10^{-6}} \right)^2 \approx 8.2 \times 10^2 \text{ Mpix.}$$

يتطلب كلا التقديرين نحو 10^3 Mpix.

3.3. تباعد البكسلات في الشريحة ذات 16 Mpix هو

$$a = \frac{L}{\sqrt{16 \times 10^6}} = \frac{35 \text{ mm}}{4000} = 8.75 \mu\text{m.}$$

لكي لا تفرض المنظومة البصرية استبانة أخشن من استبانة البكسلات، نشترط

$$\lambda F\# \lesssim a.$$

ومن ثم

$$F\# \lesssim \frac{8.75 \mu\text{m}}{0.500 \mu\text{m}} = 17.5.$$

تقابل أصغر فتحة أكبر عدد بؤري مسموح به. ومن بين الإعدادات المتاحة، نحصل على

$$F\# = 16.$$

عند هذا الإعداد، يكون مقياس الحيود المقدّر $8.0 \mu\text{m}$ ؛ أما عند $F\# = 22$ ، فسيكون $11 \mu\text{m}$.

إذا احتُفظ بمعامل رايلي وطُبِّقت المتباينة بصرامة،

$$1.22\lambda F\# \leq a \implies F\# \leq 14.3.$$

يصبح أكبر إعداد مدرج حينئذٍ $F\# = 11$. ويعتمد هذا الاختيار من بين القيم المنفصلة على الاصطلاح المتَّبَع للاستبانة.

3.4. عند دقة 300 dpi، تكون المسافة بين النقاط المطبوعة المتجاورة

$$d = \frac{25.4 \text{ mm}}{300} = 8.47 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

عند مسافة رؤية z ، يكون فصلها الزاوي نحو d/z . ولا تعود قابلة للتمييز منفردة عندما

$$\frac{d}{z} \lesssim \phi.$$

باستخدام

$$\phi = 2(2.91 \times 10^{-4}) = 5.82 \times 10^{-4} \text{ rad,}$$

نحصل على

$$z_{\min} \approx \frac{d}{\phi} = \frac{8.47 \times 10^{-5}}{5.82 \times 10^{-4}} \approx 0.15 \text{ m.}$$

3.5. نعامل البيضة على أنها كرة ذات كثافة وسعة حرارية نوعية منتظمتين. ونهمل التأثيرات الحرارية للقشرة وأي إنثاليبي إضافي للتخثر، إذ لم تُعطَ بيانات بشأنه.

كتلة البيضة هي

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu = \frac{4}{3}\pi (2.5 \times 10^{-2})^3 (10^3) = 6.54 \times 10^{-2} \text{ kg.}$$

نحوّل السعة الحرارية النوعية:

$$C = 4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

تُقدّر الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارة البيضة من T_0 إلى درجة حرارة التخثر بالعلاقة

$$U \approx MC(T_c - T_0).$$

وعليه

$$U \approx (6.54 \times 10^{-2})(4.2 \times 10^3)(65 - 4) = 1.68 \times 10^4 \text{ J},$$

إذًا

$$U \approx 1.7 \times 10^4 \text{ J}.$$

3.6. نفترض الغليان عند الضغط الجوي المعتاد، بحيث $T_1 \approx 100^\circ \text{C}$. ولتقدير فيض حراري مميز، نأخذ طول التوصيل مساويًا لنصف قطر البيضة، وفرق درجة الحرارة مساويًا لفرقها الابتدائي بين الماء والبيضة:

$$\Delta r \sim R, \quad \Delta T \sim T_1 - T_0 = 96 \text{ K}.$$

يعطي قانون فورييه حينئذٍ مقدار الفيض الحراري المتجه إلى الداخل

$$J \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} = 0.64 \frac{96}{2.5 \times 10^{-2}}.$$

وعليه،

$$J \sim 2.5 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

يتغير تدرج درجة الحرارة الفعلي أثناء الطهو؛ وهذا هو مقياسه المميز.

3.7. تدخل الحرارة عبر سطح البيضة، الذي تبلغ مساحته

$$A = 4\pi R^2 = 7.85 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

وبناءً على ذلك،

$$P \sim JA = (2.46 \times 10^3) (7.85 \times 10^{-3}) \approx 19.3 \text{ W}.$$

ومن ثم

$$P \sim 19 \text{ W}.$$

3.8. نقسم طاقة التسخين اللازمة على القدرة المميزة لانتقال الحرارة:

$$t \sim \frac{U}{P}.$$

كما يعطي الجمع بين التعابير السابقة

$$t \sim \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \mu C (T_c - T_0)}{4\pi R^2 \kappa (T_1 - T_0)/R} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}.$$

عدديًا،

$$t \sim \frac{1.68 \times 10^4}{19.3} \approx 8.7 \times 10^2 \text{ s} \approx 15 \text{ min}.$$

يُظهر هذا التقدير علاقة تناسب المتوقعة للانتشار الحراري $t \propto R^2$.

3.9. الشحنة المنقولة هي المساحة تحت منحني التيار-الزمن:

$$Q = \int_0^\tau I(t) dt.$$

النبخة مثلثية، لذا فإن مساحتها لا تعتمد على زمن حدوث الذروة:

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max} \tau.$$

باستخدام $\tau = 0.1 \text{ ms} = 10^{-4} \text{ s}$ و $I_{\max} = 100 \text{ kA} = 10^5 \text{ A}$

$$Q = \frac{1}{2}(10^5)(10^{-4}) = 5 \text{ C.}$$

3.10. متوسط التيار خلال مدة النبضة هو

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2}.$$

وعليه،

$$I = 5.0 \times 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA.}$$

3.11. بتقريب المجال الكهربائي بين السحابة والأرض على أنه منتظم، يكون فرق الجهد عند الانتهاء

$$V_0 \approx E_0 h = (300 \times 10^3)(10^3) = 3.0 \times 10^8 \text{ V.}$$

الطاقة الكهربائية المتحررة هي

$$W = \int V(t)I(t) dt.$$

وباستخدام V_0 بوصفه فرق الجهد المميز نحصل على

$$W \sim V_0 Q = (3.0 \times 10^8)(5) = 1.5 \times 10^9 \text{ J}$$

لكل صاعقة.

وعليه، تكون حصة الفرد السنوية من الطاقة

$$W_{\text{person}} \sim \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} (1.5 \times 10^9) \approx 7.4 \times 10^6 \text{ J.}$$

يستهلك مصباح قدرته 100 W طاقة مقدارها 100 J كل ثانية، لذا

$$t \sim \frac{W_{\text{person}}}{100} \approx 7.4 \times 10^4 \text{ s} \approx 20 \text{ h.}$$

عند تمثيل منظومة السحابة-الأرض بمكثف يفرغ شحنته بالكامل، ينخفض فرق الجهد مع الشحنة المتبقية. وتكون الطاقة المتحررة حينئذٍ

$$W = \frac{1}{2} Q V_0,$$

مما يعطي نحو $3.7 \times 10^4 \text{ s}$ ، أو 10 h، لكل فرد. ويعطي كلا النموذجين زمن إضاءة من رتبة يوم واحد.

3.12. الكميات المعنية بوحدة النظام الدولي هي

$$\eta = 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}, \quad r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad L = 10^{-3} \text{ m},$$

$$\Delta p = 10^3 \text{ Pa}, \quad D_{\text{total}} = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

يعطي قانون بوازوي معدل التدفق الحجمي عبر وعاء شعري واحد:

$$D_{\text{cap}} = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}.$$

بالتعويض نحصل على

$$D_{\text{cap}} = \frac{\pi(4 \times 10^{-6})^4(10^3)}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})} \approx 2.23 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

بما أن الأوعية الشعرية المتماثلة موصولة على التوازي، فإن كلاً منها يخضع لفرق الضغط نفسه، وتُجمع معدلات تدفقها الحجمي:

$$D_{\text{total}} = N_{\text{cap}} D_{\text{cap}}.$$

ومن ثم

$$N_{\text{cap}} = \frac{10^{-4}}{2.23 \times 10^{-14}} \approx 4.5 \times 10^9.$$

3.13. السرعة الواردة في $D = Sv$ هي السرعة المتوسطة على المقطع العرضي. وعليه،

$$v = \frac{D_{\text{cap}}}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta L}.$$

عدديًا،

$$v = \frac{(10^3)(4 \times 10^{-6})^2}{8(4.5 \times 10^{-3})(10^{-3})}.$$

وعليه

$$v \approx 4.4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0.44 \text{ mm s}^{-1}.$$

3.14. لكمية ثابتة من غاز مثالي تتمدد تمددًا أديباتيًا شبه ساكن،

$$pV^\gamma = \text{ثابت}.$$

بأخذ التفاضلات اللوغاريتمية،

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

يعطي قانون الغاز المثالي $T \propto pV$ ، حيث تُقاس T بالكلفن، لذا

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p}.$$

ومن ثم

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

ينخفض كل من الضغط ودرجة الحرارة مع صعود الطبقة.

3.15. يعطي توازن القوى الهيدروستاتيكي على طبقة أفقية رقيقة

$$dp = -\rho g dz,$$

حيث ρ هي الكثافة الكتلية المحلية.

لجزيئات نيتروجين كتلة كل منها m ، يعطي قانون الغاز المثالي

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad \rho = \frac{mp}{kT}.$$

وعليه،

$$dp = -\rho g dz = -\frac{mpg}{kT} dz.$$

3.16. نعوّض تدرّج الضغط الهيدروستاتيكي في علاقة درجة الحرارة الأديباتية:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(-\frac{mg}{kT} dz\right).$$

تُختزل درجة الحرارة من الطرف الأيمن بعد الضرب في T ، فنحصل على معدل ثابت لانخفاض درجة الحرارة مع الارتفاع:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k}.$$

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{2}{7} \frac{(4.65 \times 10^{-26})(9.80)}{1.38 \times 10^{-23}} \approx -9.43 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}.$$

على ارتفاع $H = 1000 \text{ m}$ ، يبلغ الانخفاض في درجة الحرارة نحو 9.4 K . وعليه

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mgH}{k} \approx 303.15 - 9.43 = 293.72 \text{ K}.$$

وعليه،

$$T_{\text{top}} \approx 294 \text{ K} \approx 21^\circ\text{C}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.