

IPhO 2005

理论题与解答 · 西班牙萨拉曼卡 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2005/

题目 1：一颗命运多舛的卫星

Th 1 一颗命运多舛的卫星

航天器最常进行的轨道机动是沿飞行方向改变速度，即通过加速进入更高的轨道，或通过制动开始重返大气层。本题将研究沿径向施加发动机推力时轨道的变化。

计算数值时请使用：地球半径 $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ，地球表面的重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ，并取恒星日的长度为 $T_0 = 24.0 \text{ h}$ 。

考虑一颗质量为 m 的地球同步¹通信卫星，它位于半径为 r_0 的赤道圆轨道上。这类卫星配备有“远地点发动机”，用于提供到达最终轨道所需的切向推力。

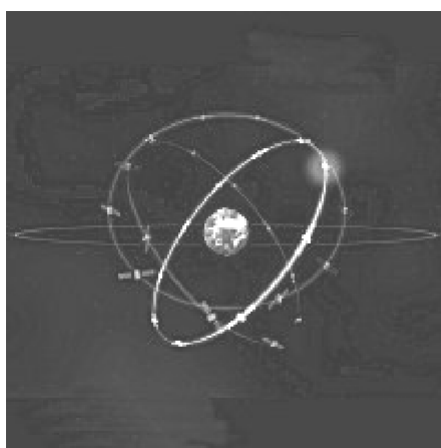


Image: ESA

图片：ESA

各小问的分值在该小问开头的括号内标出。

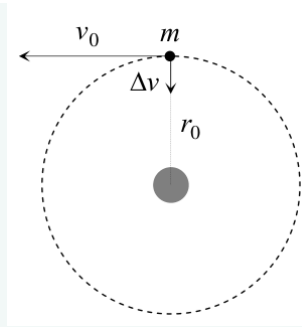
问题 1

1.1 (0.3) 计算 r_0 的数值。

1.2 (0.3+0.1) 给出卫星速度 v_0 关于 g 、 R_T 和 r_0 的解析表达式，并计算其数值。

1.3 (0.4+0.4) 求出卫星的角动量 L_0 和机械能 E_0 关于 v_0 、 m 、 g 和 R_T 的表达式。

卫星到达这一地球同步圆轨道后（见图 F-1），已在预定位置稳定下来，正准备开始工作。此时，地面控制人员的一次失误导致远地点发动机再次点火。推力恰好指向地球，尽管地面人员迅速作出反应并关闭了发动机，卫星仍获得了一个非预期的速度变化量 Δv 。我们用参数 $\beta = \Delta v/v_0$ 表征此次推进。与其他任何轨道运动时间尺度相比，发动机点火持续时间始终可以忽略不计，因此可将其视为瞬时过程。



F-1

问题 2

设 $\beta < 1$ 。

2.1 (0.4+0.5) 用 r_0 和 β 表示新轨道²的参数：半通径 l 和离心率 ε 。

2.2 (1.0) 计算新轨道的长轴与意外点火时的位置矢量之间的夹角 α 。

2.3 (1.0+0.2) 给出近地点和远地点到地心的距离 $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 关于 r_0 和 β 的解析表达式，并计算 $\beta = 1/4$ 时的数值。

2.4 (0.5+0.2) 求出新轨道的周期 T 关于 T_0 和 β 的表达式，并计算 $\beta = 1/4$ 时的数值。

¹ 其公转周期为 T_0 。

² 见“提示”。

问题 3

3.1 (0.5) 计算卫星逃逸地球引力所需的最小推进参数 β_{esc} 。

3.2 (1.0) 求出在此情况下卫星沿新轨迹运动时到地心的最小距离 $r'_{\min}$ ，用 r_0 表示。

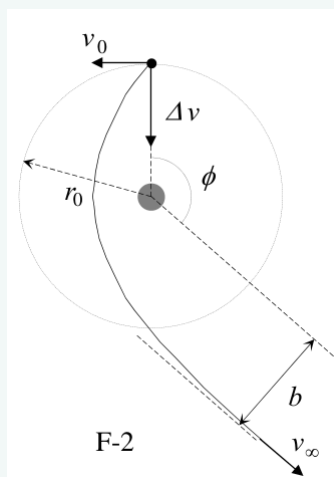
问题 4

设 $\beta > \beta_{\text{esc}}$ 。

4.1 (1.0) 求出无穷远处的剩余速度 v_{∞} 关于 v_0 和 β 的表达式。

4.2 (1.0) 用 r_0 和 β 表示渐近逃逸方向的“碰撞参数” b 。（见图 F-2）。

4.3 (1.0+0.2) 求出渐近逃逸方向的角度 ϕ 关于 β 的表达式。计算 $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$ 时的数值。



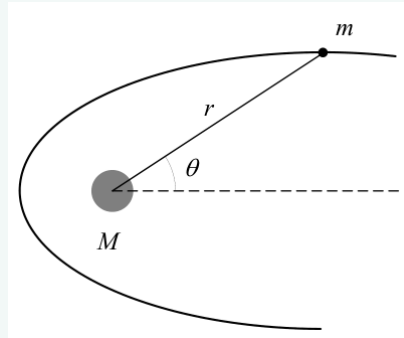
F-2

F-2

提示

在遵循平方反比定律的有心力作用下，物体沿椭圆、抛物线或双曲线轨迹运动。在 $m \ll M$ 的近似下，产生引力的质量为 M 的物体位于其中一个焦点处。以该焦点为原点，这些曲线的一般极坐标方程可写为（见图 F-3）

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

其中， l 是称为半通径的正常数， ε 是曲线的离心率。用运动常量表示为：

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{和} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

其中， G 是牛顿引力常量， L 是绕行物体相对于原点的角动量大小， E 是其机械能，并取无穷远处的势能为零。

可能出现以下情况：

- i) 若 $0 \leq \varepsilon < 1$ ，曲线为椭圆（ $\varepsilon = 0$ 时为圆）。
- ii) 若 $\varepsilon = 1$ ，曲线为抛物线。
- iii) 若 $\varepsilon > 1$ ，曲线为双曲线。

题目译自官方英文原文。

答案

- 1.1

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 1.2

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

• 1.3

$$L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}, \quad E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

• 2.1

$$l = r_0, \quad \varepsilon = \beta.$$

• 2.2

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

此结果适用于 $0 < \beta < 1$ ；当 $\beta = 0$ 时，轨道为圆形，没有特定的长轴。

• 2.3

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}, \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}.$$

当 $\beta = 1/4$ 时，

$$r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}, \quad r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}.$$

• 2.4

$$T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

当 $\beta = 1/4$ 时， $T = 26.4 \text{ h}$ 。

• 3.1

$$\beta_{\text{esc}} = 1.$$

• 3.2

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

• 4.1

$$v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

• 4.2

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

• 4.3

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

当 $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ 时，

$$\phi = 138.2^\circ.$$

解答

令

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

其中 M 为地球质量。我们采用牛顿引力理论，将地球视为固定不动的球体，取 $m \ll M$ ，并忽略大气阻力及其他天体的影响。将发动机点火视为瞬时过程，卫星质量视为常量。取无穷远处的引力势能为零。

1.1 — 地球同步轨道的半径

对于圆轨道，引力加速度提供向心加速度：

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

轨道周期为 T_0 ，因此

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

联立这些方程可得

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

于是

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

代入 $T_0 = 24.0 \times 3600$ s,

$$r_0 = \left[\frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2(24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m}.$$

因此，

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}.$$

1.2 — 初始轨道速度

由圆轨道条件可得

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

因此

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

数值为

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = 3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

1.3 — 初始角动量和机械能

速度垂直于半径，因此角动量的大小为

$$L_0 = mr_0v_0.$$

由于 $r_0 = \mu/v_0^2$,

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

机械能为

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

利用 $\mu/r_0 = v_0^2$, 可得

$$E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

2.1 — 冲量作用后的半通径和离心率

令 $\hat{\mathbf{r}}$ 沿意外点火时的径向向外, $\hat{\mathbf{t}}$ 沿原速度方向。冲量作用刚结束时,

$$\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{t}} - \beta v_0\hat{\mathbf{r}}.$$

两个分量相互垂直, 因此

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

冲量沿径向, 因此相对于地心的角冲量为零。于是,

$$L = L_0 = mr_0v_0.$$

在瞬时点火过程中, 半径保持为 r_0 , 因此新的能量为

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

因此, 当 $\beta < 1$ 时, $E < 0$, 符合束缚轨道的要求。

由题目给出的轨道公式,

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

以及

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

由于 β 是非负的速率比,

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

这些 l 和 ε 的表达式也适用于后面讨论的抛物线和双曲线情形。

2.2 — 长轴的方向

在意外点火的瞬间, $r = r_0 = l$ 。代入极坐标方程可得

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

对于 $\beta > 0$, 此式要求

$$\cos \theta_0 = 0.$$

极坐标的参考轴沿长轴方向, 因此意外点火时的位置矢量垂直于该轴:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

为确定所取的分支，选择 θ 沿轨道运动方向增大。于是

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0\beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

初始径向速度向内，因此 $dr/d\theta < 0$ 。故

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

随后卫星在 $\theta = \pi$ 处到达近地点。按图 F-1 所示的方位，长轴是水平的，近地点位于地球左侧。

当 $\beta = 0$ 时，轨道仍为圆形，不存在唯一的长轴方向。

2.3 — 近地点和远地点

对于

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

分母最大时半径最小，对应于 $\theta = \pi$ 。最大半径出现在 $\theta = 0$ 处。因此

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}, \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}.$$

当 $\beta = 1/4$ 时，

$$r_{\min} = \frac{4}{5}r_0 = 3.38 \times 10^7 \text{ m},$$

$$r_{\max} = \frac{4}{3}r_0 = 5.63 \times 10^7 \text{ m}.$$

两者均为到地心的距离。

2.4 — 新轨道的周期

椭圆的半长轴为

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

对于绕同一中心天体的轨道，开普勒第三定律给出

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

因此，

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

当 $\beta = 1/4$ 时，

$$T = 24.0 \left(\frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

所以

$$T = 26.4 \text{ h}.$$

3.1 — 逃逸所需的最小冲量

只有机械能非负时，轨迹才能延伸至无穷远。临界逃逸轨迹满足 $E = 0$ ：

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

于是

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

在这一临界值处， $\varepsilon = 1$ ，因此轨道为抛物线，且速率在无穷远处趋于零。

3.2 — 逃逸临界情况下的最小距离

当 $\beta = 1$ 时，

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

因此，抛物线轨道的近地点距离为

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

卫星最初向内运动，因此在逃逸前会先到达这一最近点。数值上，

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ m} > R_T,$$

因此，临界轨迹不会与地球相交。

4.1 — 无穷远处的剩余速率

当 $\beta > 1$ 时，能量为正。在无穷远处，引力势能为零，由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

因此

$$\boxed{v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.2 — 碰撞参数

碰撞参数 b 是从地心到出射渐近线的垂直距离。

在远离地球处，运动趋于沿该渐近线的匀速运动。因此，角动量的大小为

$$L = mbv_\infty.$$

由角动量守恒可得

$$mbv_\infty = mr_0v_0.$$

利用 4.1 的结果，

$$\boxed{b = \frac{r_0v_0}{v_\infty} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}}.$$

4.3 — 逃逸方向

采用与 2.2 相同的极坐标约定：

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

其中 θ 沿运动方向增大，近地点位于 $\theta = \pi$ 处。

在无穷远处，分母趋于零：

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

定义

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

经过近地点后，出射分支到达

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

切向速率为 $L/(mr)$ ，当 $r \rightarrow \infty$ 时趋于零。因此，速度方向的极限与径向向外方向的极限重合。

图 F-2 右侧标出的角 ϕ 是原来的径向向外方向与该出射方向之间的较小夹角。因此，

$$\phi = 2\pi - (\theta_{\infty} - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

故

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

所取分支满足

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

当 $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ 时，

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

得到

$$\phi = 138.2^\circ.$$

这些逃逸公式描述的是不发生碰撞的开普勒轨迹。考虑到地球具有有限大小，还需满足 $r_0/(1 + \beta) > R_T$ ，题目给定的数值示例满足此条件。

解答已与官方解答核对。

题目 2：电学量的绝对测量

Th 2 电学量的绝对测量

19 世纪的技术与科学变革，使人们迫切需要为电学量建立普遍认可的标准。当时人们认为，新的绝对单位应当仅依赖于法国大革命后确立的长度、质量和时间标准。从 1861 年到 1912 年，人们开展了大量实验工作，以确定这些单位的量值。这里我们提出三个研究实例。

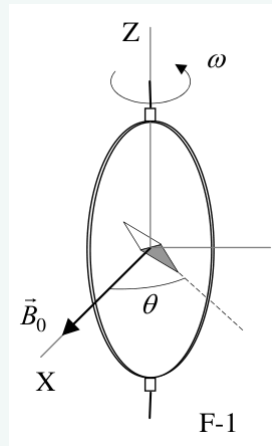
各小题的分值在题首括号内标明。

欧姆的测定（开尔文）

一个由 N 匝组成、半径为 a 、总电阻为 R 的闭合圆形线圈，在水平磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ 中绕一条竖直直径以恒定角速度 ω 转动。

1. (0.5+1.0) 计算线圈中产生的感应电动势 $\mathcal{E}$ ，以及维持线圈运动所需的平均功率¹ $\langle P \rangle$ 。忽略线圈的自感。

在线圈中心放置一根小磁针，如图 F-1 所示。它可以在水平面内绕 Z 轴缓慢自由转动，但无法跟随线圈的快速转动。



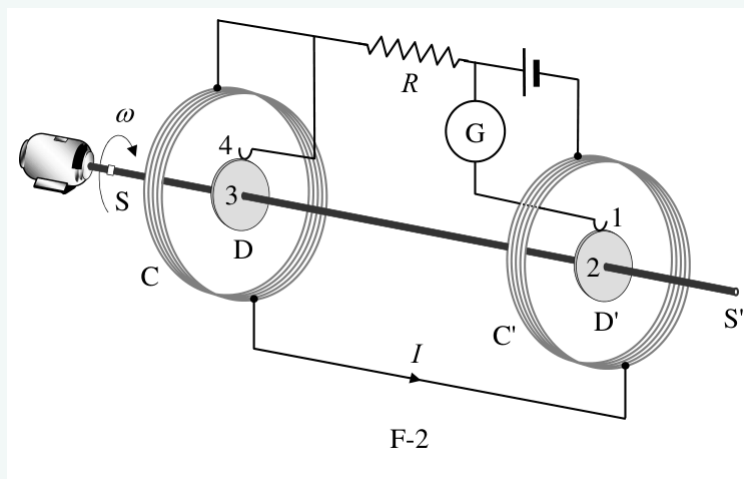
F-1

2. (2.0) 达到稳态后，磁针将停在与 $\vec{B}_0$ 成一个小角度 θ 的方向上。用该角度及系统的其他参数表示线圈的电阻 R 。

开尔文勋爵在 19 世纪 60 年代用这种方法确立了欧姆的绝对标准。为避免使用旋转线圈，洛伦兹设计了另一种方法，瑞利勋爵和西奇威克女士采用了这一方法。我们将在下文中分析它。

欧姆的测定（瑞利、西奇威克）。

实验装置如图 F-2 所示。两个相同的金属圆盘 D 和 D' 安装在导电转轴 SS' 上，圆盘半径均为 b 。电动机带动整套装置以角速度 ω 转动，调节该角速度即可测量 R 。两个相同的线圈 C 和 C'（半径均为 a ，各有 N 匝）分别环绕两个圆盘。它们的连接方式使电流 I 沿相反方向流过两个线圈。整套装置用于测量电阻 R 。



F-2

¹ 在周期为 T 的周期系统中，物理量 $X(t)$ 的平均值 $\langle X \rangle$ 为

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

你可能需要用到下列积分中的一个或多个：

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi, \quad \text{以及稍后会用到的} \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

3. (2.0) 假设流过线圈 C 和 C' 的电流 I 在 D 和 D' 附近产生均匀磁场 B ，其大小等于线圈中心处的磁场。假设两线圈间的距离远大于线圈半径，且 $a \gg b$ ，计算¹ 圆盘边缘 1 和 4 之间产生的感应电动势 $\mathcal{E}$ 。

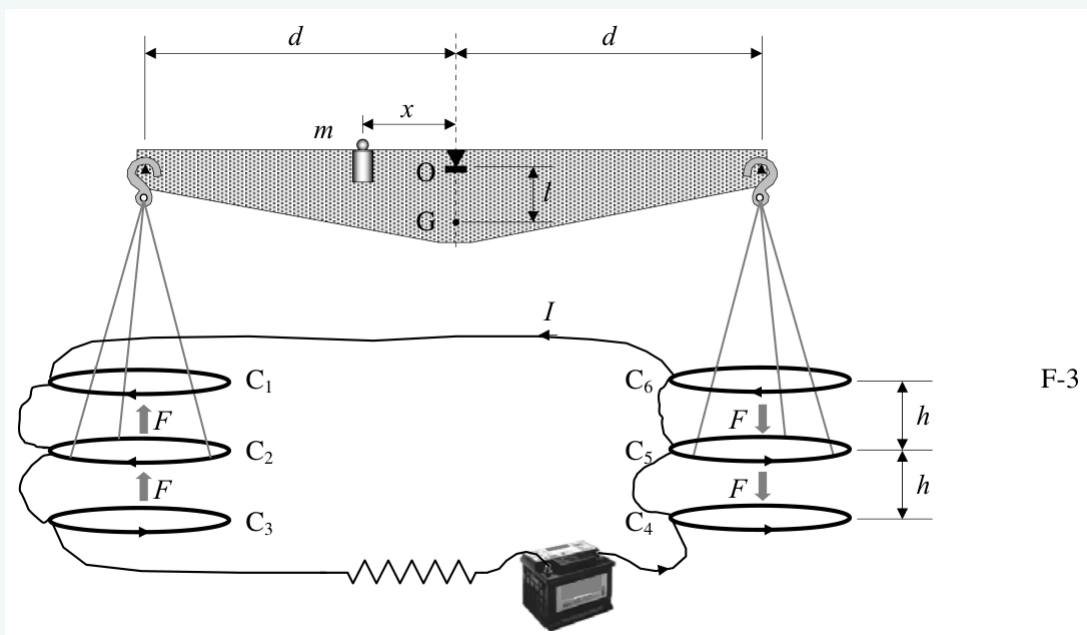
圆盘通过位于边缘 1 和 4 处的电刷接入电路。检流计 G 用于检测电路 1-2-3-4 中是否有电流流过。

4. (0.5) 当 G 的读数为零时，即可测得电阻 R 。用系统的物理参数表示 R 。

安培的测定

让电流通过两个导体，并测量它们之间的作用力，就能对电流本身进行绝对测量。开尔文勋爵于 1882 年设计的“电流天平”利用了这一方法。它由六个相同的单匝线圈 $C_1 \dots C_6$ 串联而成，各线圈的半径均为 a 。如图 F-3 所示，固定线圈 C_1 、 C_3 、 C_4 和 C_6 位于两个相距很近的水平面内，两平面的间距为 $2h$ 。线圈 C_2 和 C_5 由长度为 d 的天平臂承载；平衡时，它们到两个平面的距离相等。

电流 I 在各线圈中的流向使 C_2 所受磁力向上，而 C_5 所受磁力向下。电流通过电路时，需要在距支点 O 为 x 的位置放置质量为 m 的物体，使天平恢复到上述平衡位置。



F-3

5. (1.0) 计算 C_1 对 C_2 的磁相互作用力 F 。为简便起见，假设单位长度所受的力等于两根载有平行电流的长直导线之间单位长度所受的力。

6. (1.0) 当天平处于平衡状态时，即可测得电流 I 。用系统的物理参数表示 I 的值。装置的尺寸使我们可以忽略左右两侧线圈之间的相互作用。

设 M 为天平的质量（不包括 m 和悬挂部分），G 为其质心， l 为距离 $\overline{OG}$ 。

7. (2.0) 对于使 C_2 的高度发生微小变化 δz 、使 C_5 的高度发生微小变化 $-\delta z$ 的偏移，天平的平衡是稳定的。计算² 天平释放后仍能向平衡位置返回时， δz 的最大值 $\delta z_{\max}$ 。

² 认为各线圈的中心仍近似对齐。

使用近似式

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

其中 $\beta \ll 1$ ；对于小角度 θ ，使用 $\sin \theta \approx \tan \theta$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

这里， μ_0 为真空磁导率， g 为重力加速度。题目未给出参数的数值，因此答案均以符号表示。

1. 取 $t = 0$ 时线圈的法线与 $\vec{B}_0$ 平行，

$$\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t), \quad \langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

- 2.

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta},$$

其中 θ 以弧度为单位。

3. 两圆盘边缘之间的电动势大小为

$$|\mathcal{E}_{14}| = B\omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

- 4.

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

- 5.

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}, \quad \text{方向向上。}$$

- 6.

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. 在题目所规定的小位移近似所保留的阶次内，

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd} = \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

当正位移满足 $0 < \delta z < \delta z_{\max}$ 时，天平向平衡位置返回；等号对应临界边界。

解答

1. 感应电动势与平均机械功率

令 $A = \pi a^2$ 。选取线圈的正法线方向为

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

使其在 $t = 0$ 时与外加磁场平行。

穿过 N 匝线圈的磁链为

$$\Lambda(t) = NAB_0 \cos(\omega t).$$

因此，由法拉第电磁感应定律得

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = NAB_0\omega \sin(\omega t),$$

即

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

初始取向不同只会改变相位。

由于忽略自感，瞬时电流为

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

在角速度恒定时，为克服磁制动力矩而提供的机械功率等于焦耳热功率：

$$P(t) = i^2(t)R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

利用 $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ ，得

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}}.$$

2. 由磁针偏转求电阻

N 匝圆形线圈中心处的磁场为

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

代入第 1 小题求得的电流，并记 $\phi = \omega t$ ，得

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

在线圈转动一周的时间内，磁针方向的变化可以忽略。因此，磁针所受的平均力矩等于其磁矩与总磁场的**矢量平均值的叉积**。由于

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

线圈产生的平均磁场为

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

它与外加磁场垂直。

稳态下，磁针沿下列磁场的方向排列：

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

因此

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

从而得到

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}.$$

对于题目给定的小角度,

$$R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4\theta}.$$

3. 旋转圆盘边缘之间的电动势

任一环绕圆盘的线圈在其中心产生的磁场大小为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}.$$

两线圈相距很远, 因此可以忽略它们在彼此位置处产生的磁场。条件 $a \gg b$ 使我们可以将每个圆盘范围内的磁场视为均匀磁场, 其值等于中心处的磁场。

在半径 r 处, 圆盘微元运动的切向速率为

$$v = \omega r.$$

在轴向磁场中, 单位电荷所受的磁力 $\vec{v} \times \vec{B}$ 沿径向。因此, 一个圆盘从中心到边缘的动生电动势大小为

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

两个圆盘的转动方向相同, 但它们所处的磁场方向相反。因此, 它们从边缘到中心的电动势符号相反。由于两个圆盘的中心由导电转轴连接, 两边缘之间的电动势大小等于两个电动势大小之和:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B \omega b^2.$$

因此

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

电动势的极性由 $\vec{\omega}$ 相对于各圆盘内轴向磁场的方向决定。

4. 检流计示零时的电阻

当检流计读数为零时, 圆盘—转轴—检流计支路中没有电流流过。因此, 该支路上没有电阻性电压降。

圆盘产生的电动势与电阻两端的电压 IR 相平衡:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

约去非零电流, 得

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5. C_1 与 C_2 之间的作用力

对于两根相距 h 、各自通有电流 I 的平行长直导线, 单位长度所受的磁力为

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

根据题目规定的近似，这一关系局部适用于线圈周长 $2\pi a$ 上的各处。因此，作用力为

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

所以

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

C_1 和 C_2 中电流的环绕方向相同，因此相互吸引。由于 C_1 位于 C_2 上方， C_2 所受的力向上。

6. 由天平平衡求电流

上方线圈 C_1 对 C_2 施加向上的吸引力，而下方线圈 C_3 中的电流方向相反，对 C_2 施加向上的排斥力。两者施加的力均为第 5 小题求得的力。因此， C_2 所受向上的合力为 $2F$ 。

类似地， C_5 所受的合力为 $2F$ ，方向向下。这两个力产生的力矩具有相同的转动方向：

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

添加的物体提供反向力矩 mgx 。平衡时，

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

因此，

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. 能产生回复力矩的最大位移

记 $z = \delta z$ ，并规定 C_2 上升、 C_5 下降时为正。设 α 为天平相应的倾角，则

$$z = d \sin \alpha.$$

我们保留各线圈中心对齐的假设，并认为电流保持不变。

定义

$$K = \mu_0 a I^2.$$

发生位移后， C_2 与其上、下固定线圈之间的距离分别为 $h - z$ 和 $h + z$ 。两个磁力仍然都向上，因此它们的合力为

$$F_L(z) = \frac{K}{h - z} + \frac{K}{h + z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}.$$

在右侧，两个间距对调；向下的合力大小相同。

规定使 z 有增大趋势的力矩为正，则总磁力矩为

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

添加的物体提供反向力矩

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

由于天平的质心位于支点下方距离 l 处，其重力提供回复力矩

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

悬挂部分的重力相等，在力矩平衡中相互抵消。

因此，合力矩为

$$\tau(z) = \left(\frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

由第 6 小题中的平衡条件，

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

代入得

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

倾角很小时， $\cos \alpha > 0$ ，因此力矩与下式同号：

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

使用题目规定的近似，

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

得到

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

对于 $z > 0$ ，若 $\tau(z) < 0$ ，天平释放后起初将向平衡位置运动。因此

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

即

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

因此，临界位移为

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}}.$$

再次利用平衡关系，得

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}}.$$

在这一边界处，合力矩在所保留的阶次内为零；更大的正位移会产生使天平偏离平衡位置的力矩。对于负的小位移，近似力矩中的两项都指向使 z 增大的方向，因此天平起初会向平衡位置返回。

上述极限是小位移下的首阶结果；要定量使用这些近似，需满足 $\delta z_{\max} \ll h$ 和 $\delta z_{\max} \ll d$ 。

解答已与官方解答核对。

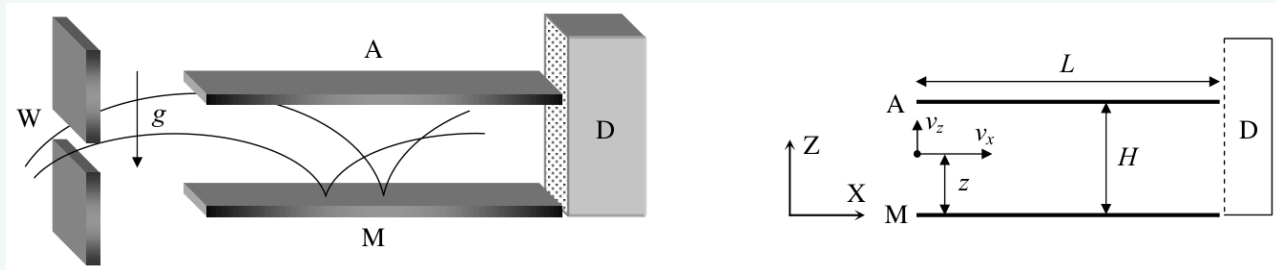
题目 3：引力场中的中子

Th 3 引力场中的中子

在我们熟悉的经典世界中，一个在地球表面弹性跳动的小球是永恒运动的理想例子。小球被束缚着：它既不能进入地表以下，也不能越过其转向点。它将始终处于这一束缚状态，一次又一次地转而下落、反弹上升，永不停息。只有空气阻力或非弹性碰撞才能使这一过程停止，以下将忽略这些因素。

格勒诺布尔劳厄-朗之万研究所的一组物理学家于 2002 年报告了中子在地球引力场中运动行为的实验证据¹。在实验中，向右运动的中子向一块水平晶体表面下落，该表面充当中子反射镜；中子在其上发生弹性反弹，一次又一次地回到初始高度。

实验装置如图 F-1 所示。它由开口 W、中子反射镜 M（位于高度 $z = 0$ 处）、中子吸收体 A（位于高度 $z = H$ 处，长度为 L ）和中子探测器 D 组成。中子束以恒定的水平速度分量 v_x 从 W 出发，穿过 A 与 M 之间的腔体，到达 D。所有到达 A 表面的中子都会被吸收，从实验中消失。到达 M 表面的中子则发生弹性反射。探测器 D 测量透射计数率 $N(H)$ ，即单位时间内到达 D 的中子总数。



F-1

各小问的分值在该小问开头的括号中给出。

进入腔体的中子具有范围很广的正、负竖直速度 v_z 。进入腔体后，它们在下方的反射镜与上方的吸收体之间飞行。

1. (1.5) 用经典力学计算：在高度 z 处进入腔体并能到达探测器 D 的中子，其竖直速度 $v_z(z)$ 的取值范围。假设 L 远大于本题中的其他任何长度。
2. (1.5) 用经典力学计算腔体的最小长度 L_c ，使竖直速度不在上述范围内的所有中子，无论其 z 值如何，都能被 A 吸收。取 $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ 和 $H = 50 \text{ } \mu\text{m}$ 。

在 D 处测量中子的透射计数率 $N(H)$ 。我们预期它随 H 单调增加。

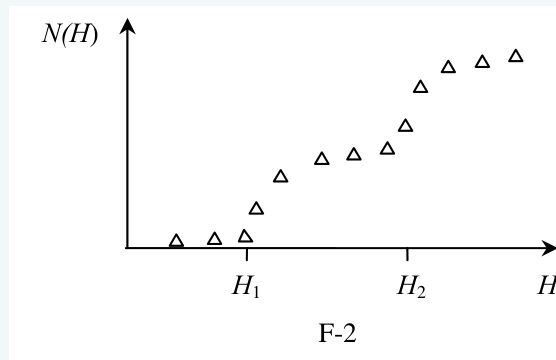
3. (2.5) 假设中子以竖直速度 v_z 在高度 z 处到达腔体，且 v_z 和 z 的所有取值都等可能，计算经典透射计数率 $N_c(H)$ 。答案用常量 ρ 表示，它表示以竖直速度 v_z 在高度 z 处进入腔体的中子，在单位时间、单位竖直速度区间和单位高度区间内的数目。

¹ V. V. Nesvizhevsky 等，“地球引力场中中子的量子态”。Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

格勒诺布尔小组获得的实验结果与上述经典预言不符，而是表明，当 H 越过某些临界高度 H_1 、 H_2 时， $N(H)$ 的值会急剧增加（图 F-2 给出了示意图）。换言之，实验表明，在反射镜上反弹的中子，其竖直运动是量子化的。用玻尔和索末菲求取氢原子能级时所采用的语言，可以表述为：“这些中子沿竖直方向的作用量 S 是普朗克作用量常数 h 的整数倍。”这里， S 由下式给出：

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{Bohr-Sommerfeld 量子化规则})$$

其中, p_z 是经典动量的竖直分量, 积分涵盖一个完整的反弹周期。只有具有这些 S 值的中子才允许存在于腔体中。



F-2

4. (2.5) 利用玻尔-索末菲量子化条件, 计算转向高度 H_n 及 (与竖直运动相对应的) 能级 E_n 。给出 H_1 以 μm 为单位的数值, 以及 E_1 以 eV 为单位的数值。

中子在入口处的均匀初始分布 ρ , 在穿过长腔体的飞行过程中, 转变为 D 处探测到的阶梯状分布 (见图 F-2)。从现在起, 为简单起见, 我们考虑 $H < H_2$ 的长腔体情形。经典力学允许能量处于第 1 问所考虑范围内的所有中子通过, 而量子力学只允许处于能级 E_1 的中子通过。根据海森堡时间-能量不确定性原理, 这种重新分布需要一个最短飞行时间。如果腔体长度很短, 竖直运动能量的不确定度就会很显著。这一现象将导致能级展宽。

5. (2.0) 估算在 D 处观察到中子数第一次急剧增加所需的最短飞行时间 t_q 和腔体的最小长度 L_q 。取 $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ 。

数据:

物理量	数值
普朗克作用量常数	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
真空中的光速	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
元电荷	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
中子质量	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
地球上的重力加速度	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

如有需要, 可使用以下表达式:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

题目译自官方英文原文。

答案

1. 对于 $0 \leq z < H$, 能够透射的速度满足

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

取端点速度的中子会到达吸收体, 因此不包含端点。

2. 经典情形下腔体的最小长度为

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.39 \text{ cm}.$$

3. 经典透射计数率为

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. 严格采用题目给出的量子化规则, 有

$$H_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2}{32M^2g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

数值为

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. 采用 $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$, 并取分辨所需的能量尺度 $\Delta E \sim E_1$, 由不确定性关系给出的极限估计为

$$t_q \gtrsim \frac{\hbar}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

要清晰分辨出陡峭的阶跃, 需要更长的飞行时间。如果将粗略的不确定性估计写成 $\Delta E t_q \sim \hbar$, 则相应的估计为

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

若没有定量的陡峭程度判据, 就无法确定数值前因子。

解答

1. 经典情形下能够透射的竖直速度范围

水平运动是匀速运动, 不影响竖直运动的能量。在两次反射之间, 由机械能守恒可得

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz.$$

在反射镜上发生的弹性反射使 v_z 反号, 但不改变 E_z 。在上方转向点 z_t 处, 竖直速度为零, 因此

$$Mgz_t = \frac{1}{2}Mv_z^2 + Mgz,$$

从而

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

在足够长的腔体中，所有轨迹能到达 $z = H$ 的中子都会被吸收。因此，透射要求 $z_t < H$ ，即

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

于是

$$\boxed{-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.}$$

正、负两种速度都可能出现：初始向下运动的中子先在反射镜上反射，然后上升到相同的转向高度。等号不取，因为题目说明，所有到达吸收体的中子都会被吸收。

2. 经典情形下腔体的最小长度

我们必须求出速度在上述范围之外的中子到达吸收体之前所可能经历的最长时间。

将其守恒的竖直运动能量写为 $E_z = Mga$ ，其中 $a \geq H$ 是没有吸收体时它将达到的转向高度。它在高度 z 处的竖直速率为

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a - z)}.$$

从反射镜向上运动到吸收体所需的时间为

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a - z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - H} \right). \end{aligned}$$

它随 a 的增大而减小，其最大值为

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

初始向上运动的中子，在不超过这样一次向上运动所需的时间内就会到达吸收体。初始向下运动的中子则可能先下降到反射镜，再上升到吸收体。其总时间至多为 $2\tau(a)$ 。

在最长轨迹的极限情形下，中子从紧靠吸收体下方的位置出发，以极小的速度向下运动，其能量恰好足以使它返回高度 H 。因此，吸收时间的上确界为

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

由于水平飞行时间为 L/v_x ，当 $L/v_x \geq t_c$ 时，所有这类中子都会被移除。任何更短的长度都会使某些足够接近这一极限情形的轨迹逃过吸收。因此

$$\boxed{L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}}.$$

代入数值，

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

所以

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

3. 经典透射计数率

根据定义，微元 $dz dv_z$ 内的入射计数率为

$$dN = \rho dz dv_z.$$

对于长腔体，只有第 1 问求出的速度区间对透射有贡献。对这一速度区间及所有入口高度积分，得到

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

于是

$$\begin{aligned} N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\ &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}. \end{aligned}$$

因此

$$N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g} H^{3/2}.$$

这一结果预言的是一条从 $N_c(0) = 0$ 开始、平滑递增且没有阶跃的曲线。

4. 量子化的转向高度和能量

对于竖直转向高度为 H_n 的中子，

$$E_n = MgH_n.$$

在其轨迹的上升阶段，竖直动量为

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

在下降过程中， p_z 和 dz 均为负，因此下降过程对作用量的贡献与上升过程相等。在反射镜上的瞬时反射不产生位移。因此，一个完整反弹周期的作用量为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{H_n} M\sqrt{2g(H_n - z)} dz \\ &= \frac{4}{3}M\sqrt{2g} H_n^{3/2}. \end{aligned}$$

应用题目给出的玻尔-索末菲规则 $S = nh$ ，得

$$\frac{4}{3}M\sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

解得

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3}.$$

乘以 Mg , 得到

$$E_n = \left(\frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3}.$$

这两个量都与 $n^{2/3}$ 成正比。

当 $n = 1$ 时,

$$H_1 = \left[\frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

因此

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}.$$

对应的能量为

$$E_1 = MgH_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J}.$$

利用 $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$, 得

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. 量子情形下的最短飞行时间和最小腔体长度

透射首次出现于 $MgH = E_1$ 附近。如果第一能级的能量宽度与 E_1 相当, 这一透射起始处就会被显著抹平。因此, 用于初步估计分辨能力的相关能量尺度为

$$\Delta E \sim E_1.$$

采用如下形式的时间—能量不确定性估计:

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

可得所必需的飞行时间尺度为

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

将以焦耳为单位的能量代入, 得到

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

由水平运动可得

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

这些数值表征的是不确定性关系给出的下限, 并不能保证实验中达到某一特定的陡峭程度。为了定量说明这一区别, 设允许的能量宽度为 $\Delta E = \epsilon E_1$ 。由于 $E = MgH$, 这也对应于相对高度宽度 $\Delta H/H_1 = \epsilon$ 。估计变为

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m}.$$

陡峭的阶跃要求 $\epsilon \ll 1$, 因而所需的时间和长度都要显著大于上述基本下限。

若采用 $\Delta E t_q \sim h$ 作数量级估计, 则给出

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad \boxed{L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm.}}$$

解答已与官方解答核对。