

IPhO 2005

Teorik sorular ve çözümler · Salamanca, İspanya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipro/2005/

Soru 1: Talihsiz Bir Uydu

Th 1 TALİHSİZ BİR UYDU

Uzay araçlarının en sık gerçekleştirdiği yörünge manevraları, uçuş doğrultusunda yapılan hız değişikliklerinden, yani daha yüksek yörüngelere ulaşmak için hızlanmalardan veya atmosfere yeniden girişi başlatmak için yavaşlamalardan oluşur. Bu soruda, motorun itme kuvveti radyal doğrultuda uygulandığında meydana gelen yörünge değişikliklerini inceleyeceğiz.

Sayısal değerleri elde etmek için Dünya'nın yarıçapını $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, Dünya yüzeyindeki yerçekimi ivmesini $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ve yıldız gününün süresini $T_0 = 24.0 \text{ h}$ olarak alınız.

Ekvator düzleminde, yarıçapı r_0 olan dairesel bir yörüngeye yerleştirilmiş, kütlesi m olan yer eşzamanlı¹ bir haberleşme uydusunu ele alıyoruz. Bu uydularda, son yörüngeye ulaşmak için gereken teğetsel itme kuvvetlerini sağlayan bir "yeröte motoru" bulunur.

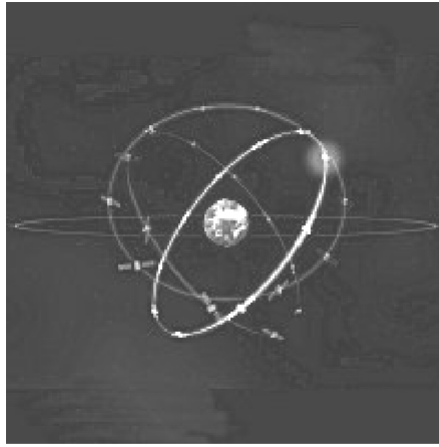


Image: ESA

Görsel: ESA

Puanlar her alt sorunun başında parantez içinde belirtilmiştir.

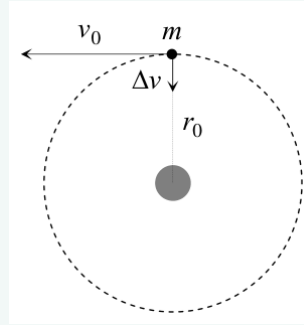
Soru 1

1.1 (0.3) r_0 'ın sayısal değerini hesaplayınız.

1.2 (0.3+0.1) Uydunun v_0 hızının analitik ifadesini g , R_T ve r_0 cinsinden veriniz ve sayısal değerini hesaplayınız.

1.3 (0.4+0.4) Uydunun açısal momentumu L_0 ve mekanik enerjisi E_0 için ifadeleri v_0 , m , g ve R_T cinsinden elde ediniz.

Bu yer eşzamanlı dairesel yörüngeye ulaşıldıktan (bkz. Şekil F-1), uydu istenen konumda kararlı hâle getirildikten sonra, görevine hazırlanırken yer kontrol ekibinin bir hatası nedeniyle yeröte motoru yeniden ateşlenir. İtme kuvveti Dünya'ya doğru yönelmiştir ve yer ekibinin motoru kapatmak için hızla müdahale etmesine rağmen uyduya istenmeyen bir Δv hız değişimi kazandırılır. Bu hız değişimini $\beta = \Delta v/v_0$ parametresiyle tanımlıyoruz. Motorun yanma süresi, yörünge hareketine ilişkin diğer tüm sürelerle kıyasla her zaman ihmal edilebilecek kadar kısadır; dolayısıyla ateşleme anlık kabul edilebilir.



F-1

Soru 2

$\beta < 1$ olduğunu varsayınız.

2.1 (0.4+0.5) Yeni yörünge² parametreleri olan *yarı dik kiriş uzunluğu* l ve *dışmerkezlik* ε 'yi r_0 ve β cinsinden belirleyiniz.

2.2 (1.0) Yeni yörünge²nin büyük eksenini ile yanlışıyla ateşleme anındaki konum vektörü arasındaki α açısını hesaplayınız.

2.3 (1.0+0.2) Yerberi ve yeröte noktalarının Dünya'nın merkezine uzaklıkları olan $r_{\min}$ ve $r_{\max}$ 'in analitik ifadelerini r_0 ve β cinsinden veriniz ve $\beta = 1/4$ için sayısal değerlerini hesaplayınız.

2.4 (0.5+0.2) Yeni yörünge²nin periyodu T 'yi T_0 ve β cinsinden belirleyiniz ve $\beta = 1/4$ için sayısal değerini hesaplayınız.

¹ Dolanım periyodu T_0 'dir.

² "İpucu"na bakınız.

Soru 3

3.1 (0.5) Uydunun Dünya'nın kütleçekiminden kurtulması için gereken en küçük hız değişimi parametresi β_{esc} 'yi hesaplayınız.

3.2 (1.0) Bu durumda uydunun yeni yörüngesinde Dünya'nın merkezine en yakın olduğu uzaklığı, $r'_{\min}$ 'i, r_0 cinsinden belirleyiniz.

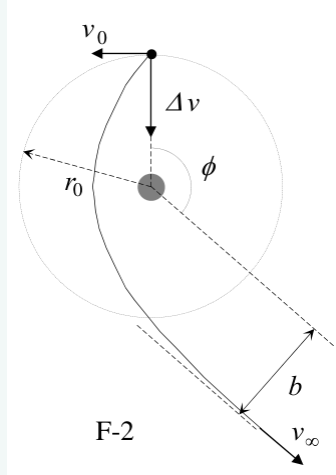
Soru 4

$\beta > \beta_{\text{esc}}$ olduğunu varsayınız.

4.1 (1.0) Sonsuzdaki artık hız v_{∞} 'yi v_0 ve β cinsinden belirleyiniz.

4.2 (1.0) Asimptotik kaçış doğrultusunun "çarpma parametresi" b 'yi r_0 ve β cinsinden elde ediniz. (Bkz. Şekil F-2).

4.3 (1.0+0.2) Asimptotik kaçış yönünün ϕ açısını β cinsinden belirleyiniz. $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$ için sayısal değerini hesaplayınız.

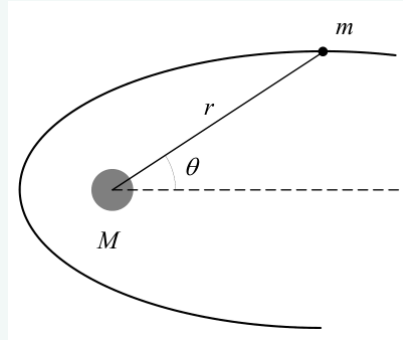


F-2

İPUCU

Ters kare yasasına uyan merkezî kuvvetlerin etkisi altında cisimler elips, parabol veya hiperbol biçiminde yörüngeler izler. $m \ll M$ yaklaşımında, çekim kaynağı olan M kütlesi odaklardan birinde bulunur. Başlangıç noktası bu odakta alındığında, bu eğrilerin genel kutupsal denklemi şöyle yazılabilir (bkz. Şekil F-3):

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

Burada l , yarı dik giriş uzunluğu adı verilen pozitif bir sabit, ε ise eğrinin dışmerkezliğidir. Hareket sabitleri cinsinden:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{ve} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

Burada G Newton'un kütleçekim sabiti, L yörüngede dolanan kütlenin başlangıç noktasına göre açısal momentumunun büyüklüğü ve E , potansiyel enerji sonsuzda sıfır alınmak üzere mekanik enerjisidir.

Şu durumlar söz konusu olabilir:

i) $0 \leq \varepsilon < 1$ ise eğri bir elipstir ($\varepsilon = 0$ için çemberdir).

ii) $\varepsilon = 1$ ise eğri bir paraboldür.

iii) $\varepsilon > 1$ ise eğri bir hiperboldür.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• 1.1

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

• 1.2

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

• 1.3

$$\boxed{L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}}, \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

• 2.1

$$\boxed{l = r_0, \quad \varepsilon = \beta}.$$

• 2.2

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Bu sonuç $0 < \beta < 1$ için geçerlidir; $\beta = 0$ olduğunda yörünge daireseldir ve diğerlerinden ayırt edilen bir büyük eksen yoktur.

• 2.3

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

$\beta = 1/4$ için,

$$\boxed{r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}, \quad \boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

• 2.4

$$\boxed{T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

$\beta = 1/4$ için, $\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$

• 3.1

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

• 3.2

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

• 4.1

$$v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

• 4.2

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

• 4.3

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

$$\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2} \text{ için,}$$

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Çözüm

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

olsun; burada M , Dünya'nın kütlesidir. Sabit, küresel bir Dünya için $m \ll M$ koşulunda Newton kütleçekimini kullanıyor, atmosferik sürüklemeyi ve diğer gök cisimlerini ihmal ediyoruz. Motorun ateşlenmesi anlık, uydunun kütlesi ise sabit kabul edilmektedir. Kütleçekim potansiyel enerjisi sonsuzda sıfırdır.

1.1 — Yer eşzamanlı yörüngenin yarıçapı

Dairesel bir yörüngede merkezci ivmeyi kütleçekim ivmesi sağlar:

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

Yörünge periyodu T_0 olduğundan

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

Bu denklemler birleştirildiğinde

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

Böylece

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

$T_0 = 24.0 \times 3600$ s kullanılarak,

$$r_0 = \left[\frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2(24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m.}$$

Dolayısıyla,

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m.}$$

1.2 — Başlangıçtaki yörünge hızı

Dairesel yörünge koşulu şunu verir:

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

Buradan

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

Sayısal olarak,

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = 3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

1.3 — Başlangıçtaki açısal momentum ve mekanik enerji

Hız yarıçapa dik olduğundan açısal momentumun büyüklüğü

$$L_0 = mr_0 v_0.$$

$r_0 = \mu/v_0^2$ olduğundan,

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

Mekanik enerji

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

$\mu/r_0 = v_0^2$ kullanılarak,

$$E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

2.1 — İtmeden sonraki yarı dik giriş uzunluğu ve dışmerkezlilik

$\hat{\mathbf{r}}$, yanlışlıkla ateşleme anında radyal olarak dışarıyı, $\hat{\mathbf{t}}$ ise başlangıçtaki hız yönünü gösterebilir. İtmenin hemen ardından,

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{t}} - \beta v_0 \hat{\mathbf{r}}.$$

İki bileşen birbirine dik olduğundan

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

İtme radyaldır ve bu nedenle Dünya'nın merkezine göre açısal itmesi sıfırdır. Sonuç olarak,

$$L = L_0 = mr_0 v_0.$$

Anlık ateşleme sırasında yarıçap r_0 olarak kalır; dolayısıyla yeni enerji

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Böylece $\beta < 1$ için, bağlı bir yörünge gerektirdiği üzere $E < 0$ olur.

Verilen yörünge formüllerinden,

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

ve

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

β , negatif olmayan bir sürat oranı olduğundan,

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

l ve ε için bu ifadeler, daha sonra ele alınacak parabolik ve hiperbolik durumlarda da geçerlidir.

2.2 — Büyük eksenin doğrultusu

Yanlışlıkla ateşleme anında $r = r_0 = l$ olur. Kutupsal denklemde yerine konulduğunda

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

$\beta > 0$ için bu eşitlik

$$\cos \theta_0 = 0.$$

koşulunu gerektirir. Kutupsal referans eksenini büyük eksen doğrultusunda olduğundan, yanlışlıkla ateşleme anındaki konum vektörü bu eksene diktir:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Hangi dalın söz konusu olduğunu belirlemek için θ 'yı yörünge hareketi yönünde artacak şekilde seçelim. O hâlde

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0 \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Başlangıçtaki radyal hız içeriye doğru olduğundan $dr/d\theta < 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Daha sonra $\theta = \pi$ olduğunda yerberiyeye ulaşılır. Şekil F-1'deki yönlendirmede büyük eksen yataydır ve yerberi Dünya'nın solundadır.

$\beta = 0$ için yörünge dairesel kalır ve tek bir büyük eksen doğrultusu tanımlanamaz.

2.3 — Yerberi ve yeröte

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

ifadesinde en küçük yarıçap, paydanın en büyük olduğu $\theta = \pi$ konumunda elde edilir. En büyük yarıçap ise $\theta = 0$ konumunda elde edilir. Buradan

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}, \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}.$$

$\beta = 1/4$ için,

$$r_{\min} = \frac{4}{5}r_0 = \boxed{3.38 \times 10^7 \text{ m}},$$

$$r_{\max} = \frac{4}{3}r_0 = \boxed{5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

Her ikisi de Dünya'nın merkezinden ölçülen uzaklıklardır.

2.4 — Yeni yörüngenin periyodu

Elipsin yarı büyük eksen

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

Aynı merkezî kütle çevresindeki yörüngeler için Kepler'in üçüncü yasası şunu verir:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

Dolayısıyla,

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

$\beta = 1/4$ için,

$$T = 24.0 \left(\frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

dolayısıyla

$$\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$$

3.1 — Kaçış için gereken en küçük itme

Bir yörünge ancak mekanik enerjisi negatif değilse sonsuza ulaşabilir. Kaçışın sınır durumundaki yörüngede $E = 0$ olur:

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

Böylece

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

Bu eşikte $\varepsilon = 1$ olduğundan yörünge paraboliktir ve sürat sonsuzda sıfıra yaklaşır.

3.2 — Kaçış eşiğinde en yakın yaklaşma

$\beta = 1$ için,

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

Dolayısıyla parabolün yerberi uzaklığı

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

Uydu başlangıçta içeriye doğru hareket ettiğinden kaçmadan önce bu en yakın noktaya ulaşır. Sayısal olarak,

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ m} > R_T,$$

dolayısıyla eşik yörüngesi Dünya'ya çarpmadan geçer.

4.1 — Sonsuzdaki artık sürat

$\beta > 1$ için enerji pozitifdir. Sonsuzda kütleçekim potansiyel enerjisi sıfır olur ve enerjinin korunumu şunu verir:

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Buradan

$$v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

4.2 — Çarpma parametresi

Çarpma parametresi b , Dünya'nın merkezinden uzaklaşan kola ait asimptota olan dik uzaklıktır.

Dünya'dan çok uzakta hareket, bu asimptot boyunca düzgün doğrusal harekete yaklaşır. Bu nedenle açısal momentumun büyüklüğü

$$L = mbv_{\infty}.$$

Açısal momentumun korunumu şunu verir:

$$mbv_{\infty} = mr_0v_0.$$

4.1'in sonucu kullanılarak,

$$b = \frac{r_0v_0}{v_{\infty}} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.3 — Kaçış yönü

2.2'deki kutupsal koordinat seçimini kullanalım:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

burada θ hareket yönünde artar ve yerberi $\theta = \pi$ konumundadır.

Sonsuzda payda sıfıra yaklaşır:

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Şu tanımı yapalım:

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Yerberiden geçtikten sonra uzaklaşan dalda

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

değerine ulaşılır.

Teğetsel sürat $L/(mr)$ 'dir ve $r \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla hızın limitteki yönü, dışarıya doğru radyal yönün limitiyle çakışır.

Şekil F-2'nin sağında gösterilen ϕ açısı, başlangıçtaki dışarıya yönelmiş yarıçap ile bu uzaklaşma yönü arasındaki küçük açıdır. Dolayısıyla,

$$\phi = 2\pi - (\theta_\infty - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Buradan

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

İlgili dal şu koşulu sağlar:

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

$$\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2} \text{ için,}$$

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

böylece

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Kaçış formülleri, çarpışma içermeyen bir Kepler yörüngesini betimler. Dünya'nın sonlu boyutu dikkate alındığında bunun için ayrıca $r_0/(1 + \beta) > R_T$ koşulu gerekir; bu koşul belirtilen sayısal örnekte sağlanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Elektriksel Büyüklüklerin Mutlak Ölçümleri

Th 2 ELEKTRİKSEL BÜYÜKLÜKLERİN MUTLAK ÖLÇÜMLERİ

XIX. yüzyılda yaşanan teknolojik ve bilimsel dönüşümler, elektriksel büyüklükler için evrensel olarak kabul gören standartlara duyulan ihtiyacı zorunlu hâle getirdi. Yeni mutlak birimlerin yalnızca Fransız Devrimi'nden sonra belirlenen uzunluk, kütle ve zaman standartlarına dayanması gerektiği düşünülmüyordu. Bu birimlerin değerlerini belirlemek için 1861'den 1912'ye kadar yoğun deneysel çalışmalar yürütüldü. Burada üç örnek inceleme sunuyoruz.

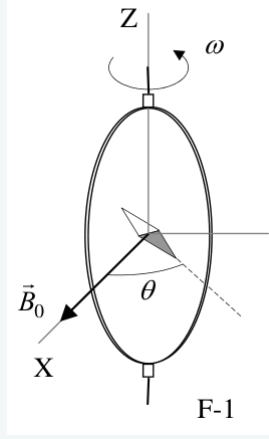
Puanlar, her alt sorunun başında parantez içinde belirtilmiştir.

Ohmun belirlenmesi (Kelvin)

Sarım sayısı N , yarıçapı a ve toplam direnci R olan kapalı dairesel bir bobin, yatay bir $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ manyetik alanı içinde, düşey bir çapı etrafında sabit ω açısal hızıyla döndürülmektedir.

1. (0.5+1.0) Bobinde indüklenen $\mathcal{E}$ elektromotor kuvvetini ve bobinin hareketini sürdürmek için gereken ortalama gücü¹ $\langle P \rangle$ hesaplayınız. Bobinin özinduktansını ihmal ediniz.

Şekil F-1'de gösterildiği gibi, bobinin merkezine küçük bir mıknatıs iğnesi yerleştirilmiştir. İğne, yatay bir düzlemde Z eksenini etrafında yavaşça serbestçe dönebilir, ancak bobinin hızlı dönüşünü izleyemez.



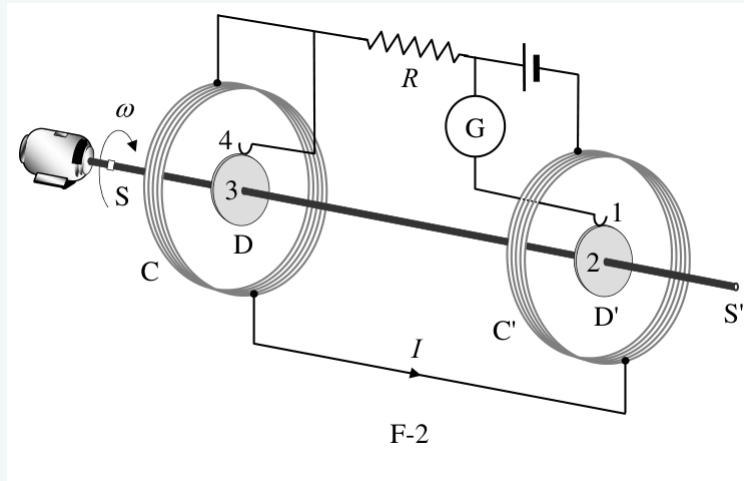
F-1

2. (2.0) Kararlı rejime ulaşıldığında iğne, $\vec{B}_0$ ile küçük bir θ açısı yapan bir doğrultuya yerleşir. Bobinin R direncini bu açı ve sistemin diğer parametreleri cinsinden hesaplayınız.

Lord Kelvin, 1860'larda ohmun mutlak standardını belirlemek için bu yöntemi kullandı. Dönen bobine gerek kalmaması için Lorenz, Lord Rayleigh ve Bayan Sidgwick tarafından kullanılan alternatif bir yöntem geliştirdi; bu yöntemi sonraki paragraflarda inceleyeceğiz.

Ohmun belirlenmesi (Rayleigh, Sidgwick).

Deney düzeneği Şekil F-2'de gösterilmiştir. Düzenek, iletken SS' miline takılı, yarıçapları b olan özdeş iki metal diskten, D ve D' disklerinden oluşur. Bir motor, bu sistemi R 'yi ölçmek için ayarlanabilen ω açısal hızıyla döndürür. Özdeş iki bobin, C ve C' (her birinin yarıçapı a ve sarım sayısı N), diskleri çevreler. Bobinler, I akımı içlerinden zıt yönlerde geçecek biçimde bağlanmıştır. Düzeneğin tamamı R direncini ölçmek için kullanılır.



F-2

¹ Periyodu T olan periyodik bir sistemde, $X(t)$ büyüklüğünün ortalama değeri $\langle X \rangle$ şöyledir:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Şu integrallerden birine veya birkaçına ihtiyaç duyabilirsiniz:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi, \quad \text{ve ileride} \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

3. (2.0) C ve C' bobinlerinden geçen I akımının, D ve D' çevresinde bobin merkezindeki alana eşit, düzgün bir B manyetik alanı oluşturduğunu varsayınız. Bobinler arasındaki uzaklığın bobinlerin yarıçapından çok daha büyük olduğunu ve $a \gg b$ koşulunun sağlandığını varsayarak, 1 ve 4 kenarları arasında indüklenen $\mathcal{E}$ elektromotor kuvvetini hesaplayınız¹.

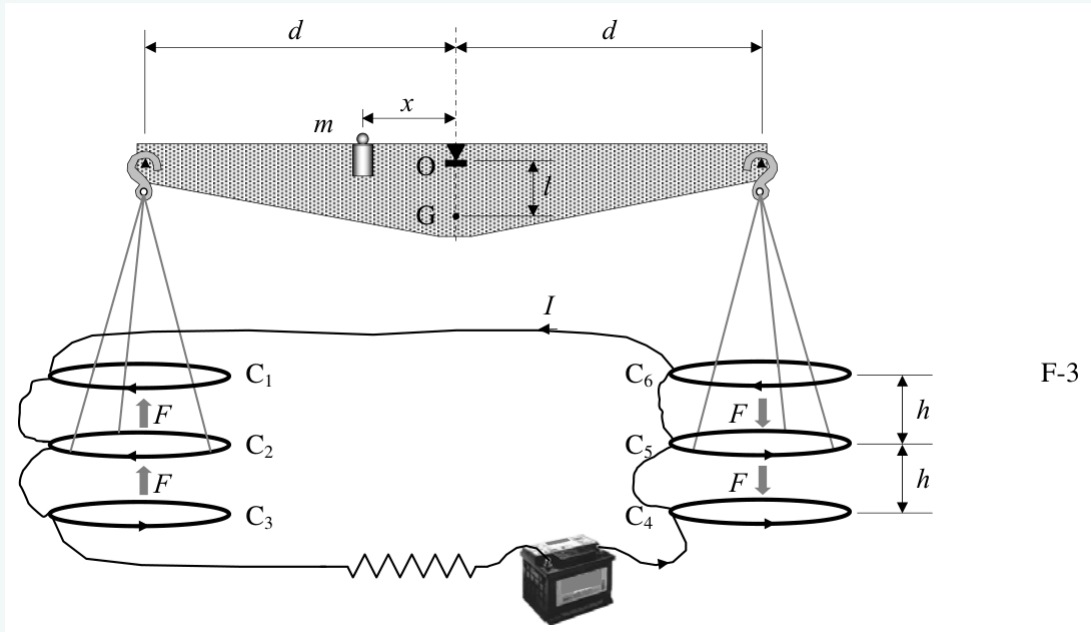
Diskler, 1 ve 4 kenarlarındaki fırça temaslariyla devreye bağlanmıştır. G galvanometresi, 1-2-3-4 devresinden geçen akımı algılar.

4. (0.5) R direnci, G sıfırı gösterdiğinde ölçülür. R 'yi sistemin fiziksel parametreleri cinsinden veriniz.

Amperin belirlenmesi

İki iletken den akım geçirip aralarındaki kuvveti ölçmek, akımın kendisinin mutlak olarak belirlenmesini sağlar. Lord Kelvin'in 1882'de tasarladığı "Akım Terazisi" bu yöntemden yararlanır. Seri bağlanmış, yarıçapları a olan, özdeş ve tek sarımlı altı bobinden, $C_1 \dots C_6$ 'dan oluşur. Şekil F-3'te gösterildiği gibi, sabit C_1, C_3, C_4 ve C_6 bobinleri, aralarında küçük bir $2h$ uzaklığı bulunan iki yatay düzlem üzerindedir. C_2 ve C_5 bobinleri, uzunluğu d olan terazi kollarında taşınır ve dengedeysen her iki düzleme eşit uzaklıktadır.

I akımı, çeşitli bobinlerden, C_2 üzerindeki manyetik kuvvet yukarı, C_5 üzerindeki ise aşağı yönde olacak biçimde geçer. Devreden akım geçtiğinde teraziye yukarıda açıklanan denge konumuna geri getirmek için, O destek noktasından x uzaklığa m kütlesi yerleştirilmesi gerekir.



F-3

5. (1.0) C_1 ile manyetik etkileşiminden dolayı C_2 üzerine etkiyen F kuvvetini hesaplayınız. Basitlik için, birim uzunluk başına kuvvetin paralel akımlar taşıyan iki uzun, düz tel arasındaki kuvvetle aynı olduğunu varsayınız.

6. (1.0) I akımı, terazi dengedeysen ölçülür. I 'nin değerini sistemin fiziksel parametreleri cinsinden veriniz. Düzenegin boyutları, soldaki ve sağdaki bobinlerin birbirlerine etkilerini ihmal edebileceğimiz şekildedir.

M , terazinin kütlesi (m ve asılı parçalar hariç), G kütle merkezi ve l , $\overline{OG}$ uzaklığı olsun.

7. (2.0) Terazinin dengesi, C_2 'nin yüksekliğinde küçük δz , C_5 'inde ise $-\delta z$ değişimleri oluşturan sapmalara karşı kararlıdır. Terazi serbest bırakıldığında hâlâ denge konumuna doğru dönecek şekilde, $\delta z_{\max}$ en büyük değerini hesaplayınız².

² Bobin merkezlerinin yaklaşık olarak aynı hizada kaldığını kabul ediniz.

$\beta \ll 1$ için

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

yaklaşımlarını ve küçük θ için $\sin \theta \approx \tan \theta$ yaklaşımını kullanınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada μ_0 boşluğun manyetik geçirgenliği, g ise yerçekimi ivmesidir. Parametrelerin sayısal değerleri verilmediği için cevaplar semboliktir.

1. $t = 0$ anında bobinin normalini $\vec{B}_0$ 'a paralel alırsak,

$$\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t), \quad \langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

2.

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta},$$

burada θ radyan cinsindendir.

3. Kenarlar arasındaki elektromotor kuvvetin büyüklüğü

$$|\mathcal{E}_{14}| = B \omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

4.

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5.

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}, \quad \text{yukarı yönlüdür.}$$

6.

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Verilen küçük yer değiştirme yaklaşımının mertebesinde,

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd} = \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

Pozitif bir yer değiştirme için, $0 < \delta z < \delta z_{\max}$ olduğunda dengeye doğru geri dönüş gerçekleşir; eşitlik sınır durumudur.

özüm

1. İndüklenen elektromotor kuvvet ve ortalama mekanik güç

$A = \pi a^2$ olsun. Bobinin pozitif normalini

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

olarak seçelim; böylece $t = 0$ anında uygulanan alana paralel olur.

N sarımdan geçen toplam manyetik akı

$$\Lambda(t) = NAB_0 \cos(\omega t).$$

Dolayısıyla Faraday yasası

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = NAB_0\omega \sin(\omega t),$$

ya da

$$\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0\omega \sin(\omega t).$$

sonucunu verir. Başlangıç yöneliminin farklı olması yalnızca fazı değiştirir.

Özindüktans ihmal edildiğinden anlık akım

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

Sabit açısal süratte, manyetik frenleme torkuna karşı sağlanan mekanik güç, Joule ısınmasının gücüne eşittir:

$$P(t) = i^2(t)R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ kullanılırsa,

$$\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

2. Mıknatıs iğnesinin sapmasından direncin bulunması

N sarımlı dairesel bir bobinin merkezindeki alan

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

1. kısımda bulunan akımı yerine koyup $\phi = \omega t$ yazarsak,

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

Bobinin bir tam dönüşü sırasında iğnenin yönündeki değişim ihmal edilebilir. Bu nedenle iğne üzerindeki ortalama tork, manyetik momentinin toplam alanın **vektörel ortalaması** ile vektörel çarpımıdır.

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

olduğundan bobinin ortalama alanı

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Bu alan, uygulanan alana diktir.

Durağan iğne,

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

doğrultusunda hizalanır. Böylece

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

ve buradan

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}.$$

Belirtilen küçük açı için,

$$R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4\theta}.$$

3. Dönen disklerin kenarları arasındaki elektromotor kuvvet

Diskleri çevreleyen bobinlerden herhangi birinin merkezindeki manyetik alanın büyüklüğü

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}.$$

Bobinlerin birbirinden çok uzakta olması, birbirlerinin alanlarına yaptıkları katkıların ihmal edilmesini sağlar. $a \gg b$ koşulu, merkezdeki bu alanın her bir disk boyunca düzgün kabul edilmesine olanak tanır.

r yarıçapındaki bir disk elemanı,

$$v = \omega r.$$

teğetsel süratiyle hareket eder. Eksenel bir manyetik alanda, birim yük başına manyetik kuvvet olan $\vec{v} \times \vec{B}$ radyal yöndedir. Dolayısıyla bir diskin göbeğinden kenarına kadar oluşan hareket elektromotor kuvvetinin büyüklüğü

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

Diskler aynı yönde döner, ancak manyetik alanları zıttır. Bu nedenle kenarlarından göbeklerine doğru elektromotor kuvvetleri zıt işaretlidir. Göbekler iletken malle birbirine bağlı olduğundan, kenardan kenara elektromotor kuvvetler büyüklükçe toplanır:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B \omega b^2.$$

Böylece

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

Kutupluluk, $\vec{\omega}$ 'nın her bir diskteki eksenel alana göre yönüyle belirlenir.

4. Galvanometrenin sıfır gösterdiği durumda direnç

Galvanometre sıfır gösterdiğinde disk–mil–galvanometre kolundan akım geçmez. Dolayısıyla bu kol boyunca dirençten kaynaklanan bir gerilim düşümü yoktur.

Disklerin elektromotor kuvveti, direnç üzerindeki IR gerilimini dengeler:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

Sıfırdan farklı olan akımı sadeleştirirsek,

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5. C_1 ile C_2 arasındaki kuvvet

Aralarında h uzaklığı bulunan ve her birinden I akımı geçen iki uzun paralel tel için, birim uzunluk başına manyetik kuvvet

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

Verilen yaklaşım kullanıldığında bu ifade, bobinlerin $2\pi a$ çevresi boyunca yerel olarak geçerlidir. Dolayısıyla kuvvet

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

ve böylece

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

C_1 ve C_2 'deki akımlar aynı yönde dolandığından etkileşim çekicidir. C_1 , C_2 'nin üzerinde olduğundan C_2 üzerindeki kuvvet yukarı yönlüdür.

6. Terazinin dengesinden akımın bulunması

Üstteki C_1 bobini C_2 'yi yukarı doğru çekerken, zıt yönde akım taşıyan alttaki C_3 bobini onu yukarı doğru iter. Her biri, 5. kısımda bulunan kuvvet kadar katkıda bulunur. Dolayısıyla C_2 üzerindeki toplam yukarı yönlü kuvvet $2F$ 'dir.

Benzer şekilde, C_5 üzerindeki toplam kuvvet aşağı yönlü $2F$ 'dir. Bu iki kuvvet aynı dönme yönünde torklar oluşturur:

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

Eklenen kütle, zıt yönlü mgx torkunu sağlar. Dengede,

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

Sonuç olarak,

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Geri çağırıcı tork oluşturan en büyük yer değiştirme

$z = \delta z$ yazalım; C_2 yükselip C_5 alçaldığında bu büyüklük pozitif olsun. Terazinin buna karşılık gelen eğim açısı α olsun; böylece

$$z = d \sin \alpha.$$

Bobin merkezlerinin aynı hizada olduğu varsayımını koruyor ve akımı sabit kabul ediyoruz.

Şu tanımı yapalım:

$$K = \mu_0 a I^2.$$

Yer değiştirmeden sonra C_2 ile üstündeki ve altındaki sabit bobinler arasındaki uzaklıklar $h - z$ ve $h + z$ olur. Her iki manyetik kuvvet de yukarı yönlü kalır; dolayısıyla toplamı

$$F_L(z) = \frac{K}{h - z} + \frac{K}{h + z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}.$$

Sağ tarafta iki uzaklık yer değiştirir; toplam aşağı yönlü kuvvet aynı büyüklüktedir.

Pozitif torku z 'yi artırma eğilimi olarak alırsak, toplam manyetik tork

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

Eklenen kütle, zıt yönlü şu torku sağlar:

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

Terazinin kütle merkezi, destek noktasının l kadar altında bulunduğundan, ağırlığı şu geri çağırıcı torku sağlar:

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

Asılı parçaların eşit ağırlıkları tork dengesinde birbirini götürür.

Dolayısıyla net tork

$$\tau(z) = \left(\frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

6. kısımdaki denge koşulundan,

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

Yerine koyarsak,

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

Küçük eğim için $\cos \alpha > 0$ olduğundan, tork şu ifadeyle aynı işarete sahiptir:

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

Verilen yaklaşımları kullanarak,

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

şunu elde ederiz:

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

$z > 0$ için, $\tau(z) < 0$ ise terazi başlangıçta dengeye doğru geri hareket eder. Bu nedenle

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

ya da

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

Dolayısıyla sınır yer değiştirmesi

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

Denge bağıntısını bir kez daha kullanırsak,

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

Bu sınırdaki net tork, korunan mertebeye sıfır olur; daha büyük pozitif bir yer değiştirme, dengeden uzaklaştıran bir tork oluşturur. Küçük, negatif bir yer değiştirme için yaklaşık torktaki her iki terim de z 'yi artırma yönündedir ve başlangıçta teraziye dengeye doğru geri döndürür.

Belirtilen sınır, küçük yer değiştirme yaklaşımının başat mertebedeki sonucudur; yaklaşımların nicel olarak kullanılabilmesi için $\delta z_{\max} \ll h$ ve $\delta z_{\max} \ll d$ koşullarını gerektirir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Kütleçekim Alanında Nötronlar

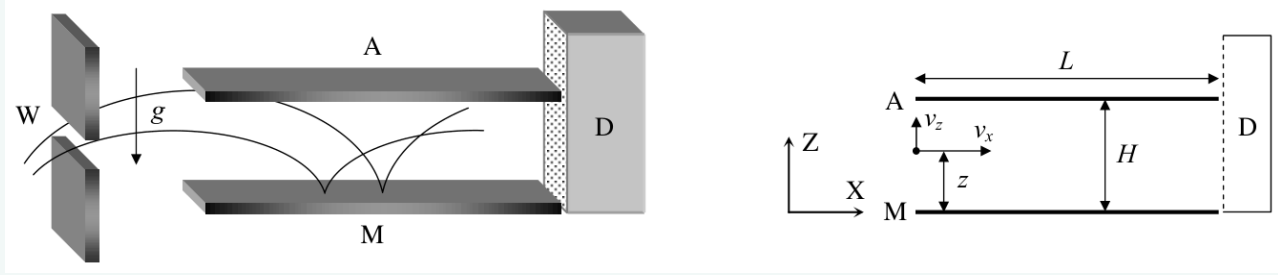
Th 3 KÜTLEÇEKİM ALANINDA NÖTRONLAR

Alışık olduğumuz klasik dünyada, Dünya'nın yüzeyinde esnek olarak sıçrayan bir top, sürekli hareket için ideal bir örnektir. Top hapsolmüştür: yüzeyin altına inemez veya dönüş noktasının üzerine çıkamaz. Bu durumda sınırlı bir bölgede kalacak, tekrar tekrar aşağı dönüp yukarı sıçrayarak bunu sonsuza dek sürdürecektir. Süreci yalnızca hava direnci veya esnek olmayan çarpmalar durdurabilir; bunlar aşağıda göz ardı edilecektir.

Grenoble'daki Institute Laue - Langevin'den bir grup fizikçi, 2002 yılında nötronların Dünya'nın kütleçekim alanındaki davranışına ilişkin deneysel kanıtlar bildirdi¹. Deneyde, sağa doğru hareket eden nötronların, nötron aynası görevi gören yatay bir kristal yüzeye doğru düşmelerine izin verildi; nötronlar bu yüzeyden esnek olarak yansıyıp tekrar tekrar başlangıç yüksekliklerine kadar yükseldiler.

Deney düzeneği Şekil F-1'de şematik olarak gösterilmiştir. Düzenek, W açıklığından, M nötron aynasından ($z = 0$ yüksekliğinde), A nötron soğurucusundan ($z = H$ yüksekliğinde ve L uzunluğunda) ve D nötron dedektöründen oluşur. Nötron demeti, A ile M arasındaki boşluktan

geçerek W'den D'ye sabit yatay hız bileşeni v_x ile ilerler. A'nın yüzeyine ulaşan tüm nötronlar soğurulur ve deneyden çıkar. M'nin yüzeyine ulaşanlar ise esnek olarak yansır. D dedektörü, geçiş hızını $N(H)$, yani birim zamanda D'ye ulaşan toplam nötron sayısını ölçer.



F-1

Her alt sorunun başında, parantez içinde puanı belirtilmiştir.

Nötronlar boşluğa, geniş bir aralıktaki pozitif ve negatif düşey hızlarla, v_z , girer. Boşluğa girdikten sonra alttaki ayna ile üstteki soğurucu arasında hareket ederler.

1. (1.5) Boşluğa z yüksekliğinde girip D dedektörüne ulaşabilen nötronların düşey hız aralığını $v_z(z)$ klasik olarak hesaplayınız. L 'nin sorudaki diğer tüm uzunluklardan çok daha büyük olduğunu varsayınız.
2. (1.5) Önceki hız aralığının dışında kalan tüm nötronların, z değerlerinden bağımsız olarak, A tarafından soğurulmasını sağlayacak en küçük boşluk uzunluğunu L_c klasik olarak hesaplayınız. $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ ve $H = 50 \text{ }\mu\text{m}$ kullanınız.

Nötron geçiş hızı $N(H)$, D'de ölçülür. Bunun H ile monoton olarak artmasını bekleriz.

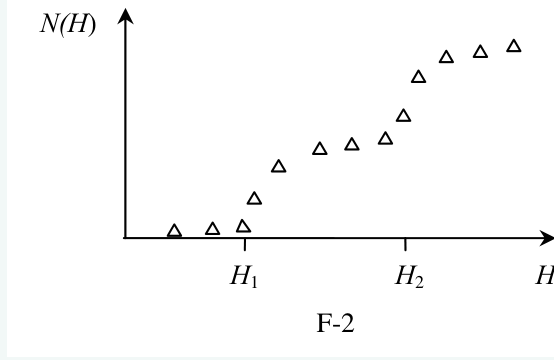
3. (2.5) Nötronların boşluğa v_z düşey hızıyla ve z yüksekliğinde geldiğini, tüm v_z ve z değerlerinin eşit olasılıklı olduğunu varsayarak klasik geçiş hızını $N_c(H)$ hesaplayınız. Yanıtınızı, boşluğa v_z düşey hızıyla ve z yüksekliğinde giren nötronların birim zaman, birim düşey hız ve birim yükseklik başına sabit sayısı olan ρ cinsinden veriniz.

¹ V. V. Nesvizhevsky ve diğerleri. "Dünya'nın kütleçekim alanında nötronların kuantum durumları." Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

Grenoble grubunun elde ettiği deneysel sonuçlar, yukarıdaki klasik öngörülerle uyuşmamaktadır; bunun yerine, H bazı kritik yükseklikleri, $H_1, H_2 \dots$ geçtiğinde $N(H)$ değerinin keskin artışlar gösterdiğini ortaya koymaktadır (Şekil F-2'de şematik bir gösterim verilmiştir). Başka bir deyişle deney, ayna üzerinde sıçrayan nötronların düşey hareketinin kuantumlanmış olduğunu göstermiştir. Bohr ve Sommerfeld'in hidrojen atomunun enerji düzeylerini elde etmek için kullandıkları dille bu şöyle ifade edilebilir: "Bu nötronların düşey doğrultudaki eylemi S , Planck eylem sabiti $\hbar$ 'nin bir tam sayı katıdır." Burada S şöyle verilir:

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{Bohr-Sommerfeld kuantumlama kuralı})$$

Burada p_z , klasik momentumun düşey bileşenidir ve integral tam bir sıçrama çevrimini kapsar. Boşlukta yalnızca bu S değerlerine sahip nötronlara izin verilir.



F-2

4. (2.5) Bohr-Sommerfeld kuantumlama koşulunu kullanarak dönüş yüksekliklerini H_n ve (düşey hareketle ilişkili) enerji düzeylerini E_n hesaplayınız. H_1 için sayısal sonucu μm , E_1 için ise eV cinsinden veriniz.

Nötronların girişteki düzgün başlangıç dağılımı ρ , uzun bir boşluk boyunca uçuş sırasında, D'de algılanan basamaklı dağılıma dönüşür (bkz. Şekil F-2). Bundan sonra, basitlik için $H < H_2$ olan uzun bir boşluk durumunu ele alacağız. Klasik olarak, enerjileri 1. soruda ele alınan aralıkta bulunan tüm nötronların boşluktan geçmesine izin verilirken, kuantum mekaniğine göre yalnızca E_1 enerji düzeyindeki nötronlara izin verilir. Heisenberg'in zaman-enerji belirsizlik ilkesine göre, bu yeniden düzenlenme için bir en küçük uçuş süresi gereklidir. Boşluğun uzunluğu küçükse düşey hareketin enerjisindeki belirsizlik önemli olacaktır. Bu olgu, enerji düzeylerinin genişlemesine yol açacaktır.

5. (2.0) D'deki nötron sayısında ilk keskin artışı gözlemlemek için gereken en küçük uçuş süresini t_q ve en küçük boşluk uzunluğunu L_q tahmin ediniz. $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ kullanınız.

Veriler:

Nicelik	Değer
Planck eylem sabiti	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Işığın boşluktaki hızı	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Temel yük	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Nötron kütlesi	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Dünya'daki yerçekimi ivmesi	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

Gerekirse şu ifadeyi kullanınız:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. $0 \leq z < H$ için, geçiş yapan nötronların hızları şu koşulu sağlar:

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

Uç noktalardaki hızlara sahip nötronlar soğurucuya ulaşır ve bu nedenle aralığa dahil edilmez.

2. En küçük klasik boşluk uzunluğu şöyledir:

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.39 \text{ cm}.$$

3. Klasik geçiş hızı şöyledir:

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. Soruda belirtilen kuantumlama kuralı tam olarak kullanıldığında,

$$H_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2}{32M^2g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

Sayısal olarak,

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$ ve $\Delta E \sim E_1$ çözünürlük ölçeği kullanıldığında, belirsizlik sınırına ilişkin tahminler şöyledir:

$$t_q \gtrsim \frac{\hbar}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Keskin biçimde ayırt edilebilen bir basamak için daha uzun bir uçuş gerekir. Kaba belirsizlik tahmini bunun yerine $\Delta E t_q \sim \hbar$ biçiminde yazılırsa, karşılık gelen tahminler şöyledir:

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Nicel bir keskinlik ölçütü olmadan sayısal ön çarpan belirlenemez.

Çözüm

1. Geçiş yapan nötronların düşey hızlarının klasik aralığı

Yatay hareket sabit hızlıdır ve düşey hareketin enerjisini etkilemez. Yansımalar arasında mekanik enerjinin korunumu şu sonucu verir:

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz.$$

Aynadaki esnek yansıma, E_z 'yi değiştirmeden v_z 'nin işaretini tersine çevirir. Üst dönüş noktası z_t 'de düşey hız sıfır olur; dolayısıyla

$$Mgz_t = \frac{1}{2}Mv_z^2 + Mgz,$$

ve buradan

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

Yeterince uzun bir boşlukta, yörüngesi $z = H$ 'ye ulaşan her nötron soğurulur. Bu nedenle geçiş için $z_t < H$, yani şu koşul gerekir:

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

Böylece

$$\boxed{-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.}$$

Her iki işaret de mümkündür: başlangıçta aşağı doğru hareket eden bir nötron önce aynadan yansır, ardından aynı dönüş yüksekliğine kadar yükselir. Soruda soğurucuya ulaşan her nötronun soğurulduğu belirtildiği için eşitlik durumu dışlanır.

2. En küçük klasik boşluk uzunluğu

Bu aralığın dışındaki bir nötronun soğurucuya ulaşmasına kadar geçebilecek en uzun süreyi bulmalıyız.

Korunan düşey hareket enerjisini $E_z = Mga$ biçiminde yazalım; burada $a \geq H$, soğurucu olmasaydı nötronun ulaşacağı dönüş yüksekliğidir. z yüksekliğindeki düşey sürati şöyledir:

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a - z)}.$$

Aynadan soğurucuya yukarı doğru yolculuk süresi şöyledir:

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a - z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - H} \right). \end{aligned}$$

Bu süre a arttıkça azalır ve en büyük değeri şöyledir:

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Başlangıçta yukarı doğru hareket eden bir nötron, böyle bir yukarı çıkış süresi içinde soğurucuya ulaşır. Başlangıçta aşağı doğru hareket eden bir nötron ise önce aynaya inip sonra soğurucuya yükselebilir. Bunun toplam süresi en fazla $2\tau(a)$ 'dır.

En uzun yörüngenin sınır durumunda nötron, soğurucunun hemen altında, aşağı doğru çok yavaş hareket ederek başlar ve enerjisi H yüksekliğine geri dönmeye ancak yeterlidir. Dolayısıyla soğurulma süresinin supremumu şöyledir:

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Yatay uçuş süresi L/v_x olduğundan, $L/v_x \geq t_c$ olduğunda bu nötronların tümü elenir. Daha küçük herhangi bir uzunluk, sınır durumdaki yörüngeye yeterince yakın bazı yörüngelerdeki nötronların soğurulmadan geçmesine izin verir. Bu nedenle

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Sayısal olarak,

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

dolayısıyla

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

3. Klasik geçiş hızı

Tanım gereği, bir $dz dv_z$ elemanında birim zamanda gelen nötron sayısı şöyledir:

$$dN = \rho dz dv_z.$$

Uzun bir boşluk için yalnızca 1. kısımda bulunan hız aralığı katkıda bulunur. Bu aralık ve tüm giriş yükseklikleri üzerinden integral alınırsa,

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

Böylece

$$\begin{aligned} N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\ &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Bu sonuç, $N_c(0) = 0$ 'dan başlayan, basamak içermeyen, düzgün ve artan bir eğri öngörür.

4. Kuantumlanmış dönüş yükseklikleri ve enerjiler

Düşey dönüş yüksekliği H_n olan bir nötron için,

$$E_n = MgH_n.$$

Yörüngesinin yukarı yönlü kısmındaki düşey momentum şöyledir:

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

İniş sırasında hem p_z hem de dz negatiftir; bu nedenle inişin eyleme katkısı, çıkışın katkısına eşittir. Aynadaki anlık yansıma herhangi bir yer değiştirme katkısı yapmaz. Sonuç olarak, tam bir sıçrama çevrimi boyunca eylem şöyledir:

$$S = 2 \int_0^{H_n} M \sqrt{2g(H_n - z)} dz$$

$$= \frac{4}{3} M \sqrt{2g} H_n^{3/2}.$$

Verilen Bohr-Sommerfeld kuralı $S = nh$ uygulanırsa,

$$\frac{4}{3} M \sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

Çözüldüğünde,

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3}.$$

Mg ile çarpılması şu sonucu verir:

$$E_n = \left(\frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3}.$$

Her iki nicelik de $n^{2/3}$ ile orantılıdır.

$n = 1$ için,

$$H_1 = \left[\frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Dolayısıyla

$$H_1 = 16.5 \mu\text{m}.$$

Karşılık gelen enerji şöyledir:

$$E_1 = MgH_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J}.$$

1 eV = 1.60×10^{-19} J kullanılarak,

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. En küçük kuantum uçuş süresi ve boşluk uzunluğu

Geçiş ilk olarak $MgH = E_1$ yakınında başlar. Birinci düzeyin enerji genişliği E_1 ile karşılaştırılabilir büyüklükteyse, bu başlangıç önemli ölçüde yayvanlaşır. Bu nedenle, ilk çözünürlük tahmini için ilgili enerji ölçeği şöyledir:

$$\Delta E \sim E_1.$$

Zaman-enerji belirsizliği tahmini şu biçimde kullanıldığında,

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

gerekli uçuş süresi ölçeği şöyle olur:

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

Enerji joule cinsinden yerine konursa,

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s.}$$

Yatay hareket buradan şu sonucu verir:

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Bu değerler, belirli bir deneysel keskinliği garanti etmekten ziyade bir belirsizlik sınırını niteler. Bu ayrımı nicel hâle getirmek için izin verilen enerji genişliğinin $\Delta E = \epsilon E_1$ olduğunu varsayalım. $E = MgH$ olduğundan, bu aynı zamanda $\Delta H/H_1 = \epsilon$ bağlı yükseklik genişliğine karşılık gelir. Tahminler şu hâli alır:

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s,} \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m.}$$

$\epsilon \ll 1$ olan keskin bir basamak, temel sınırdan belirgin ölçüde daha büyük süreler ve uzunluklar gerektirir.

$\Delta E t_q \sim h$ kullanan bir merteye hesabında ise şu değerler verilir:

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s,} \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm.}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.