

IPhO 2005

Теоретические задачи и решения · Саламанка, Испания · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphо/2005/

Задача 1: Злополучный спутник

Th 1 ЗЛОПОЛУЧНЫЙ СПУТНИК

Наиболее часто выполняемые космическими аппаратами орбитальные манёвры заключаются в изменении скорости вдоль направления полёта: разгоне для перехода на более высокие орбиты или торможении для начала входа в атмосферу. В этой задаче мы исследуем изменения орбиты при действии тяги двигателя в радиальном направлении.

Для численных расчётов используйте следующие значения: радиус Земли $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9.81$ м/с²; продолжительность звёздных суток примите равной $T_0 = 24.0$ h.

Рассмотрим геосинхронный¹ спутник связи массой m , находящийся на экваториальной круговой орбите радиусом r_0 . Такие спутники оснащены «апогейным двигателем», который создаёт тангенциальную тягу, необходимую для выхода на конечную орбиту.

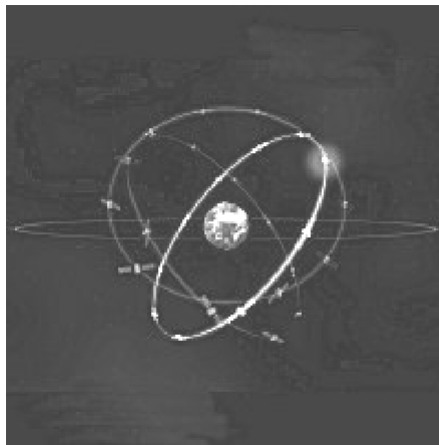


Image: ESA

Изображение: ESA

В начале каждого подпункта в скобках указано количество баллов.

Вопрос 1

1.1 (0.3) Вычислите численное значение r_0 .

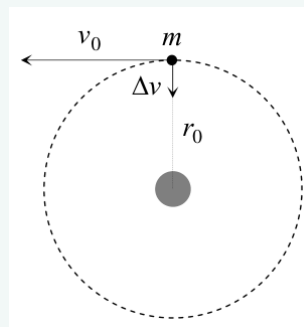
1.2 (0.3+0.1) Получите аналитическое выражение для скорости v_0 спутника через g , R_T и r_0 и вычислите её численное значение.

1.3 (0.4+0.4) Получите выражения для его момента импульса L_0 и механической энергии E_0 через v_0 , m , g и R_T .

После выхода на эту геосинхронную круговую орбиту (см. рисунок F-1), когда спутник уже стабилизирован в требуемом положении и готовится приступить к работе, ошибка наземных операторов приводит к повторному включению апогейного двигателя.

Оказывается, что тяга направлена к Земле, и, несмотря на быструю реакцию наземного персонала, отключившего двигатель, спутник получает нежелательное приращение скорости Δv . Будем характеризовать этот импульс параметром $\beta = \Delta v/v_0$.

Продолжительность работы двигателя всегда пренебрежимо мала по сравнению с любыми другими характерными временами орбитального движения, поэтому его включение можно считать мгновенным.



F-1

Вопрос 2

Предположим, что $\beta < 1$.

2.1 (0.4+0.5) Определите параметры новой орбиты² — фокальный параметр l и эксцентриситет ε — через r_0 и β .

2.2 (1.0) Вычислите угол α между большой осью новой орбиты и радиус-вектором в момент случайного включения двигателя.

2.3 (1.0+0.2) Получите аналитические выражения для расстояний от центра Земли до перигея $r_{\min}$ и апогея $r_{\max}$ через r_0 и β и вычислите их численные значения при $\beta = 1/4$.

2.4 (0.5+0.2) Определите период движения по новой орбите T через T_0 и β и вычислите его численное значение при $\beta = 1/4$.

¹ Период его обращения равен T_0 .

² См. «подсказку».

Вопрос 3

3.1 (0.5) Вычислите минимальное значение параметра импульса β_{esc} , необходимое для ухода спутника из гравитационного поля Земли.

3.2 (1.0) Определите для этого случая наименьшее расстояние спутника от центра Земли на новой траектории $r'_{\min}$ через r_0 .

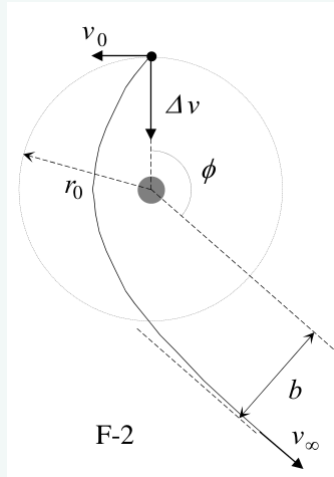
Вопрос 4

Предположим, что $\beta > \beta_{\text{esc}}$.

4.1 (1.0) Определите остаточную скорость на бесконечности v_∞ через v_0 и β .

4.2 (1.0) Получите выражение для «прицельного параметра» b асимптотического направления ухода через r_0 и β . (См. рисунок F-2).

4.3 (1.0+0.2) Определите угол ϕ , задающий асимптотическое направление ухода, через β . Вычислите его численное значение при $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$.

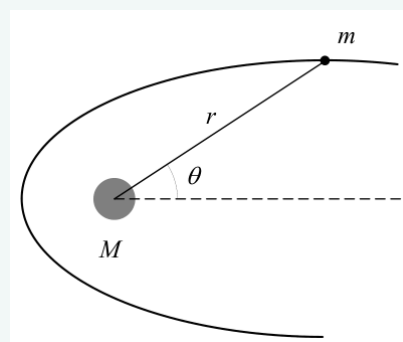


F-2

ПОДСКАЗКА

Под действием центральных сил, подчиняющихся закону обратных квадратов, тела движутся по траекториям, представляющим собой эллипсы, параболы или гиперболы. В приближении $m \ll M$ притягивающая масса M находится в одном из фокусов. Если поместить начало координат в этот фокус, общее уравнение этих кривых в полярных координатах можно записать в виде (см. рисунок F-3)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

где l — положительная постоянная, называемая *фокальным параметром*, а ε — *эксцентриситет* кривой. Через интегралы движения они выражаются следующим образом:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

где G — гравитационная постоянная Ньютона, L — модуль момента импульса движущегося по орбите тела относительно начала координат, а E — его механическая энергия; потенциальная энергия на бесконечности принята равной нулю.

Возможны следующие случаи:

- i) Если $0 \leq \varepsilon < 1$, кривая является эллипсом (окружностью при $\varepsilon = 0$).
- ii) Если $\varepsilon = 1$, кривая является параболой.
- iii) Если $\varepsilon > 1$, кривая является гиперболой.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

• 1.1

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

• 1.2

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

• 1.3

$$\boxed{L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}}, \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

• 2.1

$$\boxed{l = r_0, \quad \varepsilon = \beta}.$$

• 2.2

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Это справедливо при $0 < \beta < 1$; при $\beta = 0$ орбита является круговой и не имеет выделенной большой оси.

• 2.3

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

При $\beta = 1/4$

$$\boxed{r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}, \quad \boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 2.4

$$T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

При $\beta = 1/4$, $T = 26.4 \text{ h}$.

- 3.1

$$\beta_{\text{esc}} = 1.$$

- 3.2

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

- 4.1

$$v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

- 4.2

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

- 4.3

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

При $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Решение

Пусть

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

где M — масса Земли. Используем ньютоновский закон тяготения, считая Землю неподвижной и сферической, принимая $m \ll M$ и пренебрегая сопротивлением атмосферы и влиянием других тел. Включение двигателя считаем мгновенным, а массу спутника — постоянной.

Гравитационная потенциальная энергия на бесконечности равна нулю.

1.1 — Радиус геосинхронной орбиты

На круговой орбите гравитационное ускорение обеспечивает центростремительное ускорение:

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

Период обращения равен T_0 , поэтому

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

Таким образом,

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Подставляя $T_0 = 24.0 \times 3600$ s, получаем

$$r_0 = \left[\frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2(24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}.$$

1.2 — Начальная орбитальная скорость

Условие движения по круговой орбите даёт

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

Численно

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = 3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

1.3 — Начальные момент импульса и механическая энергия

Скорость перпендикулярна радиусу, поэтому модуль момента импульса равен

$$L_0 = m r_0 v_0.$$

Поскольку $r_0 = \mu/v_0^2$,

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

Механическая энергия равна

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

Используя $\mu/r_0 = v_0^2$, получаем

$$E_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2.$$

2.1 — Фокальный параметр и эксцентриситет после импульса

Пусть $\hat{\mathbf{r}}$ направлен радиально наружу в момент ошибочного включения двигателя, а $\hat{\mathbf{t}}$ — вдоль начальной скорости. Сразу после импульса

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{t}} - \beta v_0 \hat{\mathbf{r}}.$$

Две составляющие перпендикулярны, поэтому

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

Импульс направлен радиально, поэтому импульс момента силы относительно центра Земли равен нулю. Следовательно,

$$L = L_0 = m r_0 v_0.$$

За время мгновенного включения двигателя радиус остаётся равным r_0 , поэтому новая энергия равна

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1).$$

Таким образом, $E < 0$ при $\beta < 1$, как и требуется для связанной орбиты.

Из приведённых формул для орбиты

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

и

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

Поскольку β — неотрицательное отношение модулей скоростей,

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

Эти выражения для l и ε справедливы также для рассматриваемых далее параболического и гиперболического случаев.

2.2 — Ориентация большой оси

В момент ошибочного включения двигателя $r = r_0 = l$. Подстановка в полярное уравнение даёт

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

При $\beta > 0$ отсюда следует

$$\cos \theta_0 = 0.$$

Полярная ось направлена вдоль большой оси, поэтому радиус-вектор в момент ошибочного включения двигателя перпендикулярен этой оси:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Чтобы выбрать ветвь, будем отсчитывать θ так, чтобы угол возрастал в направлении орбитального движения. Тогда

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0 \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Начальная радиальная скорость направлена внутрь, поэтому $dr/d\theta < 0$. Следовательно,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Впоследствии спутник проходит перигей при $\theta = \pi$. При ориентации, показанной на рисунке F-1, большая ось горизонтальна, а перигей находится слева от Земли.

При $\beta = 0$ орбита остаётся круговой, и единственного направления большой оси не существует.

2.3 — Перигей и апогей

Для

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

наименьший радиус достигается при наибольшем знаменателе, то есть при $\theta = \pi$. Наибольший радиус достигается при $\theta = 0$. Отсюда

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

При $\beta = 1/4$

$$r_{\min} = \frac{4}{5}r_0 = \boxed{3.38 \times 10^7 \text{ м}},$$

$$r_{\max} = \frac{4}{3}r_0 = \boxed{5.63 \times 10^7 \text{ м}}.$$

Обе величины представляют собой расстояния от центра Земли.

2.4 — Период движения по новой орбите

Большая полуось эллипса равна

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

Третий закон Кеплера для орбит вокруг одной и той же центральной массы даёт

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

Следовательно,

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

При $\beta = 1/4$

$$T = 24.0 \left(\frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

поэтому

$$\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$$

3.1 — Минимальный импульс для ухода

Траектория может уходить на бесконечность только при неотрицательной механической энергии. Для предельной траектории ухода $E = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

Таким образом,

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

При этом пороговом значении $\varepsilon = 1$, поэтому орбита является параболической, а скорость на бесконечности стремится к нулю.

3.2 — Наименьшее расстояние при пороговом импульсе ухода

При $\beta = 1$

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

Следовательно, расстояние до перигея параболы равно

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

Спутник первоначально движется внутрь, поэтому достигает этого наименьшего расстояния прежде, чем уйти на бесконечность. Численно

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ м} > R_T,$$

так что предельная траектория проходит вне Земли.

4.1 — Остаточная скорость на бесконечности

При $\beta > 1$ энергия положительна. На бесконечности гравитационная потенциальная энергия обращается в нуль, и закон сохранения энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Отсюда

$$\boxed{v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.2 — Прицельный параметр

Прицельный параметр b — это расстояние по перпендикуляру от центра Земли до асимптоты уходящей ветви траектории.

Вдали от Земли движение приближается к равномерному движению вдоль этой асимптоты. Поэтому модуль момента импульса равен

$$L = mbv_{\infty}.$$

Закон сохранения момента импульса даёт

$$mbv_{\infty} = mr_0v_0.$$

Используя результат 4.1, получаем

$$\boxed{b = \frac{r_0v_0}{v_{\infty}} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}}.$$

4.3 — Направление ухода

Используем ту же систему отсчёта полярного угла, что и в 2.2:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

причём θ возрастает по ходу движения, а перигей соответствует $\theta = \pi$.

На бесконечности знаменатель стремится к нулю:

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Введём

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

После прохождения перигея на уходящей ветви достигается предельный угол

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

Тангенциальная скорость равна $L/(mr)$ и стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, предельное направление скорости совпадает с предельным направлением радиуса, обращённого наружу.

Угол ϕ , отмеченный справа на рисунке F-2, — это меньший угол между первоначальным радиусом, направленным наружу, и этим направлением ухода. Поэтому

$$\phi = 2\pi - (\theta_{\infty} - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Для нужной ветви выполняется

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

При $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

что даёт

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Формулы для ухода описывают кеплеровскую траекторию без столкновения. Для Земли конечного размера дополнительно требуется $r_0/(1 + \beta) > R_T$, что выполняется для указанного численного примера.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Абсолютные измерения электрических величин

Th 2 АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Технические и научные преобразования XIX века вызвали настоятельную потребность в общепринятых эталонах электрических величин. Предполагалось, что новые абсолютные единицы должны опираться только на эталоны длины, массы и времени, установленные

после Французской революции. С 1861 по 1912 год велась интенсивная экспериментальная работа по установлению значений этих единиц. Здесь мы предлагаем рассмотреть три конкретных примера.

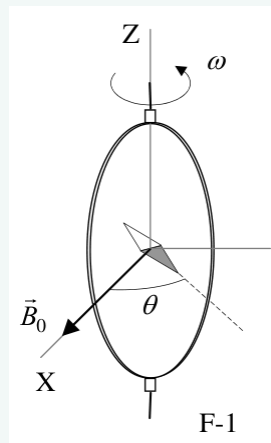
В начале каждого вопроса в скобках указано количество баллов.

Определение ома (Кельвин)

Замкнутая круглая катушка из N витков радиусом a и полным сопротивлением R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра в горизонтальном магнитном поле $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$.

1. (0.5+1.0) Вычислите электродвижущую силу $\mathcal{E}$, индуцируемую в катушке, а также среднюю мощность¹ $\langle P \rangle$, необходимую для поддержания вращения катушки. Пренебрегите самоиндукцией катушки.

В центре катушки помещена небольшая магнитная стрелка, как показано на рисунке F-1. Она может свободно и медленно поворачиваться вокруг оси Z в горизонтальной плоскости, но не может следовать за быстрым вращением катушки.



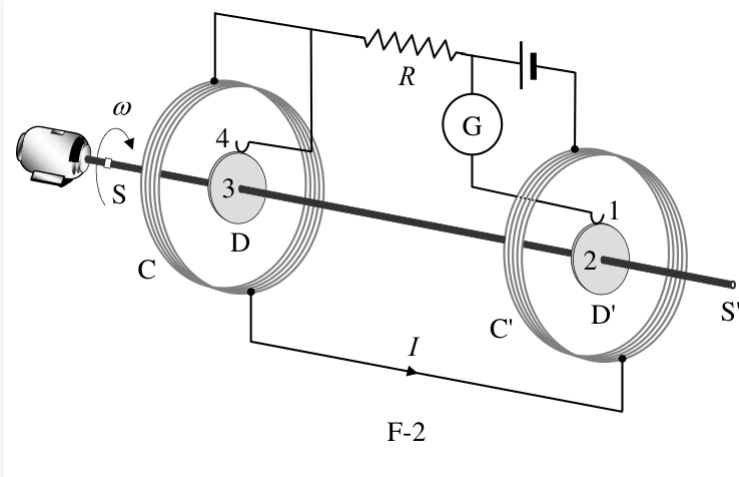
F-1

2. (2.0) После установления стационарного режима стрелка расположится в направлении, составляющем малый угол θ с $\vec{B}_0$. Вычислите сопротивление R катушки через этот угол и другие параметры системы.

Лорд Кельвин использовал этот метод в 1860-х годах для установления абсолютного эталона ома. Чтобы обойтись без вращающейся катушки, Лоренц разработал альтернативный метод, которым воспользовались лорд Рэлей и госпожа Сиджвик; этот метод мы рассмотрим далее.

Определение ома (Рэлей, Сиджвик).

Экспериментальная установка показана на рисунке F-2. Она состоит из двух одинаковых металлических дисков D и D' радиусом b , закреплённых на проводящем валу SS' . Двигатель вращает эту систему с угловой скоростью ω , которую можно регулировать при измерении R . Две одинаковые катушки C и C' (радиусом a , каждая из N витков) окружают диски. Они соединены так, что ток I течёт в них в противоположных направлениях. Вся установка служит для измерения сопротивления R .



F-2

¹ Среднее значение $\langle X \rangle$ величины $X(t)$ в периодической системе с периодом T равно

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Вам могут понадобиться один или несколько из следующих интегралов:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad \text{а далее} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

3. (2.0) Предположим, что ток I , текущий через катушки C и C' , создаёт в области дисков D и D' однородное магнитное поле B , равное полю в центре катушки. Вычислите¹ электродвижущую силу $\mathcal{E}$, возникающую между краями дисков в точках 1 и 4, считая, что расстояние между катушками намного больше их радиуса и что $a \gg b$.

Диски подключены к цепи с помощью щётчных контактов на их краях в точках 1 и 4. Гальванометр G обнаруживает протекание тока по цепи 1-2-3-4.

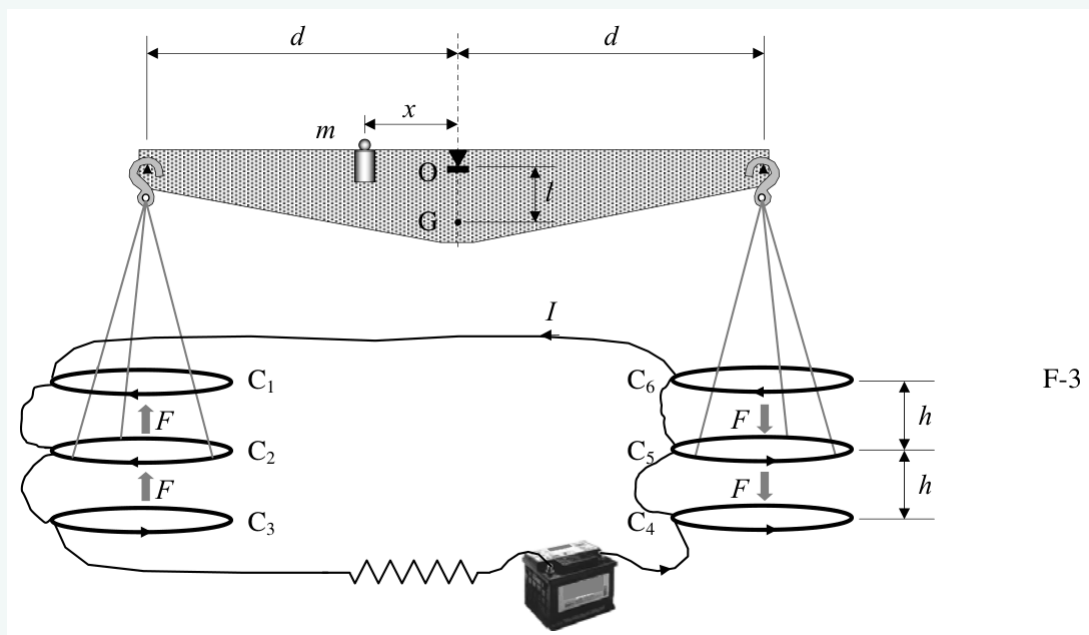
4. (0.5) Сопротивление R измеряют, когда G показывает нуль. Выразите R через физические параметры системы.

Определение ампера

Пропускание тока через два проводника и измерение силы между ними позволяет выполнить абсолютное измерение самого тока. На этом методе основаны «токовые весы», разработанные лордом Кельвином в 1882 году. Они состоят из шести одинаковых одновитковых катушек $C_1 \dots C_6$ радиусом a , соединённых последовательно. Как показано на рисунке F-3, неподвижные катушки C_1 , C_3 , C_4 и C_6 расположены в двух горизонтальных плоскостях, разделённых небольшим расстоянием $2h$. Катушки C_2 и C_5 подвешены к плечам коромысла весов длиной d и в состоянии равновесия находятся на одинаковом расстоянии от обеих плоскостей.

Ток I течёт через катушки в таких направлениях, что магнитная сила, действующая на C_2 , направлена вверх, а действующая на C_5 — вниз. Чтобы при протекании тока по цепи вернуть весы в описанное выше положение равновесия, необходимо поместить груз

массой m на расстоянии x от точки опоры O .



F-3

F-3

5. (1.0) Вычислите силу F , действующую на C_2 вследствие магнитного взаимодействия с C_1 . Для простоты считайте, что сила, приходящаяся на единицу длины, равна соответствующей силе для двух длинных прямолинейных проводов с параллельными токами.

6. (1.0) Ток I измеряют, когда весы находятся в равновесии. Выразите значение I через физические параметры системы. Размеры установки таковы, что взаимным влиянием катушек слева и справа можно пренебречь.

Пусть M — масса весов (без груза m и подвешенных частей), G — их центр масс, а l — расстояние $\overline{OG}$.

7. (2.0) Равновесие весов устойчиво относительно отклонений, вызывающих малые изменения высоты C_2 на δz и C_5 на $-\delta z$. Вычислите² максимальное значение $\delta z_{\max}$, при котором весы после освобождения ещё начинают возвращаться к положению равновесия.

² Считайте, что центры катушек остаются приблизительно на одной прямой.

Используйте приближения

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

при $\beta \ll 1$, а также $\sin \theta \approx \tan \theta$ при малых θ .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь μ_0 — магнитная постоянная, а g — ускорение свободного падения. Численные значения параметров не заданы, поэтому ответы приведены в буквенном виде.

1. Выбирая нормаль к катушке параллельной $\vec{B}_0$ при $t = 0$, получаем

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}, \quad \boxed{\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}}.$$

2.
$$\boxed{R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta}},$$

где θ выражен в радианах.

3. Модуль ЭДС между краями дисков равен

$$\boxed{|\mathcal{E}_{14}| = B\omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}}.$$

4.
$$\boxed{R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}}.$$

5.
$$\boxed{F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}}, \quad \text{направлена вверх.}$$

6.
$$\boxed{I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}}.$$

7. С точностью до порядка, учитываемого в заданном приближении малых смещений,

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd} = \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}}.$$

При положительном смещении весы начинают возвращаться к равновесию, если $0 < \delta z < \delta z_{\max}$; равенство соответствует предельной границе.

Решение

1. Индуцированная ЭДС и средняя механическая мощность

Пусть $A = \pi a^2$. Выберем положительную нормаль к катушке в виде

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

так что при $t = 0$ она параллельна внешнему полю.

Потокосцепление с N витками равно

$$\Lambda(t) = NAB_0 \cos(\omega t).$$

Поэтому закон Фарадея даёт

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = NAB_0 \omega \sin(\omega t),$$

или

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

Другая начальная ориентация изменяет только фазу.

Поскольку самоиндукцией пренебрегаем, мгновенный ток равен

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

При постоянной угловой скорости механическая мощность, затрачиваемая на преодоление тормозящего момента магнитных сил, равна мощности джоулева тепловыделения:

$$P(t) = i^2(t)R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

Используя $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, получаем

$$\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

2. Сопротивление по отклонению магнитной стрелки

Поле в центре круглой катушки из N витков равно

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

Подставляя ток, найденный в пункте 1, и обозначая $\phi = \omega t$, получаем

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

За один оборот катушки направление стрелки изменяется пренебрежимо мало. Следовательно, средний момент сил, действующий на неё, равен векторному произведению её магнитного момента на **среднее значение вектора** полного поля. Поскольку

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

среднее поле катушки равно

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Оно перпендикулярно внешнему полю.

В стационарном состоянии стрелка устанавливается вдоль

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Таким образом,

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

откуда

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}.$$

Для указанного малого угла

$$R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4\theta}.$$

3. ЭДС между краями вращающихся дисков

Модуль магнитного поля в центре каждой из окружающих диски катушек равен

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2a}.$$

Большое расстояние между катушками позволяет пренебречь вкладом каждой из них в поле у другой. Условие $a \gg b$ позволяет считать поле во всех точках каждого диска однородным и равным полю в центре.

На расстоянии r от оси элемент диска движется с тангенциальной скоростью

$$v = \omega r.$$

В магнитном поле, направленном вдоль оси, магнитная сила, приходящаяся на единицу заряда, $\vec{v} \times \vec{B}$, направлена по радиусу. Поэтому модуль ЭДС движения от центра до края одного диска равен

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

Диски вращаются в одном направлении, но магнитные поля в них противоположны. Поэтому их ЭДС, отсчитываемые от края к центру, имеют противоположные знаки. Поскольку центры дисков соединены проводящим валом, при переходе от края одного диска к краю другого модули ЭДС складываются:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B \omega b^2.$$

Таким образом,

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 NI \omega b^2}{2a}.$$

Полярность определяется направлением $\vec{\omega}$ относительно осевого поля в каждом диске.

4. Сопротивление при нулевом показании гальванометра

Когда гальванометр показывает нуль, ток через ветвь, содержащую диски, вал и гальванометр, не течёт. Поэтому омическое падение напряжения вдоль этой ветви отсутствует.

ЭДС дисков уравнивает напряжение IR на сопротивлении:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 NI \omega b^2}{2a}.$$

Сокращая ненулевой ток, получаем

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5. Сила между C_1 и C_2

Для двух длинных параллельных проводов, находящихся на расстоянии h друг от друга и несущих ток I каждый, магнитная сила на единицу длины равна

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

В заданном приближении это выражение применимо локально вдоль всей окружности катушек длиной $2\pi a$. Поэтому сила равна

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

так что

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

Токи в C_1 и C_2 текут по окружностям в одном направлении, поэтому катушки притягиваются. Поскольку C_1 расположена выше C_2 , сила, действующая на C_2 , направлена вверх.

6. Ток из условия равновесия весов

Верхняя катушка C_1 притягивает C_2 вверх, а нижняя катушка C_3 , ток в которой течёт в противоположном направлении, отталкивает её вверх. Каждая создаёт силу, найденную в пункте 5. Таким образом, полная направленная вверх сила, действующая на C_2 , равна $2F$.

Аналогично полная сила, действующая на C_5 , равна $2F$ и направлена вниз. Эти две силы создают моменты одного направления вращения:

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

Добавленный груз создаёт противоположно направленный момент mgx . В равновесии

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

Следовательно,

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Максимальное смещение, при котором момент сил является возвращающим

Обозначим $z = \delta z$, считая его положительным, когда C_2 поднимается, а C_5 опускается. Пусть α — соответствующий угол наклона коромысла весов, так что

$$z = d \sin \alpha.$$

Сохраним предположение о расположении центров катушек на одной прямой и будем считать ток постоянным.

Введём обозначение

$$K = \mu_0 a I^2.$$

После смещения расстояния между C_2 и её верхней и нижней неподвижными катушками равны $h - z$ и $h + z$. Обе магнитные силы по-прежнему направлены вверх, поэтому их сумма равна

$$F_L(z) = \frac{K}{h - z} + \frac{K}{h + z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}.$$

Справа эти два расстояния меняются местами; полная направленная вниз сила имеет тот же модуль.

Считая положительным момент, стремящийся увеличить z , получаем полный момент магнитных сил

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

Добавленный груз создаёт противоположно направленный момент

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

Поскольку центр масс весов расположен на расстоянии l ниже точки опоры, сила тяжести весов создаёт возвращающий момент

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

Моменты одинаковых сил тяжести подвешенных частей взаимно компенсируются.

Следовательно, результирующий момент равен

$$\tau(z) = \left(\frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

Из условия равновесия в пункте 6

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

Подстановка даёт

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

При малом наклоне $\cos \alpha > 0$, поэтому момент имеет тот же знак, что и

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

Используя заданные приближения,

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

получаем

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

При $z > 0$ весы начинают двигаться обратно к равновесию, если $\tau(z) < 0$. Поэтому

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

или

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

Таким образом, предельное смещение равно

$$\delta z_{\text{max}} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

Ещё раз используя соотношение равновесия, получаем

$$\delta z_{\text{max}} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

На этой границе результирующий момент обращается в нуль с точностью до учитываемого порядка; при большем положительном смещении возникает момент, уводящий весы от равновесия. При отрицательном малом смещении оба слагаемых приближённого выражения для момента направлены в сторону увеличения z , так что первоначально весы возвращаются к равновесию.

Указанная граница представляет собой результат в главном порядке по малому смещению; для количественного применения приближений необходимо выполнение условий $\delta z_{\max} \ll h$ и $\delta z_{\max} \ll d$.

Решение проверено по официальному решению.

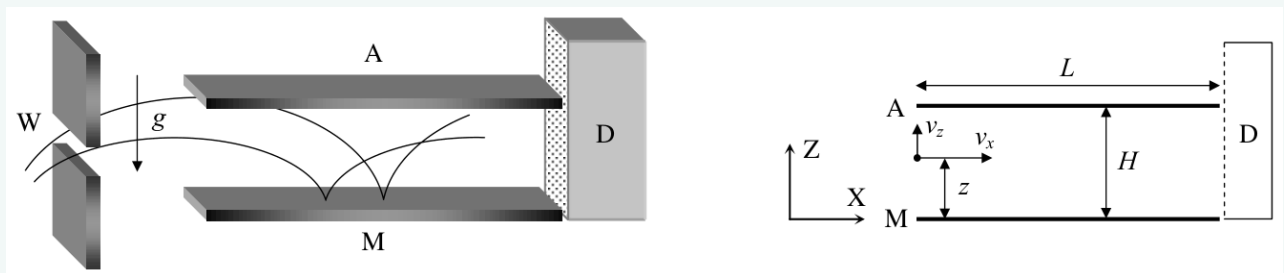
Задача 3: Нейтроны в гравитационном поле

Th 3 НЕЙТРОНЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В привычном нам классическом мире мяч, упруго отскакивающий от поверхности Земли, служит идеальным примером вечного движения. Мяч оказывается заперт: он не может опуститься ниже поверхности или подняться выше точки поворота. Он будет вечно оставаться в этом ограниченном пространстве, раз за разом опускаясь и отскакивая вверх. Остановить этот процесс могли бы лишь сопротивление воздуха или неупругие удары, которыми далее мы будем пренебрегать.

В 2002 году группа физиков из Института Лауэ — Ланжевена в Гренобле сообщила¹ об экспериментальных данных о поведении нейтронов в гравитационном поле Земли. В эксперименте нейтроны, движущиеся вправо, падали на горизонтальную поверхность кристалла, служившую нейтронным зеркалом, и раз за разом упруго отскакивали от неё до первоначальной высоты.

Схема экспериментальной установки показана на рисунке F-1. Она состоит из отверстия W , нейтронного зеркала M (на высоте $z = 0$), поглотителя нейтронов A (на высоте $z = H$, длиной L) и детектора нейтронов D . Пучок нейтронов летит с постоянной горизонтальной составляющей скорости v_x от W к D через полость между A и M . Все нейтроны, достигающие поверхности A , поглощаются и выбывают из эксперимента. Нейтроны, достигающие поверхности M , отражаются упруго. Детектор D измеряет интенсивность прошедшего потока $N(H)$, то есть общее число нейтронов, достигающих D за единицу времени.



F-1

В начале каждого пункта в скобках указано число баллов.

Нейтроны входят в полость с широким диапазоном положительных и отрицательных вертикальных скоростей v_z . Оказавшись в полости, они летят между зеркалом снизу и поглотителем сверху.

1. (1.5) Вычислите в рамках классической механики диапазон вертикальных скоростей $v_z(z)$ нейтронов, которые, входя на высоте z , могут достичь детектора D. Считайте, что L намного больше любого другого размера в задаче.
2. (1.5) Вычислите в рамках классической механики минимальную длину L_c полости, при которой все нейтроны со скоростями вне найденного выше диапазона, независимо от значений z , поглощаются поглотителем A. Используйте $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ и $H = 50 \text{ }\mu\text{m}$.

Интенсивность прошедшего потока нейтронов $N(H)$ измеряется детектором D. Ожидается, что она монотонно возрастает с H .

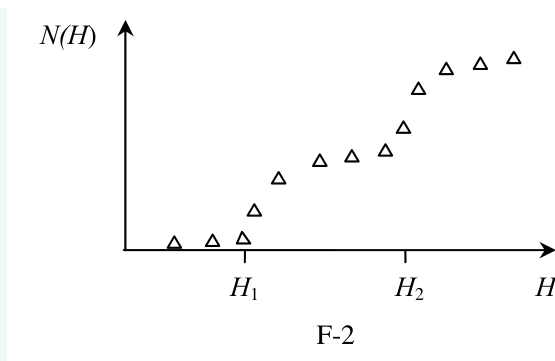
3. (2.5) Вычислите классическую интенсивность $N_c(H)$, считая, что нейтроны входят в полость с вертикальной скоростью v_z на высоте z , причём все значения v_z и z равновероятны. Выразите ответ через ρ — постоянное число нейтронов, входящих в полость с вертикальной скоростью v_z на высоте z , в расчёте на единицу времени, единицу вертикальной скорости и единицу высоты.

¹ В. В. Несвижевский и др. «Квантовые состояния нейтронов в гравитационном поле Земли». Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

Экспериментальные результаты, полученные гренобльской группой, расходятся с приведёнными выше классическими предсказаниями: вместо этого значение $N(H)$ резко возрастает, когда H проходит через некоторые критические высоты $H_1, H_2 \dots$ (схематически это показано на рисунке F-2). Иными словами, эксперимент показал, что вертикальное движение нейтронов, отскакивающих от зеркала, квантовано. На языке, который Бор и Зоммерфельд использовали для получения уровней энергии атома водорода, это можно записать так: «Действие S этих нейтронов при движении в вертикальном направлении кратно постоянной действия Планка h ». Здесь S определяется выражением

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{правило квантования Бора — Зоммерфельда})$$

где p_z — вертикальная составляющая классического импульса, а интеграл берётся по полному циклу движения между последовательными отскоками. В полости могут находиться только нейтроны с такими значениями S .



F-2

4. (2.5) Вычислите высоты точек поворота H_n и уровни энергии E_n (связанные с вертикальным движением), используя условие квантования Бора — Зоммерфельда. Приведите численный результат для H_1 в μm и для E_1 в эВ.

Начальное равномерное распределение ρ нейтронов на входе в процессе пролёта через длинную полость превращается в ступенчатое распределение, регистрируемое детектором D (см. рисунок F-2). Далее для простоты рассматривается длинная полость с $H < H_2$. С классической точки зрения через неё могли проходить все нейтроны с энергиями в диапазоне, рассмотренном в пункте 1, тогда как с квантово-механической точки зрения допускаются только нейтроны на уровне энергии E_1 . Согласно соотношению неопределённостей Гейзенберга для энергии и времени, такое перераспределение требует некоторого минимального времени пролёта. Если длина полости мала, неопределённость энергии вертикального движения будет значительной. Это явление приводит к уширению уровней энергии.

5. (2.0) Оцените минимальное время пролёта t_q и минимальную длину L_q полости, необходимые для наблюдения первого резкого увеличения числа нейтронов, регистрируемых детектором D. Используйте $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$.

Данные:

Величина	Значение
Постоянная действия Планка	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Скорость света в вакууме	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Элементарный заряд	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Масса нейтрона	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ускорение свободного падения на Земле	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

При необходимости используйте выражение:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. При $0 \leq z < H$ скорости нейтронов, проходящих через полость, удовлетворяют условию

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

При граничных значениях скорости нейтроны достигают поглотителя, поэтому эти значения исключены.

2. Минимальная классическая длина полости равна

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ м} = 6.39 \text{ см}.$$

3. Классическая интенсивность прошедшего потока равна

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. Используя в точности правило квантования, приведённое в условии задачи, получаем

$$H_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2}{32M^2g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

Численно:

$$H_1 = 16.5 \text{ }\mu\text{м}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ эВ}.$$

5. Используя $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$ и масштаб разрешения $\Delta E \sim E_1$, получаем оценки пределов, задаваемых соотношением неопределённостей:

$$t_q \gtrsim \frac{\hbar}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ с}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ м}.$$

Для чёткого разрешения ступеньки требуется более длительный пролёт. Если же записать грубую оценку по соотношению неопределённостей в виде $\Delta E t_q \sim \hbar$, соответствующие оценки имеют вид

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ с}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ м}.$$

Без количественного критерия резкости численный коэффициент не определяется однозначно.

Решение

1. Классический диапазон вертикальных скоростей проходящих нейтронов

Горизонтальное движение равномерно и не влияет на энергию вертикального движения. Между отражениями закон сохранения механической энергии даёт

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + M g z.$$

При упругом отражении от зеркала v_z меняет знак, а E_z остаётся неизменной. В верхней точке поворота z_t вертикальная скорость обращается в нуль, поэтому

$$M g z_t = \frac{1}{2} M v_z^2 + M g z,$$

и, следовательно,

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

В достаточно длинной полости каждый нейтрон, траектория которого достигает $z = H$, поглощается. Поэтому для прохождения необходимо $z_t < H$, или

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

Таким образом,

$$\boxed{-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.}$$

Допустимы оба знака: нейтрон, первоначально движущийся вниз, сначала отражается от зеркала, а затем поднимается до той же высоты точки поворота. Равенство исключено, поскольку в условии сказано, что каждый нейтрон, достигающий поглотителя, поглощается.

2. Минимальная классическая длина полости

Нужно найти наибольшее возможное время, за которое нейтрон со скоростью вне этого диапазона достигает поглотителя.

Запишем его сохраняющуюся энергию вертикального движения как $E_z = M g a$, где $a \geq H$ — высота точки поворота, которой он достиг бы в отсутствие поглотителя. Модуль его вертикальной скорости на высоте z равен

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a - z)}.$$

Время движения вверх от зеркала до поглотителя равно

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a - z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - H} \right). \end{aligned}$$

Это время уменьшается с ростом a , и его наибольшее значение равно

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Нейтрон, первоначально движущийся вверх, достигает поглотителя за время, не превышающее длительности одного такого подъёма. Нейтрон, первоначально движущийся вниз, может сначала опуститься до зеркала, а затем подняться до поглотителя. Полное время его движения не превышает $2\tau(a)$.

Предельная траектория с наибольшим временем движения начинается непосредственно под поглотителем: нейтрон движется вниз с очень малой скоростью, обладая энергией, едва достаточной для возвращения на высоту H . Поэтому точная верхняя грань времени до поглощения равна

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Поскольку время горизонтального пролёта равно L/v_x , все такие нейтроны удаляются из пучка при $L/v_x \geq t_c$. При любой меньшей длине некоторые траектории, достаточно близкие к предельной, позволяют избежать поглощения. Следовательно,

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Численно:

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

так что

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

3. Классическая интенсивность прошедшего потока

По определению, интенсивность входящего потока в элементе $dz dv_z$ равна

$$dN = \rho dz dv_z.$$

Для длинной полости вклад даёт только интервал скоростей, найденный в пункте 1. Интегрируя по этому интервалу и по всем высотам входа, получаем

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\ &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Полученная зависимость представляет собой гладкую возрастающую кривую, начинающуюся при $N_c(0) = 0$, без ступенек.

4. Квантованные высоты точек поворота и энергии

Для нейтрона, высота точки поворота вертикального движения которого равна H_n ,

$$E_n = MgH_n.$$

Вертикальная составляющая импульса на восходящем участке его траектории равна

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

При движении вниз и p_z , и dz отрицательны, поэтому вклад нисходящего участка в действие равен вкладу восходящего участка. Мгновенное отражение от зеркала не сопровождается перемещением. Следовательно, действие за один полный цикл между отскоками равно

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{H_n} M\sqrt{2g(H_n - z)} dz \\ &= \frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2}. \end{aligned}$$

Применяя данное в условии правило Бора — Зоммерфельда $S = nh$, получаем

$$\frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

Решая это уравнение, находим

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3}.$$

Умножение на Mg даёт

$$E_n = \left(\frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3}.$$

Обе величины пропорциональны $n^{2/3}$.

При $n = 1$

$$H_1 = \left[\frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}.$$

Соответствующая энергия равна

$$E_1 = MgH_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J}.$$

Используя $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$, получаем

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. Минимальное квантовое время пролёта и длина полости

Прохождение нейтронов впервые начинается вблизи $MgH = E_1$. Если энергетическая ширина первого уровня сравнима с E_1 , этот порог существенно размывается. Поэтому характерный масштаб энергии для первоначальной оценки разрешения равен

$$\Delta E \sim E_1.$$

Используя оценку по соотношению неопределённостей для энергии и времени в виде

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

получаем необходимый масштаб времени пролёта:

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

Подставляя энергию в джоулях, находим

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

Тогда из горизонтального движения получаем

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Эти значения характеризуют границу, задаваемую соотношением неопределённостей, но не гарантируют определённой резкости экспериментальной ступеньки. Чтобы выразить это различие количественно, предположим, что допустимая энергетическая ширина равна $\Delta E = \epsilon E_1$. Поскольку $E = MgH$, ей также соответствует относительная ширина по высоте $\Delta H/H_1 = \epsilon$. Оценки принимают вид

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m}.$$

Для резкой ступеньки, при $\epsilon \ll 1$, требуются времена и длины, существенно превышающие базовую границу.

При оценке по порядку величины с использованием $\Delta E t_q \sim h$ вместо этого приводят

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm}.$$

Решение проверено по официальному решению.