

IPhO 2005

Problemas teóricos y soluciones · Salamanca, España · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/2005/

Problema 1: Un satélite desafortunado

Th 1 UN SATÉLITE DESAFORTUNADO

Las maniobras orbitales más frecuentes que realizan las naves espaciales consisten en variaciones de velocidad en la dirección de vuelo, es decir, aceleraciones para alcanzar órbitas más altas o frenados para iniciar la reentrada en la atmósfera. En este problema estudiaremos las variaciones orbitales cuando el empuje del motor se aplica en una dirección radial.

Para obtener valores numéricos, utilice: radio terrestre $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $g = 9.81$ m/s², y tome como duración del día sidéreo $T_0 = 24.0$ h.

Consideramos un satélite de comunicaciones geosíncrono¹ de masa m , situado en una órbita circular ecuatorial de radio r_0 . Estos satélites disponen de un «motor de apogeo» que proporciona los empujes tangenciales necesarios para alcanzar la órbita definitiva.

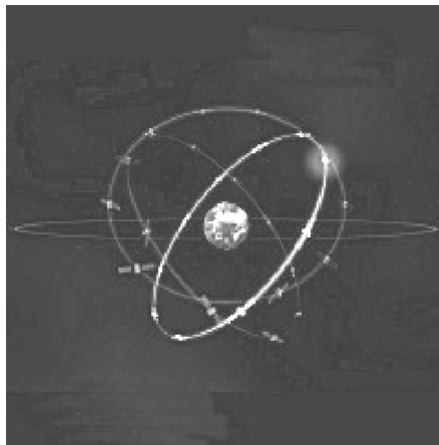


Image: ESA

Imagen: ESA

La puntuación se indica entre paréntesis al principio de cada apartado.

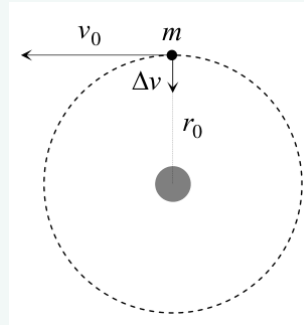
Pregunta 1

1.1 (0.3) Calcule el valor numérico de r_0 .

1.2 (0.3+0.1) Dé la expresión analítica de la velocidad v_0 del satélite en función de g , R_T y r_0 , y calcule su valor numérico.

1.3 (0.4+0.4) Obtenga las expresiones de su momento angular L_0 y de su energía mecánica E_0 , en función de v_0 , m , g y R_T .

Una vez alcanzada esta órbita circular geosíncrona (véase la figura F-1), cuando el satélite ya se ha estabilizado en la posición deseada y se está preparando para realizar su trabajo, un error de los controladores en tierra provoca un nuevo encendido del motor de apogeo. El empuje resulta estar dirigido hacia la Tierra y, a pesar de la rápida reacción del equipo en tierra para apagar el motor, se comunica al satélite una variación de velocidad no deseada Δv . Caracterizamos este impulso mediante el parámetro $\beta = \Delta v/v_0$. La duración del encendido del motor es siempre despreciable frente a cualquier otro tiempo orbital, por lo que puede considerarse instantáneo.



F-1

Pregunta 2

Suponga que $\beta < 1$.

2.1 (0.4+0.5) Determine los parámetros de la nueva órbita², el *semilado recto* l y la *excentricidad* ε , en función de r_0 y β .

2.2 (1.0) Calcule el ángulo α entre el eje mayor de la nueva órbita y el vector de posición en el instante del encendido accidental.

2.3 (1.0+0.2) Dé las expresiones analíticas de las distancias del perigeo $r_{\min}$ y del apogeo $r_{\max}$ al centro de la Tierra, en función de r_0 y β , y calcule sus valores numéricos para $\beta = 1/4$.

2.4 (0.5+0.2) Determine el período de la nueva órbita, T , en función de T_0 y β , y calcule su valor numérico para $\beta = 1/4$.

¹ Su período de revolución es T_0 .

² Véase la «indicación».

Pregunta 3

3.1 (0.5) Calcule el parámetro mínimo de impulso, β_{esc} , necesario para que el satélite escape de la gravedad terrestre.

3.2 (1.0) Determine, en este caso, la distancia mínima del satélite al centro de la Tierra en la nueva trayectoria, $r'_{\min}$, en función de r_0 .

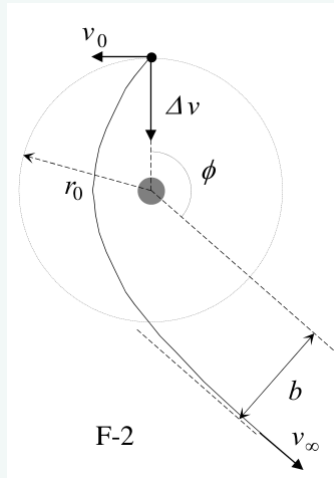
Pregunta 4

Suponga que $\beta > \beta_{\text{esc}}$.

4.1 (1.0) Determine la velocidad residual en el infinito, v_∞ , en función de v_0 y β .

4.2 (1.0) Obtenga el «parámetro de impacto» b de la dirección asintótica de escape en función de r_0 y β . (Véase la figura F-2).

4.3 (1.0+0.2) Determine el ángulo ϕ de la dirección asintótica de escape en función de β . Calcule su valor numérico para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$.

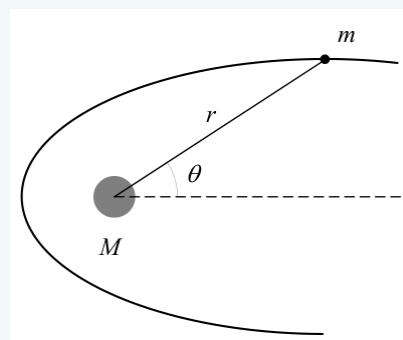


F-2

INDICACIÓN

Bajo la acción de fuerzas centrales que obedecen la ley del inverso del cuadrado, los cuerpos siguen trayectorias descritas por elipses, parábolas o hipérbolas. En la aproximación $m \ll M$, la masa gravitatoria M se encuentra en uno de los focos. Tomando el origen en este foco, la ecuación polar general de estas curvas puede escribirse como (véase la figura F-3)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

donde l es una constante positiva denominada *semilado recto* y ε es la *excentricidad* de la curva. En función de las constantes del movimiento:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

donde G es la constante de gravitación de Newton, L es el módulo del momento angular de la masa en órbita respecto al origen, y E es su energía mecánica, tomando la energía potencial igual a cero en el infinito.

Pueden darse los siguientes casos:

- i) Si $0 \leq \varepsilon < 1$, la curva es una elipse (una circunferencia para $\varepsilon = 0$).
- ii) Si $\varepsilon = 1$, la curva es una parábola.
- iii) Si $\varepsilon > 1$, la curva es una hipérbola.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 1.1

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 1.2

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

- 1.3

$$\boxed{L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}}, \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

- 2.1

$$\boxed{l = r_0, \quad \varepsilon = \beta}.$$

- 2.2

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Esto se aplica para $0 < \beta < 1$; cuando $\beta = 0$, la órbita es circular y no tiene un eje mayor distinguido.

- 2.3

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

Para $\beta = 1/4$,

$$\boxed{r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}, \quad \boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 2.4

$$\boxed{T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

Para $\beta = 1/4$, $\boxed{T = 26.4 \text{ h}}$.

- 3.1

$$\beta_{\text{esc}} = 1.$$

- 3.2

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

- 4.1

$$v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

- 4.2

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

- 4.3

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2},$

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Solución

Sea

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

donde M es la masa de la Tierra. Utilizamos la gravedad newtoniana para una Tierra fija y esférica, con $m \ll M$, y despreciamos la resistencia atmosférica y la influencia de otros cuerpos. El encendido del motor se trata como instantáneo y la masa del satélite se considera constante. La energía potencial gravitatoria es cero en el infinito.

1.1 — Radio de la órbita geosíncrona

En una órbita circular, la aceleración gravitatoria proporciona la aceleración centrípeta:

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

El período orbital es T_0 , por lo que

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

Así pues,

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Utilizando $T_0 = 24.0 \times 3600$ s,

$$r_0 = \left[\frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2 (24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}.$$

1.2 — Velocidad orbital inicial

La condición de órbita circular da

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

Por consiguiente,

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

Numéricamente,

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = 3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

1.3 — Momento angular y energía mecánica iniciales

La velocidad es perpendicular al radio, por lo que el módulo del momento angular es

$$L_0 = mr_0 v_0.$$

Como $r_0 = \mu/v_0^2$,

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

La energía mecánica es

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

Utilizando $\mu/r_0 = v_0^2$,

$$E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

2.1 — Semilado recto y excentricidad después del impulso

Sea $\hat{\mathbf{r}}$ el vector que apunta radialmente hacia fuera en el instante del encendido accidental, y sea $\hat{\mathbf{t}}$ el vector que apunta en la dirección y el sentido de la velocidad original. Inmediatamente después del impulso,

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{t}} - \beta v_0 \hat{\mathbf{r}}.$$

Las dos componentes son perpendiculares, de modo que

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

El impulso es radial y, por tanto, su impulso angular respecto al centro de la Tierra es nulo. En consecuencia,

$$L = L_0 = mr_0v_0.$$

El radio permanece igual a r_0 durante el encendido instantáneo, por lo que la nueva energía es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Así, $E < 0$ para $\beta < 1$, como corresponde a una órbita ligada.

A partir de las fórmulas orbitales proporcionadas,

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

y

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

Como β es un cociente no negativo de módulos de velocidad,

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

Estas expresiones de l y ε también son válidas para los casos parabólico e hiperbólico que se consideran más adelante.

2.2 — Orientación del eje mayor

En el instante del encendido accidental, $r = r_0 = l$. Al sustituir en la ecuación polar se obtiene

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

Para $\beta > 0$, esto exige que

$$\cos \theta_0 = 0.$$

El eje de referencia polar tiene la dirección del eje mayor, por lo que el vector de posición en el instante del encendido accidental es perpendicular a dicho eje:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Para identificar la rama, elegimos θ de modo que aumente en el sentido del movimiento orbital. Entonces

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0 \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

La velocidad radial inicial está dirigida hacia dentro, por lo que $dr/d\theta < 0$. Por tanto,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

El perigeo se alcanza posteriormente en $\theta = \pi$. En la orientación de la figura F-1, el eje mayor es horizontal y el perigeo se encuentra a la izquierda de la Tierra.

Para $\beta = 0$, la órbita sigue siendo circular y no existe una dirección única del eje mayor.

2.3 — Perigeo y apogeo

Para

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

el radio mínimo se obtiene cuando el denominador es máximo, en $\theta = \pi$. El radio máximo se obtiene en $\theta = 0$. Por consiguiente,

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

Para $\beta = 1/4$,

$$r_{\min} = \frac{4}{5}r_0 = \boxed{3.38 \times 10^7 \text{ m}},$$
$$r_{\max} = \frac{4}{3}r_0 = \boxed{5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

Ambas son distancias desde el centro de la Tierra.

2.4 — Período de la nueva órbita

El semieje mayor de la elipse es

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

La tercera ley de Kepler para órbitas alrededor de la misma masa central da

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

Por tanto,

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

Para $\beta = 1/4$,

$$T = 24.0 \left(\frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

por lo que

$$\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$$

3.1 — Impulso mínimo para escapar

Una trayectoria solo puede alcanzar el infinito si su energía mecánica es no negativa. La trayectoria límite de escape tiene $E = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

Así pues,

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

En este umbral, $\varepsilon = 1$, por lo que la órbita es parabólica y el módulo de la velocidad tiende a cero en el infinito.

3.2 — Distancia mínima en el umbral de escape

Para $\beta = 1$,

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

La distancia del perigeo de la parábola es, por tanto,

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

El satélite se mueve inicialmente hacia dentro, por lo que alcanza esta distancia mínima antes de escapar. Numéricamente,

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ m} > R_T,$$

por lo que la trayectoria umbral no intersecta la Tierra.

4.1 — Módulo de la velocidad residual en el infinito

Para $\beta > 1$, la energía es positiva. En el infinito, la energía potencial gravitatoria se anula, y la conservación de la energía da

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Por consiguiente,

$$\boxed{v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.2 — Parámetro de impacto

El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular desde el centro de la Tierra hasta la asíntota de salida.

Lejos de la Tierra, el movimiento se aproxima a un movimiento uniforme a lo largo de esa asíntota. En consecuencia, el módulo de su momento angular es

$$L = mbv_{\infty}.$$

La conservación del momento angular da

$$mbv_{\infty} = mr_0v_0.$$

Utilizando el resultado de 4.1,

$$\boxed{b = \frac{r_0v_0}{v_{\infty}} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}}.$$

4.3 — Dirección de escape

Utilizamos la misma convención polar que en 2.2:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

con θ creciente en el sentido del movimiento y el perigeo en $\theta = \pi$.

En el infinito, el denominador tiende a cero:

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Definimos

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Después de pasar por el perigeo, la rama de salida alcanza

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

El módulo de la velocidad tangencial es $L/(mr)$, que tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Así, la dirección límite de la velocidad coincide con la dirección radial límite hacia fuera.

El ángulo ϕ señalado a la derecha de la figura F-2 es el menor ángulo entre el radio original orientado hacia fuera y esta dirección de salida. Por tanto,

$$\phi = 2\pi - (\theta_{\infty} - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Por consiguiente,

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

La rama pertinente satisface

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

Para $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$,

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

lo que da

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Las fórmulas de escape describen una trayectoria kepleriana sin colisiones. Para una Tierra de tamaño finito, esto exige además que $r_0/(1 + \beta) > R_T$, condición que se cumple en el ejemplo numérico especificado.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Medidas absolutas de magnitudes eléctricas

Th 2 MEDIDAS ABSOLUTAS DE MAGNITUDES ELÉCTRICAS

Las transformaciones tecnológicas y científicas que tuvieron lugar durante el siglo XIX generaron una necesidad imperiosa de patrones universalmente aceptados para las magnitudes eléctricas. Se consideraba que las nuevas unidades absolutas debían basarse únicamente en los patrones de longitud, masa y tiempo establecidos tras la Revolución francesa. Entre 1861 y 1912 se llevó a cabo una intensa labor experimental para fijar los valores de estas unidades. Aquí proponemos tres casos de estudio.

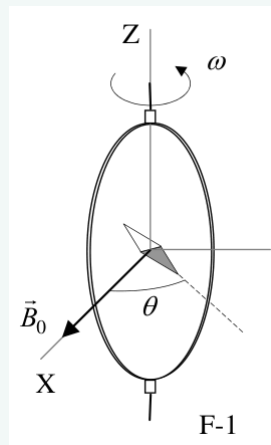
Las puntuaciones se indican entre paréntesis al comienzo de cada apartado.

Determinación del ohmio (Kelvin)

Una bobina circular cerrada de N espiras, radio a y resistencia total R gira con velocidad angular uniforme ω alrededor de un diámetro vertical en un campo magnético horizontal $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$.

1. (0.5+1.0) Calcule la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ inducida en la bobina, así como la potencia media¹ $\langle P \rangle$ necesaria para mantenerla en movimiento. Desprecie la autoinductancia de la bobina.

En el centro de la bobina se coloca una pequeña aguja magnética, como se muestra en la figura F-1. Puede girar libremente y de forma lenta alrededor del eje Z en un plano horizontal, pero no puede seguir la rápida rotación de la bobina.



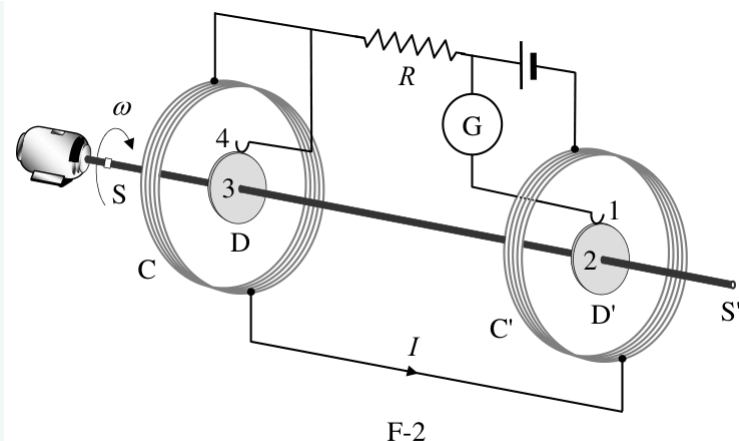
F-1

2. (2.0) Una vez alcanzado el régimen estacionario, la aguja se orientará en una dirección que forma un pequeño ángulo θ con $\vec{B}_0$. Calcule la resistencia R de la bobina en función de este ángulo y de los demás parámetros del sistema.

Lord Kelvin utilizó este método en la década de 1860 para establecer el patrón absoluto del ohmio. Para evitar la bobina giratoria, Lorenz ideó un método alternativo que utilizaron Lord Rayleigh y la Sra. Sidgwick, y que analizamos en los párrafos siguientes.

Determinación del ohmio (Rayleigh, Sidgwick).

El montaje experimental se muestra en la figura F-2. Consta de dos discos metálicos idénticos D y D' de radio b , montados sobre el eje conductor SS'. Un motor hace girar el conjunto con una velocidad angular ω , que puede ajustarse para medir R . Dos bobinas idénticas C y C' (de radio a y con N espiras cada una) rodean los discos. Están conectadas de tal forma que la corriente I circula por ellas en sentidos opuestos. El aparato completo sirve para medir la resistencia R .



F-2

¹ El valor medio $\langle X \rangle$ de una magnitud $X(t)$ en un sistema periódico de período T es

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Puede necesitar una o varias de estas integrales:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad \text{y más adelante} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

3. (2.0) Suponga que la corriente I que circula por las bobinas C y C' crea un campo magnético uniforme B en torno a D y D' , igual al del centro de la bobina. Calcule¹ la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ inducida entre los bordes 1 y 4, suponiendo que la distancia entre las bobinas es mucho mayor que su radio y que $a \gg b$.

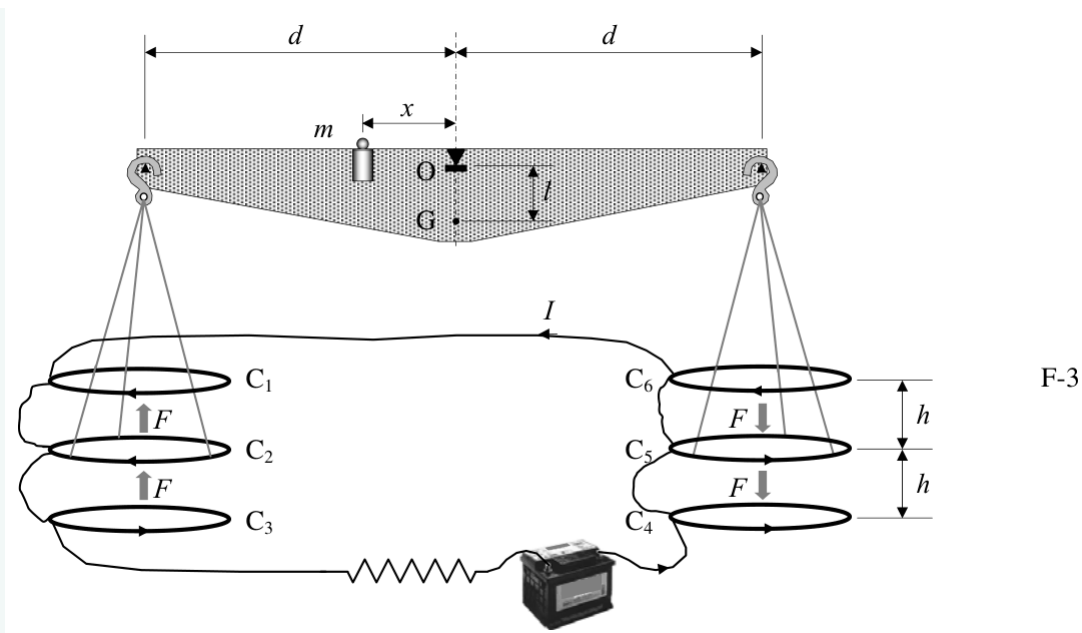
Los discos están conectados al circuito mediante contactos de escobilla en sus bordes 1 y 4. El galvanómetro G detecta el paso de corriente por el circuito 1-2-3-4.

4. (0.5) La resistencia R se mide cuando G indica cero. Expresé R en función de los parámetros físicos del sistema.

Determinación del amperio

Hacer pasar una corriente por dos conductores y medir la fuerza entre ellos permite determinar de forma absoluta la propia corriente. La «balanza de corriente» diseñada por Lord Kelvin en 1882 utiliza este método. Consta de seis bobinas idénticas de una sola espira $C_1 \dots C_6$, de radio a , conectadas en serie. Como se muestra en la figura F-3, las bobinas fijas C_1, C_3, C_4 y C_6 se encuentran en dos planos horizontales separados por una pequeña distancia $2h$. Las bobinas C_2 y C_5 están suspendidas de los brazos de la balanza, de longitud d , y, en equilibrio, se encuentran a la misma distancia de ambos planos.

La corriente I circula por las distintas bobinas en un sentido tal que la fuerza magnética sobre C_2 está dirigida hacia arriba, mientras que la fuerza sobre C_5 está dirigida hacia abajo. Se necesita una masa m a una distancia x del punto de apoyo O para devolver la balanza a la posición de equilibrio descrita anteriormente cuando circula corriente por el circuito.



F-3

5. (1.0) Calcule la fuerza F sobre C_2 debida a la interacción magnética con C_1 . Para simplificar, suponga que la fuerza por unidad de longitud es la correspondiente a dos hilos largos y rectilíneos por los que circulan corrientes paralelas.

6. (1.0) La corriente I se mide cuando la balanza está en equilibrio. Exprese el valor de I en función de los parámetros físicos del sistema. Las dimensiones del aparato son tales que podemos despreciar los efectos mutuos entre las bobinas de la izquierda y las de la derecha.

Sean M la masa de la balanza (excluyendo m y las partes suspendidas), G su centro de masas y l la distancia $\overline{OG}$.

7. (2.0) El equilibrio de la balanza es estable frente a desviaciones que producen pequeños cambios δz en la altura de C_2 y $-\delta z$ en la de C_5 . Calcule² el valor máximo $\delta z_{\max}$ para el que la balanza sigue regresando hacia la posición de equilibrio al soltarla.

² Considere que los centros de las bobinas permanecen aproximadamente alineados.

Utilice las aproximaciones

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{o} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

para $\beta \ll 1$, y $\sin \theta \approx \tan \theta$ para θ pequeño.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí μ_0 es la permeabilidad del vacío y g es la aceleración de la gravedad. No se proporcionan valores numéricos de los parámetros, por lo que las respuestas son simbólicas.

1. Tomando la normal a la bobina paralela a $\vec{B}_0$ en $t = 0$,

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}, \quad \boxed{\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}}.$$

2.
$$\boxed{R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4\theta}},$$

con θ en radianes.

3. El módulo de la fem entre los bordes es

$$\boxed{|\mathcal{E}_{14}| = B\omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}}.$$

4.
$$\boxed{R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}}.$$

5.
$$\boxed{F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}}, \quad \text{dirigida hacia arriba.}$$

6.
$$\boxed{I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 a d}}}.$$

7. Hasta el orden de la aproximación de pequeños desplazamientos indicada,

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd} = \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}}.$$

Un desplazamiento positivo da lugar a un retorno hacia el equilibrio cuando $0 < \delta z < \delta z_{\max}$; la igualdad corresponde al límite.

Solución

1. Fem inducida y potencia mecánica media

Sea $A = \pi a^2$. Elegimos la normal positiva a la bobina como

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

de modo que sea paralela al campo aplicado en $t = 0$.

El flujo magnético concatenado con las N espiras es

$$\Lambda(t) = NAB_0 \cos(\omega t).$$

Por tanto, la ley de Faraday da

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = NAB_0 \omega \sin(\omega t),$$

o bien

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

Una orientación inicial diferente solo cambia la fase.

Como se desprecia la autoinductancia, la corriente instantánea es

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

A velocidad angular constante, la potencia mecánica suministrada para vencer el par de frenado magnético es igual a la potencia disipada por efecto Joule:

$$P(t) = i^2(t)R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

Utilizando $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$,

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}}.$$

2. Resistencia a partir de la desviación de la aguja magnética

El campo en el centro de una bobina circular de N espiras es

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

Sustituyendo la corriente obtenida en el apartado 1 y escribiendo $\phi = \omega t$,

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

La dirección de la aguja cambia de forma despreciable durante una vuelta de la bobina. En consecuencia, el momento de fuerza medio que actúa sobre ella es el producto vectorial de su momento magnético por el **promedio vectorial** del campo total. Como

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

el campo medio de la bobina es

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Es perpendicular al campo aplicado.

La aguja en régimen estacionario se alinea con

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Así,

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

de donde se obtiene

$$\boxed{R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}}.$$

Para el ángulo pequeño especificado,

$$\boxed{R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4\theta}}.$$

3. Fem entre los bordes de los discos giratorios

El campo magnético en el centro de cualquiera de las bobinas que rodean los discos tiene módulo

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}.$$

La gran separación entre las bobinas permite despreciar sus contribuciones mutuas al campo. La condición $a \gg b$ permite tratar este campo central como uniforme en toda la superficie de cada disco.

A una distancia radial r , un elemento del disco se mueve con rapidez tangencial

$$v = \omega r.$$

En un campo magnético axial, la fuerza magnética por unidad de carga, $\vec{v} \times \vec{B}$, es radial. Por tanto, el módulo de la fem de movimiento desde el centro hasta el borde de un disco es

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

Los discos giran en el mismo sentido, pero sus campos magnéticos son opuestos. Por ello, sus fem del borde al centro tienen signos opuestos. Como los centros están unidos por el eje conductor, las fem entre los bordes se suman en módulo:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B \omega b^2.$$

Así,

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

La polaridad viene determinada por la dirección de $\vec{\omega}$ con respecto al campo axial en cada disco.

4. Resistencia cuando el galvanómetro indica cero

Cuando el galvanómetro indica cero, no circula corriente por la rama disco–eje–galvanómetro. Por tanto, no hay caída de tensión resistiva a lo largo de esa rama.

La fem de los discos compensa la tensión IR en los extremos de la resistencia:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

Cancelando la corriente no nula,

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5. Fuerza entre C_1 y C_2

Para dos hilos largos y paralelos separados por h , por cada uno de los cuales circula una corriente I , la fuerza magnética por unidad de longitud es

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

Según la aproximación indicada, esta expresión se aplica localmente a lo largo de la circunferencia $2\pi a$ de las bobinas. Por tanto, la fuerza es

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

de modo que

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

Las corrientes en C_1 y C_2 circulan en el mismo sentido, por lo que la interacción es atractiva. Como C_1 está por encima de C_2 , la fuerza sobre C_2 está dirigida hacia arriba.

6. Corriente a partir del equilibrio de la balanza

La bobina superior C_1 atrae a C_2 hacia arriba, mientras que la bobina inferior C_3 , por la que circula corriente en sentido opuesto, la repele hacia arriba. Cada una aporta la fuerza obtenida en el apartado 5. Por tanto, la fuerza total hacia arriba sobre C_2 es $2F$.

De forma análoga, la fuerza total sobre C_5 es $2F$ hacia abajo. Estas dos fuerzas producen momentos de fuerza en el mismo sentido de giro:

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

La masa añadida proporciona el momento de fuerza opuesto mgx . En equilibrio,

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

En consecuencia,

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Desplazamiento máximo que produce un momento de fuerza restaurador

Escribimos $z = \delta z$, positivo cuando C_2 sube y C_5 baja. Sea α la inclinación correspondiente de la balanza, de modo que

$$z = d \sin \alpha.$$

Mantenemos la hipótesis de alineación de los centros de las bobinas y consideramos fija la corriente.

Definimos

$$K = \mu_0 a I^2.$$

Tras el desplazamiento, las separaciones entre C_2 y sus bobinas fijas superior e inferior son $h - z$ y $h + z$. Ambas fuerzas magnéticas siguen dirigidas hacia arriba, por lo que su suma es

$$F_L(z) = \frac{K}{h - z} + \frac{K}{h + z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}.$$

A la derecha, las dos separaciones se intercambian; la fuerza total hacia abajo tiene el mismo módulo.

Tomando como positivo el momento de fuerza que tiende a aumentar z , el momento de fuerza magnético total es

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

La masa añadida proporciona el momento de fuerza opuesto

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

Como el centro de masas de la balanza se encuentra a una distancia l por debajo de su punto de apoyo, su peso proporciona el momento de fuerza restaurador

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

Los pesos iguales de las partes suspendidas se cancelan en el balance de momentos de fuerza.

Por tanto, el momento de fuerza neto es

$$\tau(z) = \left(\frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

De la condición de equilibrio del apartado 6,

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

Al sustituir se obtiene

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

Para inclinaciones pequeñas, $\cos \alpha > 0$, por lo que el momento de fuerza tiene el mismo signo que

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

Utilizando las aproximaciones indicadas,

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

obtenemos

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

Para $z > 0$, la balanza se mueve inicialmente de vuelta hacia el equilibrio si $\tau(z) < 0$. Por tanto,

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

o bien

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

El desplazamiento límite es, por tanto,

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}}.$$

Utilizando una vez más la relación de equilibrio,

$$\boxed{\delta z_{\max} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 \alpha I^2 d^2}}.$$

En este límite, el momento de fuerza neto se anula hasta el orden retenido; un desplazamiento positivo mayor produce un momento de fuerza que aleja la balanza del equilibrio. Para un pequeño desplazamiento negativo, ambos términos del momento de fuerza aproximado apuntan en el sentido de aumento de z , haciendo que la balanza regrese inicialmente hacia el equilibrio.

El límite indicado es el resultado de orden dominante para pequeños desplazamientos, y requiere $\delta z_{\max} \ll h$ y $\delta z_{\max} \ll d$ para utilizar cuantitativamente las aproximaciones.

La solución se comprobó con la solución oficial.

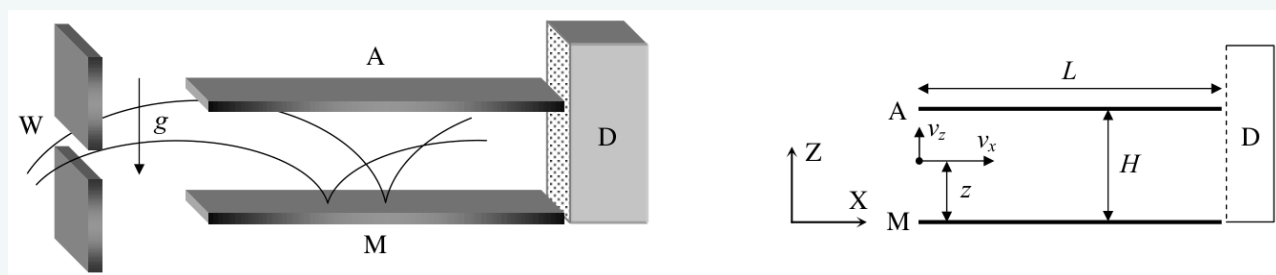
Problema 3: Neutrones en un campo gravitatorio

Th 3 NEUTRONES EN UN CAMPO GRAVITATORIO

En el mundo clásico que nos resulta familiar, una pelota que rebota elásticamente sobre la superficie terrestre es un ejemplo ideal de movimiento perpetuo. La pelota está confinada: no puede descender por debajo de la superficie ni ascender por encima de su punto de retorno. Permanecerá confinada en este estado, descendiendo y rebotando hacia arriba una y otra vez, para siempre. Solo la resistencia del aire o los rebotes inelásticos podrían detener el proceso, y ambos se ignorarán en lo que sigue.

Un grupo de físicos del Instituto Laue - Langevin de Grenoble publicó¹ en 2002 pruebas experimentales sobre el comportamiento de los neutrones en el campo gravitatorio de la Tierra. En el experimento, se dejaba que unos neutrones que se desplazaban hacia la derecha cayeran hacia una superficie cristalina horizontal que actuaba como espejo de neutrones, donde rebotaban elásticamente hasta alcanzar la altura inicial una y otra vez.

El montaje experimental se representa esquemáticamente en la Figura F-1. Consta de la abertura W, el espejo de neutrones M (a la altura $z = 0$), el absorbedor de neutrones A (a la altura $z = H$ y de longitud L) y el detector de neutrones D. El haz de neutrones se desplaza con una componente horizontal constante de la velocidad v_x desde W hasta D a través de la cavidad entre A y M. Todos los neutrones que alcanzan la superficie de A son absorbidos y desaparecen del experimento. Los que alcanzan la superficie de M se reflejan elásticamente. El detector D mide la tasa de transmisión $N(H)$, es decir, el número total de neutrones que llegan a D por unidad de tiempo.



F-1

La puntuación se indica entre paréntesis al comienzo de cada apartado.

Los neutrones entran en la cavidad con un amplio intervalo de velocidades verticales positivas y negativas, v_z . Una vez dentro de la cavidad, se desplazan entre el espejo situado debajo y el absorbedor situado encima.

1. (1.5) Calcule, según la mecánica clásica, el intervalo de velocidades verticales $v_z(z)$ de los neutrones que, al entrar a una altura z , pueden llegar al detector D. Suponga que L es mucho mayor que cualquier otra longitud del problema.
2. (1.5) Calcule, según la mecánica clásica, la longitud mínima L_c de la cavidad necesaria para garantizar que todos los neutrones cuyas velocidades queden fuera del intervalo anterior, independientemente de los valores de z , sean absorbidos por A. Utilice $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ y $H = 50 \text{ }\mu\text{m}$.

La tasa de transmisión de neutrones $N(H)$ se mide en D. Se espera que aumente monótonamente con H .

3. (2.5) Calcule la tasa clásica $N_c(H)$ suponiendo que los neutrones llegan a la cavidad con velocidad vertical v_z y a una altura z , siendo todos los valores de v_z y z igualmente probables. Expresé la respuesta en función de ρ , el número constante de neutrones por unidad de tiempo, por unidad de velocidad vertical y por unidad de altura que entran en la cavidad con velocidad vertical v_z y a una altura z .

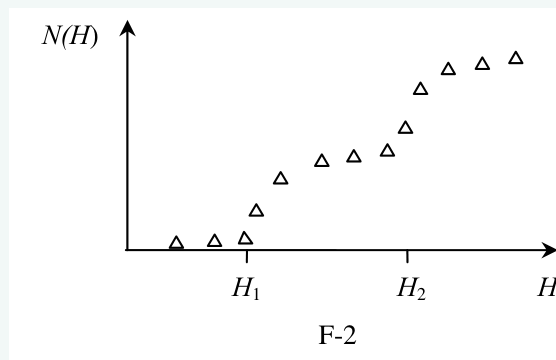
¹ V. V. Nesvizhevsky et al. «Estados cuánticos de neutrones en el campo gravitatorio de la Tierra». Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

Los resultados experimentales obtenidos por el grupo de Grenoble discrepan de las predicciones clásicas anteriores y muestran, en cambio, que el valor de $N(H)$ experimenta aumentos bruscos cuando H supera ciertas alturas críticas $H_1, H_2 \dots$ (la Figura F-2 muestra un esquema). En otras palabras, el experimento mostró que el movimiento vertical de los neutrones que rebotan sobre el espejo está cuantizado. En el lenguaje que Bohr y Sommerfeld utilizaron para obtener los niveles de energía del átomo de hidrógeno, esto puede escribirse así: «La acción S de estos neutrones a lo largo de la dirección vertical es un múltiplo entero de la constante de acción de Planck h ».

Aquí, S viene dada por

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld})$$

donde p_z es la componente vertical de la cantidad de movimiento clásica, y la integral abarca un ciclo completo de rebote. Solo se permiten en la cavidad neutrones con estos valores de S .



F-2

4. (2.5) Calcule las alturas de retorno H_n y los niveles de energía E_n (asociados al movimiento vertical) utilizando la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld. Dé el resultado numérico de H_1 en μm y de E_1 en eV.

La distribución inicial uniforme ρ de neutrones a la entrada se transforma, durante el vuelo a través de una cavidad larga, en la distribución escalonada detectada en D (véase la Figura F-2). A partir de ahora, consideraremos por simplicidad el caso de una cavidad larga con $H < H_2$. Clásicamente, todos los neutrones con energías dentro del intervalo considerado en la pregunta 1 podían atravesarla, mientras que, según la mecánica cuántica, solo se permiten neutrones en el nivel de energía E_1 . Según el principio de incertidumbre de Heisenberg entre tiempo y energía, esta redistribución requiere un tiempo de vuelo mínimo. La incertidumbre de la energía del movimiento vertical será significativa si la longitud de la cavidad es pequeña. Este fenómeno dará lugar al ensanchamiento de los niveles de energía.

5. (2.0) Estime el tiempo de vuelo mínimo t_q y la longitud mínima L_q de la cavidad necesarios para observar el primer aumento brusco en el número de neutrones en D. Utilice $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$.

Datos:

Magnitud	Valor
Constante de acción de Planck	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Carga elemental	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa del neutrón	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Aceleración de la gravedad en la Tierra	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

Si es necesario, utilice la expresión:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Para $0 \leq z < H$, las velocidades de los neutrones transmitidos satisfacen

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

Los valores extremos corresponden a neutrones que alcanzan el absorbedor y, por tanto, quedan excluidos.

2. La longitud clásica mínima de la cavidad es

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.39 \text{ cm}.$$

3. La tasa clásica de transmisión es

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. Utilizando exactamente la regla de cuantización indicada en el enunciado,

$$H_n = \left(\frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

Numéricamente,

$$H_1 = 16.5 \mu\text{m}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. Utilizando $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$ y la escala de resolución $\Delta E \sim E_1$, las estimaciones del límite impuesto por la incertidumbre son

$$t_q \gtrsim \frac{\hbar}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Un escalón bien resuelto requiere un vuelo más largo. Si, en cambio, la estimación aproximada de incertidumbre se escribe como $\Delta E t_q \sim \hbar$, las estimaciones correspondientes son

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

El prefactor numérico no queda determinado sin un criterio cuantitativo de nitidez.

Solución

1. Intervalo clásico de velocidades verticales de los neutrones transmitidos

El movimiento horizontal es uniforme y no afecta a la energía vertical. Entre reflexiones, la conservación de la energía mecánica da

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz.$$

Una reflexión elástica en el espejo invierte v_z sin cambiar E_z . En el punto de retorno superior z_t , la velocidad vertical se anula, de modo que

$$Mgz_t = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz,$$

y, por tanto,

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

En una cavidad suficientemente larga, todo neutrón cuya trayectoria alcance $z = H$ es absorbido. Por consiguiente, la transmisión requiere $z_t < H$, o bien

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

Así pues,

$$-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.$$

Ambos signos son posibles: un neutrón que inicialmente se mueve hacia abajo primero se refleja en el espejo y luego asciende hasta la misma altura de retorno. Se excluye la igualdad porque el enunciado establece que todo neutrón que alcanza el absorbedor es absorbido.

2. Longitud clásica mínima de la cavidad

Debemos encontrar el tiempo máximo posible que transcurre antes de que un neutrón fuera de este intervalo alcance el absorbedor.

Escribamos su energía vertical conservada como $E_z = Mga$, donde $a \geq H$ es la altura de retorno que tendría sin el absorbedor. El módulo de su velocidad vertical a la altura z es

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a - z)}.$$

El tiempo que tarda en ascender desde el espejo hasta el absorbedor es

$$\begin{aligned}\tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a - z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - H} \right).\end{aligned}$$

Este tiempo disminuye al aumentar a , y su valor máximo es

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Un neutrón que inicialmente se mueve hacia arriba alcanza el absorbedor en un tiempo no mayor que el de uno de estos trayectos ascendentes. Un neutrón que inicialmente se mueve hacia abajo puede descender primero hasta el espejo y después ascender hasta el absorbedor. Su tiempo total es, como máximo, $2\tau(a)$.

La trayectoria límite de mayor duración comienza justo debajo del absorbedor, con un movimiento descendente muy lento y con la energía apenas suficiente para regresar a la altura H . Por tanto, el supremo del tiempo de absorción es

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Como el tiempo de vuelo horizontal es L/v_x , todos estos neutrones se eliminan cuando $L/v_x \geq t_c$. Cualquier longitud menor permite que algunas trayectorias suficientemente próximas a la trayectoria límite eviten la absorción. Por tanto,

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Numéricamente,

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

de modo que

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

3. Tasa clásica de transmisión

Por definición, la tasa incidente en un elemento $dz dv_z$ es

$$dN = \rho dz dv_z.$$

Para una cavidad larga, solo contribuye el intervalo de velocidades obtenido en el apartado 1.

Integrando sobre este intervalo y sobre todas las alturas de entrada,

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\ &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Esto predice una curva suave y creciente que parte de $N_c(0) = 0$, sin escalones.

4. Alturas de retorno y energías cuantizadas

Para un neutrón cuya altura de retorno vertical es H_n ,

$$E_n = MgH_n.$$

La cantidad de movimiento vertical en el tramo ascendente de su trayectoria es

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

Durante el descenso, tanto p_z como dz son negativos, por lo que la contribución del descenso a la acción es igual a la del ascenso. La reflexión instantánea en el espejo no aporta desplazamiento alguno.

En consecuencia, la acción a lo largo de un rebote completo es

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{H_n} M\sqrt{2g(H_n - z)} dz \\ &= \frac{4}{3}M\sqrt{2g} H_n^{3/2}. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de Bohr-Sommerfeld proporcionada, $S = nh$,

$$\frac{4}{3}M\sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

Despejando,

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{9n^2h^2}{32M^2g} \right)^{1/3}.$$

Al multiplicar por Mg se obtiene

$$E_n = \left(\frac{9n^2 h^2 M g^2}{32} \right)^{1/3}.$$

Ambas magnitudes son proporcionales a $n^{2/3}$.

Para $n = 1$,

$$H_1 = \left[\frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

Por tanto,

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m.}$$

La energía correspondiente es

$$E_1 = M g H_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J.}$$

Utilizando $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV.}$$

5. Tiempo de vuelo cuántico mínimo y longitud mínima de la cavidad

El primer umbral de transmisión se encuentra cerca de $MgH = E_1$. Si la anchura energética del primer nivel es comparable a E_1 , este umbral queda considerablemente difuminado. Por tanto, la escala de energía pertinente para una estimación inicial de la resolución es

$$\Delta E \sim E_1.$$

Utilizando la estimación de incertidumbre entre tiempo y energía en la forma

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

una escala necesaria del tiempo de vuelo es

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

Sustituyendo la energía en julios,

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s.}$$

El movimiento horizontal da entonces

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Estos valores caracterizan una cota impuesta por la incertidumbre, sin garantizar una nitidez experimental determinada. Para cuantificar esta distinción, supongamos que la anchura energética permitida es $\Delta E = \epsilon E_1$. Puesto que $E = MgH$, esto también corresponde a una anchura relativa en altura $\Delta H/H_1 = \epsilon$. Las estimaciones pasan a ser

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s,} \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m.}$$

Un escalón nítido, con $\epsilon \ll 1$, requiere tiempos y longitudes apreciablemente mayores que la cota básica.

En un tratamiento de orden de magnitud que utilice $\Delta E t_q \sim h$, se dan, en cambio, los valores

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad \boxed{L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm.}}$$

La solución se comprobó con la solución oficial.