

IPhO 2005

Theorieaufgaben und Lösungen · Salamanca, Spanien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2005/

Aufgabe 1: Ein vom Pech verfolgter Satellit

Th 1 EIN VOM PECH VERFOLGTER SATELLIT

Die häufigsten Bahnmanöver von Raumfahrzeugen bestehen in Geschwindigkeitsänderungen entlang der Flugrichtung, nämlich in Beschleunigungen zum Erreichen höherer Umlaufbahnen oder in Bremsmanövern zum Einleiten des Wiedereintritts in die Atmosphäre. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Bahnänderungen, wenn der Triebwerksschub in radialer Richtung wirkt.

Verwenden Sie zur Berechnung der Zahlenwerte den Erdradius $R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, und setzen Sie die Dauer des siderischen Tages mit $T_0 = 24.0 \text{ h}$ an.

Wir betrachten einen geosynchronen¹ Kommunikationssatelliten der Masse m auf einer äquatorialen Kreisbahn mit dem Radius r_0 . Diese Satelliten verfügen über ein „Apogäumstriebwerk“, das den zum Erreichen der endgültigen Umlaufbahn erforderlichen tangentialen Schub liefert.

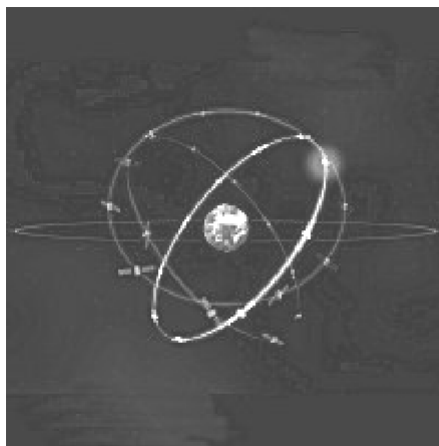


Image: ESA

Bild: ESA

Die Punktzahlen stehen jeweils zu Beginn jeder Teilaufgabe in Klammern.

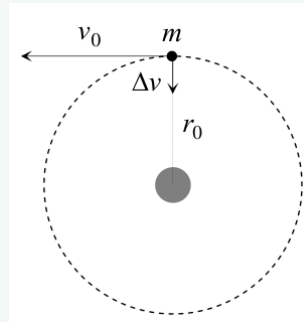
Frage 1

1.1 (0.3) Berechnen Sie den Zahlenwert von r_0 .

1.2 (0.3+0.1) Geben Sie den analytischen Ausdruck für die Geschwindigkeit v_0 des Satelliten als Funktion von g , R_T und r_0 an und berechnen Sie ihren Zahlenwert.

1.3 (0.4+0.4) Leiten Sie die Ausdrücke für seinen Drehimpuls L_0 und seine mechanische Energie E_0 als Funktionen von v_0 , m , g und R_T her.

Nachdem diese geosynchrone Kreisbahn erreicht ist (siehe Abbildung F-1), der Satellit an der gewünschten Position stabilisiert wurde und auf seinen Einsatz vorbereitet wird, führt ein Fehler des Kontrollpersonals am Boden dazu, dass das Apogäumstriebwerk erneut gezündet wird. Der Schub ist dabei zur Erde hin gerichtet, und trotz der schnellen Reaktion der Bodenmannschaft, die das Triebwerk abschaltet, erfährt der Satellit eine unerwünschte Geschwindigkeitsänderung Δv . Wir charakterisieren diesen Antriebsstoß durch den Parameter $\beta = \Delta v/v_0$. Die Brenndauer des Triebwerks ist gegenüber allen anderen für die Bahnbewegung relevanten Zeiten stets vernachlässigbar, sodass der Antriebsstoß als momentan betrachtet werden kann.



F-1

Frage 2

Es sei $\beta < 1$.

2.1 (0.4+0.5) Bestimmen Sie die Parameter der neuen Bahn², den *Halbparameter* l und die *Exzentrizität* ε , in Abhängigkeit von r_0 und β .

2.2 (1.0) Berechnen Sie den Winkel α zwischen der großen Achse der neuen Bahn und dem Ortsvektor zum Zeitpunkt der versehentlichen Zündung.

2.3 (1.0+0.2) Geben Sie die analytischen Ausdrücke für die Abstände des Perigäums $r_{\min}$ und des Apogäums $r_{\max}$ vom Erdmittelpunkt als Funktionen von r_0 und β an und berechnen Sie ihre Zahlenwerte für $\beta = 1/4$.

2.4 (0.5+0.2) Bestimmen Sie die Umlaufzeit der neuen Bahn, T , als Funktion von T_0 und β und berechnen Sie ihren Zahlenwert für $\beta = 1/4$.

¹ Ihre Umlaufzeit beträgt T_0 .

² Siehe den „Hinweis“.

Frage 3

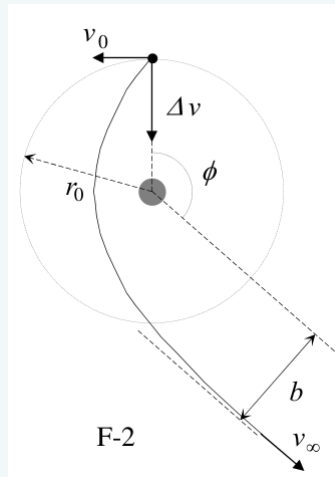
3.1 (0.5) Berechnen Sie den minimalen Antriebsstoßparameter β_{esc} , der erforderlich ist, damit der Satellit dem Schwerefeld der Erde entkommt.

3.2 (1.0) Bestimmen Sie für diesen Fall den kleinsten Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt auf der neuen Bahn, $r'_{\min}$, als Funktion von r_0 .

Frage 4

Es sei $\beta > \beta_{\text{esc}}$.

- 4.1** (1.0) Bestimmen Sie die Restgeschwindigkeit im Unendlichen, v_∞ , als Funktion von v_0 und β .
- 4.2** (1.0) Leiten Sie den „Stoßparameter“ b der asymptotischen Fluchtrichtung in Abhängigkeit von r_0 und β her. (Siehe Abbildung F-2).
- 4.3** (1.0+0.2) Bestimmen Sie den Winkel ϕ der asymptotischen Fluchtrichtung in Abhängigkeit von β . Berechnen Sie seinen Zahlenwert für $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$.

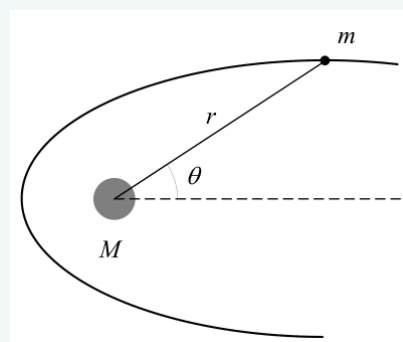


F-2

HINWEIS

Unter der Wirkung von Zentralkräften, die dem inversen Quadratgesetz folgen, bewegen sich Körper auf Bahnen, die durch Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln beschrieben werden. In der Näherung $m \ll M$ befindet sich die gravitierende Masse M in einem der Brennpunkte. Legt man den Ursprung in diesen Brennpunkt, so lässt sich die allgemeine Polargleichung dieser Kurven folgendermaßen schreiben (siehe Abbildung F-3):

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

Dabei ist l eine positive Konstante, die als *Halbparameter* bezeichnet wird, und ε ist die *Exzentrizität* der Kurve. In Abhängigkeit von den Erhaltungsgrößen gilt:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

Dabei ist G die Newtonsche Gravitationskonstante, L der Betrag des Drehimpulses der umlaufenden Masse bezüglich des Ursprungs und E ihre mechanische Energie, wobei die potenzielle Energie im Unendlichen gleich null ist.

Folgende Fälle sind möglich:

- i) Für $0 \leq \varepsilon < 1$ ist die Kurve eine Ellipse (für $\varepsilon = 0$ eine Kreislinie).
- ii) Für $\varepsilon = 1$ ist die Kurve eine Parabel.
- iii) Für $\varepsilon > 1$ ist die Kurve eine Hyperbel.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- 1.1

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 1.2

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

- 1.3

$$\boxed{L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}}, \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

- 2.1

$$\boxed{l = r_0, \quad \varepsilon = \beta}.$$

- 2.2

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Dies gilt für $0 < \beta < 1$; bei $\beta = 0$ ist die Bahn kreisförmig und besitzt keine ausgezeichnete große Achse.

- 2.3

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

Für $\beta = 1/4$ gilt

$$\boxed{r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}, \quad \boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

- 2.4

$$T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}.$$

Für $\beta = 1/4$ gilt $T = 26.4 \text{ h}$.

- 3.1

$$\beta_{\text{esc}} = 1.$$

- 3.2

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}.$$

- 4.1

$$v_{\infty} = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

- 4.2

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

- 4.3

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Für $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ gilt

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Lösung

Es sei

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

wobei M die Masse der Erde ist. Wir verwenden die Newtonsche Gravitation für eine ruhende, kugelförmige Erde mit $m \ll M$ und vernachlässigen den Luftwiderstand sowie andere Himmelskörper. Der Antriebsstoß wird als momentan und die Masse des Satelliten als konstant behandelt. Die potenzielle Gravitationsenergie ist im Unendlichen gleich null.

1.1 — Radius der geosynchronen Umlaufbahn

Bei einer Kreisbahn liefert die Gravitationsbeschleunigung die Zentripetalbeschleunigung:

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

Die Umlaufzeit beträgt T_0 , also gilt

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

Die Kombination dieser Gleichungen ergibt

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

Somit ist

$$r_0 = \left(\frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Mit $T_0 = 24.0 \times 3600$ s ergibt sich

$$r_0 = \left[\frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2(24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m}.$$

Daher gilt

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}.$$

1.2 — Anfängliche Bahngeschwindigkeit

Aus der Kreisbahnbedingung folgt

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

Damit ist

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = 3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

1.3 — Anfänglicher Drehimpuls und anfängliche mechanische Energie

Die Geschwindigkeit steht senkrecht auf dem Radiusvektor, daher beträgt der Drehimpuls

$$L_0 = m r_0 v_0.$$

Wegen $r_0 = \mu/v_0^2$ gilt

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

Die mechanische Energie ist

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

Mit $\mu/r_0 = v_0^2$ folgt

$$E_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2.$$

2.1 — Halbparameter und Exzentrizität nach dem Kraftstoß

Zum Zeitpunkt der versehentlichen Zündung zeige $\hat{\mathbf{r}}$ radial nach außen und $\hat{\mathbf{t}}$ in Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit. Unmittelbar nach dem Kraftstoß gilt

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{t}} - \beta v_0 \hat{\mathbf{r}}.$$

Die beiden Komponenten stehen senkrecht aufeinander, sodass

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

Der Kraftstoß ist radial und bewirkt daher keine Drehimpulsänderung bezüglich des Erdmittelpunkts. Folglich gilt

$$L = L_0 = m r_0 v_0.$$

Während des momentanen Antriebsstoßes bleibt der Radius gleich r_0 , daher ist die neue Energie

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1).$$

Somit gilt $E < 0$ für $\beta < 1$, wie es für eine gebundene Bahn erforderlich ist.

Aus den angegebenen Bahnformeln folgt

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

und

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

Da β ein nichtnegatives Verhältnis von Geschwindigkeitsbeträgen ist, gilt

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

Diese Ausdrücke für l und ε gelten auch für die später betrachteten parabolischen und hyperbolischen Fälle.

2.2 – Orientierung der großen Achse

Zum Zeitpunkt der versehentlichen Zündung gilt $r = r_0 = l$. Einsetzen in die Polargleichung ergibt

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

Für $\beta > 0$ erfordert dies

$$\cos \theta_0 = 0.$$

Die Bezugsachse der Polarkoordinaten liegt in Richtung der großen Achse, daher steht der Ortsvektor zum Zeitpunkt der versehentlichen Zündung senkrecht auf dieser Achse:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

Um den zutreffenden Zweig zu bestimmen, wählen wir θ so, dass es in Richtung der Bahnbewegung zunimmt. Dann gilt

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0 \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Die anfängliche Radialgeschwindigkeit ist nach innen gerichtet, also gilt $dr/d\theta < 0$. Daher ist

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Das Perigäum wird anschließend bei $\theta = \pi$ erreicht. In der Darstellung von Abbildung F-1 liegt die große Achse horizontal und das Perigäum links von der Erde.

Für $\beta = 0$ bleibt die Bahn kreisförmig, und es gibt keine eindeutig bestimmte Richtung der großen Achse.

2.3 — Perigäum und Apogäum

Für

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

tritt der kleinste Radius auf, wenn der Nenner am größten ist, also bei $\theta = \pi$. Der größte Radius tritt bei $\theta = 0$ auf. Somit gilt

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

Für $\beta = 1/4$ ergibt sich

$$r_{\min} = \frac{4}{5} r_0 = \boxed{3.38 \times 10^7 \text{ m}},$$

$$r_{\max} = \frac{4}{3} r_0 = \boxed{5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

Beide Werte sind Abstände vom Erdmittelpunkt.

2.4 — Umlaufzeit der neuen Bahn

Die große Halbachse der Ellipse ist

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

Das dritte Keplersche Gesetz für Bahnen um dieselbe Zentralmasse liefert

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

Daher gilt

$$T = T_0 \left(\frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

Für $\beta = 1/4$ ergibt sich

$$T = 24.0 \left(\frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

also

$$\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$$

3.1 — Minimaler Kraftstoß zum Entkommen

Eine Bahn kann nur dann ins Unendliche führen, wenn ihre mechanische Energie nichtnegativ ist. Für die Grenzbahn des Entkommens gilt $E = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

Somit ist

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

An dieser Schwelle gilt $\varepsilon = 1$, die Bahn ist also parabolisch, und die Geschwindigkeit geht im Unendlichen gegen null.

3.2 — Kleinster Abstand an der Fluchtschwelle

Für $\beta = 1$ gilt

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

Der Perigäumsabstand der Parabel beträgt daher

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

Der Satellit bewegt sich zunächst nach innen, erreicht also diesen kleinsten Abstand, bevor er entkommt. Numerisch ergibt sich

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ m} > R_T,$$

sodass die Grenzbahn an der Erde vorbeiführt.

4.1 — Restgeschwindigkeit im Unendlichen

Für $\beta > 1$ ist die Energie positiv. Im Unendlichen verschwindet die potenzielle Gravitationsenergie, und die Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

Somit gilt

$$\boxed{v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.2 — Stoßparameter

Der Stoßparameter b ist der senkrechte Abstand des Erdmittelpunkts von der auslaufenden Asymptote.

In großer Entfernung von der Erde nähert sich die Bewegung einer gleichförmigen Bewegung entlang dieser Asymptote an. Der Betrag des Drehimpulses ist folglich

$$L = mbv_\infty.$$

Die Drehimpulserhaltung liefert

$$mbv_\infty = mr_0v_0.$$

Mit dem Ergebnis aus 4.1 folgt

$$\boxed{b = \frac{r_0v_0}{v_\infty} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}}.$$

4.3 — Fluchtrichtung

Wir verwenden dieselbe Polarkoordinatenkonvention wie in 2.2:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

wobei θ entlang der Bewegung zunimmt und das Perigäum bei $\theta = \pi$ liegt.

Im Unendlichen geht der Nenner gegen null:

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

Wir definieren

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem Durchlaufen des Perigäums erreicht der auslaufende Zweig

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

Die Tangentialgeschwindigkeit beträgt $L/(mr)$ und geht für $r \rightarrow \infty$ gegen null. Somit stimmt die Grenzrichtung der Geschwindigkeit mit der Grenzrichtung des nach außen gerichteten Radiusvektors überein.

Der rechts in Abbildung F-2 eingezeichnete Winkel ϕ ist der kleinere Winkel zwischen dem ursprünglichen, nach außen gerichteten Radiusvektor und dieser auslaufenden Richtung. Daher gilt

$$\phi = 2\pi - (\theta_{\infty} - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Somit ist

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Der relevante Zweig erfüllt

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

Für $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ gilt

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

woraus folgt

$$\phi = 138.2^\circ.$$

Die Fluchtformeln beschreiben eine kollisionsfreie Keplerbahn. Für eine Erde endlicher Größe muss zusätzlich $r_0/(1 + \beta) > R_T$ gelten, was für das angegebene Zahlenbeispiel erfüllt ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Absolutmessungen elektrischer Größen

Th 2 ABSOLUTMESSUNGEN ELEKTRISCHER GRÖSSEN

Die technologischen und wissenschaftlichen Umwälzungen im XIX. Jahrhundert führten zu einem dringenden Bedarf an allgemein anerkannten Normalen für die elektrischen Größen. Die neuen absoluten Einheiten sollten, so die damalige Vorstellung, ausschließlich auf den nach der

Französischen Revolution festgelegten Normalen für Länge, Masse und Zeit beruhen. Von 1861 bis 1912 wurden umfangreiche experimentelle Arbeiten durchgeführt, um die Werte dieser Einheiten festzulegen. Wir stellen hier drei Fallstudien vor.

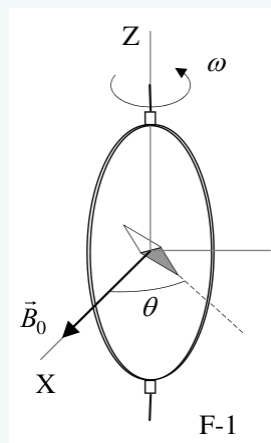
Die Punktzahlen stehen jeweils zu Beginn jeder Teilaufgabe in Klammern.

Bestimmung des Ohms (Kelvin)

Eine geschlossene kreisförmige Spule mit N Windungen, dem Radius a und dem Gesamt Widerstand R wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um einen vertikalen Durchmesser in einem horizontalen Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ gedreht.

1. (0.5+1.0) Berechnen Sie die in der Spule induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ sowie die mittlere Leistung¹ $\langle P \rangle$, die erforderlich ist, um die Spule in Bewegung zu halten. Vernachlässigen Sie die Selbstinduktivität der Spule.

Eine kleine Magnetonadel wird wie in Abbildung F-1 im Mittelpunkt der Spule angebracht. Sie kann sich in einer horizontalen Ebene frei und langsam um die Z-Achse drehen, der schnellen Drehung der Spule jedoch nicht folgen.



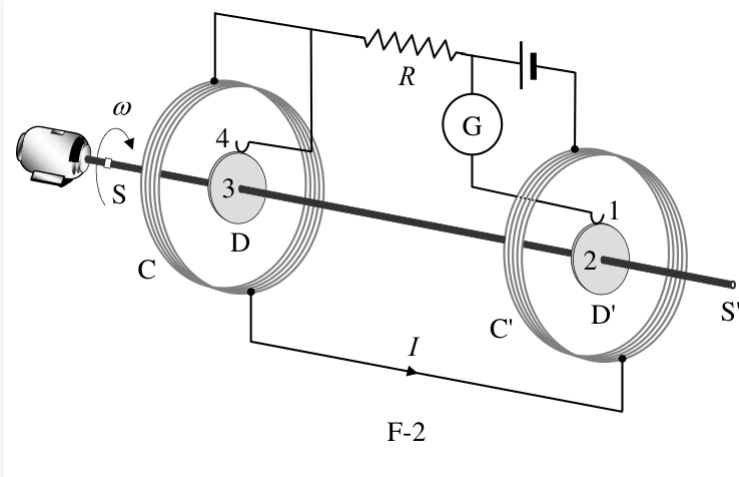
F-1

2. (2.0) Sobald der stationäre Zustand erreicht ist, stellt sich die Nadel in einer Richtung ein, die mit $\vec{B}_0$ einen kleinen Winkel θ bildet. Berechnen Sie den Widerstand R der Spule in Abhängigkeit von diesem Winkel und den anderen Parametern des Systems.

Lord Kelvin verwendete diese Methode in den 1860er-Jahren, um das absolute Normal für das Ohm festzulegen. Um die rotierende Spule zu vermeiden, entwickelte Lorenz eine alternative Methode, die von Lord Rayleigh und Frau Sidgwick angewandt wurde und die wir in den folgenden Absätzen untersuchen.

Bestimmung des Ohms (Rayleigh, Sidgwick).

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung F-2 dargestellt. Er besteht aus zwei identischen Metallscheiben D und D' mit dem Radius b , die auf der leitenden Welle SS' montiert sind. Ein Motor versetzt die Anordnung in eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω , die zur Messung von R eingestellt werden kann. Zwei identische Spulen C und C' (mit dem Radius a und jeweils N Windungen) umgeben die Scheiben. Sie sind so verschaltet, dass der Strom I sie in entgegengesetzten Richtungen durchfließt. Die gesamte Apparatur dient zur Messung des Widerstands R .



F-2

¹ Der Mittelwert $\langle X \rangle$ einer Größe $X(t)$ in einem periodischen System mit der Periodendauer T ist

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

Sie benötigen möglicherweise eines oder mehrere der folgenden Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad \text{und später} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

3. (2.0) Nehmen Sie an, dass der durch die Spulen C und C' fließende Strom I im Bereich von D und D' ein homogenes Magnetfeld B erzeugt, das gleich dem Feld im Mittelpunkt der jeweiligen Spule ist. Berechnen Sie¹ die zwischen den Rändern 1 und 4 induzierte elektromotorische Kraft $\mathcal{E}$ unter der Annahme, dass der Abstand zwischen den Spulen viel größer als ihr Radius ist und dass $a \gg b$ gilt.

Die Scheiben sind über Bürstenkontakte an ihren Rändern 1 und 4 mit dem Stromkreis verbunden. Das Galvanometer G weist einen Stromfluss durch den Stromkreis 1-2-3-4 nach.

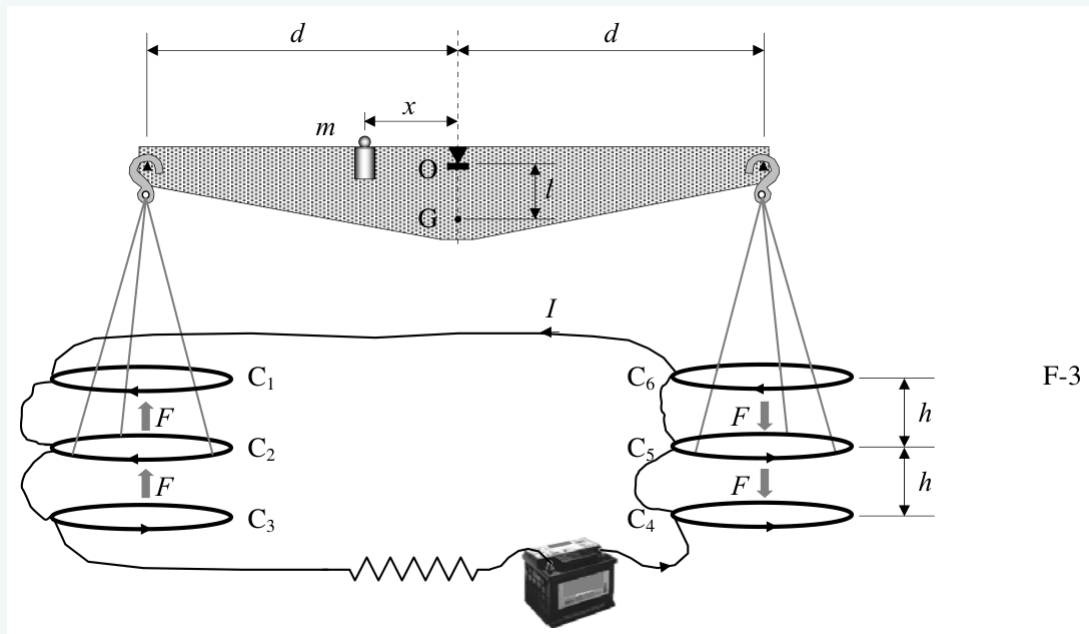
4. (0.5) Der Widerstand R wird gemessen, wenn G null anzeigt. Geben Sie R in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern des Systems an.

Bestimmung des Amperes

Indem man einen Strom durch zwei Leiter fließen lässt und die Kraft zwischen ihnen misst, kann man den Strom selbst absolut bestimmen. Die 1882 von Lord Kelvin entworfene „Stromwaage“ nutzt diese Methode. Sie besteht aus sechs identischen Spulen $C_1 \dots C_6$ mit jeweils einer Windung und dem Radius a , die in Reihe geschaltet sind. Wie in Abbildung F-3 gezeigt, liegen die feststehenden Spulen C_1, C_3, C_4 und C_6 in zwei horizontalen Ebenen mit dem kleinen Abstand $2h$. Die Spulen C_2 und C_5 werden von Waagearmen der Länge d getragen und haben im Gleichgewicht von beiden Ebenen denselben Abstand.

Der Strom I fließt durch die verschiedenen Spulen jeweils in einer solchen Richtung, dass die magnetische Kraft auf C_2 nach oben und diejenige auf C_5 nach unten gerichtet ist. Eine Masse m im Abstand x vom Drehpunkt O ist erforderlich, um die Waage wieder in die oben beschriebene

Gleichgewichtslage zu bringen, wenn der Strom durch den Stromkreis fließt.



F-3

F-3

5. (1.0) Berechnen Sie die Kraft F auf C_2 aufgrund der magnetischen Wechselwirkung mit C_1 . Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Kraft pro Längeneinheit derjenigen zwischen zwei langen, geraden Drähten mit gleichgerichteten Strömen entspricht.

6. (1.0) Der Strom I wird gemessen, wenn sich die Waage im Gleichgewicht befindet. Geben Sie den Wert von I in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern des Systems an. Die Abmessungen der Apparatur sind so gewählt, dass die gegenseitigen Einflüsse der Spulen auf der linken und auf der rechten Seite vernachlässigt werden können.

Es seien M die Masse der Waage (ohne m und die aufgehängten Teile), G ihr Schwerpunkt und l der Abstand $\overline{OG}$.

7. (2.0) Das Gleichgewicht der Waage ist stabil gegenüber Auslenkungen, die kleine Höhenänderungen δz von C_2 und $-\delta z$ von C_5 bewirken. Berechnen Sie² den maximalen Wert $\delta z_{\max}$, bei dem sich die Waage nach dem Loslassen noch in Richtung ihrer Gleichgewichtslage zurückbewegt.

² Nehmen Sie an, dass die Spulenmittelpunkte näherungsweise auf einer gemeinsamen Achse bleiben.

Verwenden Sie die Näherungen

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

für $\beta \ll 1$ sowie $\sin \theta \approx \tan \theta$ für kleine θ .

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier bezeichnet μ_0 die magnetische Feldkonstante und g die Fallbeschleunigung. Da keine Zahlenwerte für die Parameter angegeben sind, werden die Antworten in symbolischer Form angegeben.

1. Wählt man die Spulennormale bei $t = 0$ parallel zu $\vec{B}_0$, so gilt

$$\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t), \quad \langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

2.
$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta} \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta},$$

wobei θ im Bogenmaß angegeben wird.

3. Der Betrag der elektromotorischen Kraft zwischen den Rändern ist

$$|\mathcal{E}_{14}| = B\omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

4.
$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5.
$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}, \quad \text{nach oben gerichtet.}$$

6.
$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Bis zur Ordnung der vorgegebenen Näherung für kleine Auslenkungen gilt

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd} = \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

Bei einer positiven Auslenkung bewegt sich die Waage in Richtung des Gleichgewichts zurück, wenn $0 < \delta z < \delta z_{\max}$; Gleichheit kennzeichnet den Grenzfall.

Lösung

1. Induzierte elektromotorische Kraft und mittlere mechanische Leistung

Es sei $A = \pi a^2$. Wir wählen die positive Spulennormale als

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

sodass sie bei $t = 0$ parallel zum angelegten Feld ist.

Die magnetische Flussverknüpfung der N Windungen ist

$$\Lambda(t) = NAB_0 \cos(\omega t).$$

Aus dem Faradayschen Induktionsgesetz folgt daher

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = NAB_0\omega \sin(\omega t),$$

also

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = N\pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

Eine andere Anfangsausrichtung ändert lediglich die Phase.

Da die Selbstinduktivität vernachlässigt wird, ist der momentane Strom

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ist die gegen das magnetische Bremsmoment aufgebrachte mechanische Leistung gleich der Jouleschen Wärmeleistung:

$$P(t) = i^2(t)R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

Mit $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}}.$$

2. Widerstand aus der Ablenkung der Magnetnadel

Das Feld im Mittelpunkt einer kreisförmigen Spule mit N Windungen ist

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

Setzt man den in Teil 1 bestimmten Strom ein und schreibt $\phi = \omega t$, so erhält man

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

Während einer Umdrehung der Spule ändert die Nadel ihre Richtung nur vernachlässigbar wenig. Ihr mittleres Drehmoment ist daher das Kreuzprodukt ihres magnetischen Moments mit dem

Vektormittelwert des Gesamtfeldes. Wegen

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

ist das mittlere Feld der Spule

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

Es steht senkrecht zum angelegten Feld.

Im stationären Zustand richtet sich die Nadel entlang

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}$$

aus. Somit gilt

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

woraus folgt:

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}.$$

Für den vorgegebenen kleinen Winkel gilt

$$R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta}.$$

3. Elektromotorische Kraft zwischen den Rändern der rotierenden Scheiben

Das Magnetfeld im Mittelpunkt jeder der umgebenden Spulen hat den Betrag

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}.$$

Aufgrund des großen Abstands der Spulen können ihre gegenseitigen Feldbeiträge vernachlässigt werden. Die Bedingung $a \gg b$ erlaubt es, dieses Feld im Mittelpunkt über die gesamte jeweilige Scheibe als homogen anzusehen.

Im Abstand r von der Achse bewegt sich ein Scheibenelement mit der Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \omega r.$$

In einem axialen Magnetfeld ist die magnetische Kraft pro Ladungseinheit, $\vec{v} \times \vec{B}$, radial gerichtet. Daher beträgt die durch Bewegung induzierte elektromotorische Kraft von der Nabe bis zum Rand einer Scheibe

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r \, dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

Die Scheiben drehen sich im selben Drehsinn, ihre Magnetfelder sind jedoch entgegengesetzt gerichtet. Die elektromotorischen Kräfte zwischen Rand und Nabe haben daher entgegengesetzte Vorzeichen. Da die Naben durch die leitende Welle verbunden sind, addieren sich die Beträge der elektromotorischen Kräfte zwischen den beiden Rändern:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B \omega b^2.$$

Somit gilt

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

Die Polarität wird durch die Richtung von $\vec{\omega}$ relativ zum axialen Feld in der jeweiligen Scheibe bestimmt.

4. Widerstand beim Nullabgleich des Galvanometers

Wenn das Galvanometer null anzeigt, fließt durch den Zweig aus Scheiben, Welle und Galvanometer kein Strom. Entlang dieses Zweigs tritt daher kein ohmscher Spannungsabfall auf.

Die elektromotorische Kraft der Scheiben gleicht die Spannung IR am Widerstand aus:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

Durch Kürzen des von null verschiedenen Stroms erhält man

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

5. Kraft zwischen C_1 und C_2

Für zwei lange parallele Drähte im Abstand h , die jeweils den Strom I führen, beträgt die magnetische Kraft pro Längeneinheit

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

In der vorgegebenen Näherung gilt dies lokal entlang des Umfangs $2\pi a$ der Spulen. Die Kraft ist daher

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

also

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

Die Ströme in C_1 und C_2 fließen im selben Umlaufsinn, sodass die Wechselwirkung anziehend ist. Da C_1 oberhalb von C_2 liegt, ist die Kraft auf C_2 nach oben gerichtet.

6. Strom aus dem Gleichgewicht der Waage

Die obere Spule C_1 zieht C_2 nach oben an, während die untere Spule C_3 , deren Strom in entgegengesetzter Richtung fließt, sie nach oben abstößt. Jede trägt die in Teil 5 bestimmte Kraft bei. Die gesamte nach oben gerichtete Kraft auf C_2 beträgt somit $2F$.

Entsprechend beträgt die Gesamtkraft auf C_5 ebenfalls $2F$ und ist nach unten gerichtet. Diese beiden Kräfte erzeugen Drehmomente im selben Drehsinn:

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

Die zusätzliche Masse erzeugt das entgegengesetzte Drehmoment mgx . Im Gleichgewicht gilt

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

Folglich ist

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

7. Maximale Auslenkung, bei der ein rückstellendes Drehmoment auftritt

Wir schreiben $z = \delta z$, wobei das Vorzeichen positiv ist, wenn C_2 steigt und C_5 sinkt. Es sei α der zugehörige Neigungswinkel der Waage, sodass

$$z = d \sin \alpha.$$

Wir behalten die angenommene Ausrichtung der Spulenmittelpunkte auf einer gemeinsamen Achse bei und behandeln den Strom als konstant.

Wir definieren

$$K = \mu_0 a I^2.$$

Nach der Auslenkung betragen die Abstände zwischen C_2 und der oberen beziehungsweise unteren feststehenden Spule $h - z$ und $h + z$. Beide magnetischen Kräfte bleiben nach oben gerichtet, sodass ihre Summe

$$F_L(z) = \frac{K}{h-z} + \frac{K}{h+z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}$$

beträgt. Auf der rechten Seite sind die beiden Abstände vertauscht; die gesamte nach unten gerichtete Kraft hat denselben Betrag.

Wenn ein positives Drehmoment eine Tendenz zur Vergrößerung von z bezeichnet, ist das gesamte magnetische Drehmoment

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

Die zusätzliche Masse liefert das entgegengesetzte Drehmoment

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

Da der Schwerpunkt der Waage im Abstand l unterhalb ihres Drehpunkts liegt, liefert ihre Gewichtskraft das rückstellende Drehmoment

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

Die gleichen Gewichtskräfte der aufgehängten Teile heben sich in der Drehmomentbilanz auf.

Das resultierende Drehmoment ist somit

$$\tau(z) = \left(\frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in Teil 6 folgt

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

Einsetzen ergibt

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

Für kleine Neigungswinkel gilt $\cos \alpha > 0$, sodass das Drehmoment dasselbe Vorzeichen hat wie

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

Mit den vorgegebenen Näherungen

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

erhalten wir

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

Für $z > 0$ bewegt sich die Waage zunächst in Richtung des Gleichgewichts zurück, wenn $\tau(z) < 0$ gilt. Daher muss

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

also

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}$$

gelten. Die Grenzauslenkung ist somit

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

Mit der Gleichgewichtsbeziehung erhält man erneut

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

An dieser Grenze verschwindet das resultierende Drehmoment bis zur berücksichtigten Ordnung; eine größere positive Auslenkung erzeugt ein Drehmoment, das von der Gleichgewichtslage wegführt. Bei einer kleinen negativen Auslenkung wirken beide Terme des näherungsweisen Drehmoments in Richtung zunehmender z , sodass sich die Waage zunächst in Richtung des Gleichgewichts zurückbewegt.

Der angegebene Grenzwert ist das Ergebnis in führender Ordnung für kleine Auslenkungen; für eine quantitative Anwendung der Näherungen müssen $\delta z_{\max} \ll h$ und $\delta z_{\max} \ll d$ gelten.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

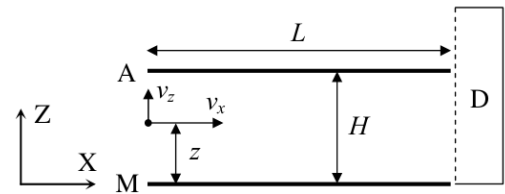
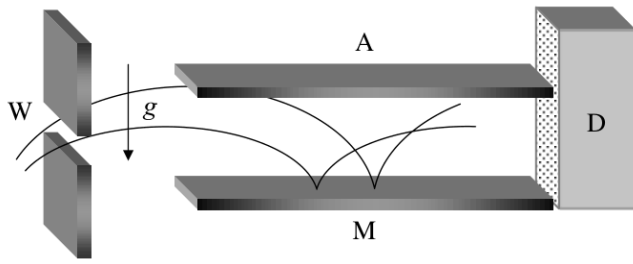
Aufgabe 3: Neutronen im Gravitationsfeld

Th 3 NEUTRONEN IM GRAVITATIONSFELD

In der vertrauten klassischen Welt ist ein elastisch auf der Erdoberfläche hüpfender Ball ein ideales Beispiel für eine unaufhörliche Bewegung. Der Ball ist eingeschlossen: Er kann weder unter die Oberfläche noch über seinen Umkehrpunkt gelangen. Er bleibt in diesem Zustand räumlich begrenzt und wird immer wieder nach unten umkehren und nach oben zurückprallen, bis in alle Ewigkeit. Nur Luftwiderstand oder unelastische Stöße könnten den Vorgang zum Stillstand bringen; sie werden im Folgenden vernachlässigt.

Eine Gruppe von Physikern des Instituts Laue - Langevin in Grenoble berichtete¹ im Jahr 2002 über experimentelle Nachweise zum Verhalten von Neutronen im Gravitationsfeld der Erde. Im Experiment ließ man nach rechts fliegende Neutronen auf eine horizontale Kristalloberfläche fallen, die als Neutronenspiegel wirkte und an der sie immer wieder elastisch bis zur ursprünglichen Höhe zurückprallten.

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung F-1 skizziert. Er besteht aus der Öffnung W, dem Neutronenspiegel M (auf der Höhe $z = 0$), dem Neutronenabsorber A (auf der Höhe $z = H$ und mit der Länge L) und dem Neutronendetektor D. Der Neutronenstrahl fliegt mit einer konstanten horizontalen Geschwindigkeitskomponente v_x von W nach D durch den Hohlraum zwischen A und M. Alle Neutronen, die die Oberfläche von A erreichen, werden absorbiert und scheiden aus dem Experiment aus. Diejenigen, die die Oberfläche von M erreichen, werden elastisch reflektiert. Der Detektor D misst die Transmissionsrate $N(H)$, also die Gesamtzahl der Neutronen, die D pro Zeiteinheit erreichen.



F-1

Die Punktzahlen sind am Anfang jeder Teilaufgabe in Klammern angegeben.

Die Neutronen treten mit einem breiten Spektrum positiver und negativer vertikaler Geschwindigkeiten v_z in den Hohlraum ein. Im Hohlraum fliegen sie zwischen dem Spiegel unten und dem Absorber oben.

1. (1.5) Berechnen Sie klassisch den Bereich der vertikalen Geschwindigkeiten $v_z(z)$ der Neutronen, die beim Eintritt auf einer Höhe z den Detektor D erreichen können. Nehmen Sie an, dass L wesentlich größer als jede andere Länge in dieser Aufgabe ist.
2. (1.5) Berechnen Sie klassisch die Mindestlänge L_c des Hohlraums, die sicherstellt, dass alle Neutronen außerhalb des zuvor bestimmten Geschwindigkeitsbereichs unabhängig vom Wert von z durch A absorbiert werden. Verwenden Sie $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ und $H = 50 \mu\text{m}$.

Die Neutronentransmissionsrate $N(H)$ wird bei D gemessen. Wir erwarten, dass sie mit H monoton zunimmt.

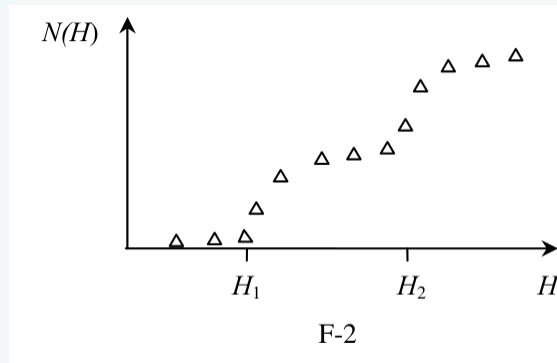
3. (2.5) Berechnen Sie die klassische Rate $N_c(H)$ unter der Annahme, dass Neutronen mit einer vertikalen Geschwindigkeit v_z auf einer Höhe z am Hohlraum eintreffen, wobei alle Werte von v_z und z gleich wahrscheinlich sind. Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von ρ an, der konstanten Anzahl von Neutronen pro Zeiteinheit, pro Einheit der vertikalen Geschwindigkeit und pro Höheneinheit, die mit der vertikalen Geschwindigkeit v_z auf der Höhe z in den Hohlraum eintreten.

¹ V. V. Nesvizhevsky et al. „Quantenzustände von Neutronen im Gravitationsfeld der Erde.“ Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

Die experimentellen Ergebnisse der Gruppe aus Grenoble stimmen nicht mit den obigen klassischen Vorhersagen überein. Sie zeigen stattdessen, dass der Wert von $N(H)$ sprunghaft ansteigt, wenn H bestimmte kritische Höhen $H_1, H_2 \dots$ überschreitet (Abbildung F-2 zeigt eine Skizze). Mit anderen Worten zeigte das Experiment, dass die vertikale Bewegung der am Spiegel zurückprallenden Neutronen quantisiert ist. In der Sprache, die Bohr und Sommerfeld zur Bestimmung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms verwendeten, lässt sich dies so ausdrücken: „Die Wirkung S dieser Neutronen in vertikaler Richtung ist ein ganzzahliges Vielfaches des planckschen Wirkungsquantums h .“ Dabei ist S gegeben durch

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel})$$

wobei p_z die vertikale Komponente des klassischen Impulses ist und sich das Integral über einen vollständigen Zyklus der Hüpfbewegung erstreckt. Nur Neutronen mit diesen Werten von S sind im Hohlraum erlaubt.



F-2

4. (2.5) Berechnen Sie die Umkehrhöhen H_n und die (zur vertikalen Bewegung gehörenden) Energieniveaus E_n mithilfe der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung. Geben Sie das numerische Ergebnis für H_1 in μm und für E_1 in eV an.

Die anfänglich gleichförmige Verteilung ρ der Neutronen am Eingang geht während des Flugs durch einen langen Hohlraum in die bei D nachgewiesene stufenförmige Verteilung über (siehe Abbildung F-2). Von nun an betrachten wir der Einfachheit halber den Fall eines langen Hohlraums mit $H < H_2$. Klassisch konnten alle Neutronen mit Energien in dem in Aufgabe 1 betrachteten Bereich den Hohlraum durchqueren, während quantenmechanisch nur Neutronen im Energieniveau E_1 erlaubt sind. Nach der Energie-Zeit-Unschärferelation von Heisenberg erfordert diese Umverteilung eine Mindestflugzeit. Bei geringer Hohlraumlänge ist die Unschärfe der Energie der vertikalen Bewegung beträchtlich. Dieses Phänomen führt zu einer Verbreiterung der Energieniveaus.

5. (2.0) Schätzen Sie die Mindestflugzeit t_q und die Mindestlänge L_q des Hohlraums ab, die erforderlich sind, um den ersten sprunghaften Anstieg der Neutronenzahl bei D zu beobachten. Verwenden Sie $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$.

Gegebene Größen:

Größe	Wert
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Neutronenmasse	$M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Erdbeschleunigung	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

Verwenden Sie bei Bedarf den Ausdruck:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

Antworten

1. Für $0 \leq z < H$ erfüllen die durchgelassenen Geschwindigkeiten

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

Bei den Randwerten erreichen die Neutronen den Absorber; diese Werte sind daher ausgeschlossen.

2. Die klassische Mindestlänge des Hohlraums beträgt

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.39 \text{ cm}.$$

3. Die klassische Transmissionsrate beträgt

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. Bei Verwendung genau der in der Aufgabe angegebenen Quantisierungsregel gilt

$$H_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2}{32M^2g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left(\frac{9n^2 \hbar^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

Numerisch ergibt sich

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. Mit $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$ und der Auflösungsskala $\Delta E \sim E_1$ ergeben sich als Abschätzungen der durch die Unschärferelation gesetzten Grenze

$$t_q \gtrsim \frac{\hbar}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Eine scharf aufgelöste Stufe erfordert eine längere Flugzeit. Wird die grobe Unschärfeabschätzung stattdessen als $\Delta E t_q \sim \hbar$ geschrieben, lauten die entsprechenden Abschätzungen

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Ohne ein quantitatives Kriterium für die Schärfe ist der numerische Vorfaktor nicht festgelegt.

Lösung

1. Klassischer Bereich der durchgelassenen vertikalen Geschwindigkeiten

Die horizontale Bewegung ist gleichförmig und beeinflusst die Energie der vertikalen Bewegung nicht. Zwischen den Reflexionen ergibt die Erhaltung der mechanischen Energie

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + M g z.$$

Eine elastische Reflexion am Spiegel kehrt das Vorzeichen von v_z um, ohne E_z zu verändern. Am oberen Umkehrpunkt z_t verschwindet die vertikale Geschwindigkeit, sodass

$$M g z_t = \frac{1}{2} M v_z^2 + M g z,$$

und daher

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

In einem hinreichend langen Hohlraum wird jedes Neutron absorbiert, dessen Bahn $z = H$ erreicht. Für die Transmission ist folglich $z_t < H$ erforderlich, also

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

Damit gilt

$$\boxed{-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.}$$

Beide Vorzeichen treten auf: Ein anfangs abwärts fliegendes Neutron wird zunächst am Spiegel reflektiert und steigt dann bis zur gleichen Umkehrhöhe auf. Der Gleichheitsfall ist ausgeschlossen, da laut Aufgabenstellung jedes Neutron, das den Absorber erreicht, absorbiert wird.

2. Klassische Mindestlänge des Hohlraums

Wir müssen die längstmögliche Zeit bestimmen, die vergeht, bevor ein Neutron außerhalb dieses Bereichs den Absorber erreicht.

Wir schreiben seine erhaltene Energie der vertikalen Bewegung als $E_z = M g a$, wobei $a \geq H$ die Umkehrhöhe ist, die es ohne den Absorber hätte. Der Betrag seiner vertikalen Geschwindigkeit auf der Höhe z ist

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a - z)}.$$

Die Zeit für den Aufstieg vom Spiegel zum Absorber beträgt

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a - z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{a} - \sqrt{a - H} \right). \end{aligned}$$

Sie nimmt mit wachsendem a ab, und ihr größter Wert ist

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ein anfangs aufwärts fliegendes Neutron erreicht den Absorber innerhalb eines solchen Aufstiegs. Ein anfangs abwärts fliegendes Neutron kann zuerst zum Spiegel hinabfallen und dann zum Absorber aufsteigen. Seine Gesamtzeit beträgt höchstens $2\tau(a)$.

Im Grenzfall beginnt die längste Bahn unmittelbar unterhalb des Absorbers mit einer sehr langsamen Abwärtsbewegung und einer Energie, die gerade ausreicht, um zur Höhe H zurückzukehren. Das Supremum der Zeit bis zur Absorption ist daher

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Da die horizontale Flugzeit L/v_x beträgt, werden alle solchen Neutronen bei $L/v_x \geq t_c$ entfernt. Bei jeder kleineren Länge können einige Bahnen, die der Grenzbahn hinreichend nahe kommen, der Absorption entgehen. Daher gilt

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

also

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

3. Klassische Transmissionsrate

Definitionsgemäß beträgt die einfallende Rate in einem Element $dz dv_z$

$$dN = \rho dz dv_z.$$

Bei einem langen Hohlraum trägt nur das in Teil 1 bestimmte Geschwindigkeitsintervall bei. Die Integration über dieses Intervall und über alle Eintrittshöhen ergibt

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\ &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$N_c(H) = \frac{4}{3}\rho\sqrt{2g} H^{3/2}.$$

Dies sagt eine glatte, ansteigende Kurve ohne Stufen voraus, die bei $N_c(0) = 0$ beginnt.

4. Quantisierte Umkehrhöhen und Energien

Für ein Neutron mit der vertikalen Umkehrhöhe H_n gilt

$$E_n = MgH_n.$$

Der vertikale Impuls auf dem aufwärts gerichteten Teil seiner Bahn ist

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

Beim Abstieg sind sowohl p_z als auch dz negativ, sodass der Beitrag zur Wirkung beim Abstieg gleich dem Beitrag beim Aufstieg ist. Bei der momentanen Reflexion am Spiegel findet keine Ortsänderung statt. Folglich beträgt die Wirkung über einen vollständigen Zyklus der Hüpfbewegung

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{H_n} M\sqrt{2g(H_n - z)} dz \\ &= \frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2}. \end{aligned}$$

Die Anwendung der angegebenen Bohr-Sommerfeld-Regel $S = nh$ ergibt

$$\frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

Auflösen liefert

$$H_n = \left(\frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3}.$$

Multiplikation mit Mg ergibt

$$E_n = \left(\frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3}.$$

Beide Größen sind proportional zu $n^{2/3}$.

Für $n = 1$ gilt

$$H_1 = \left[\frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

Daher ist

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}.$$

Die zugehörige Energie beträgt

$$E_1 = MgH_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J}.$$

Mit $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ ergibt sich

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. Quantenmechanische Mindestflugzeit und Mindestlänge des Hohlraums

Die Transmission setzt erstmals nahe $MgH = E_1$ ein. Ist die Energiebreite des ersten Niveaus mit E_1 vergleichbar, wird dieser Einsatz deutlich verschmiert. Die maßgebliche Energieskala für eine erste Abschätzung der Auflösung ist daher

$$\Delta E \sim E_1.$$

Verwendet man die Energie-Zeit-Unschärfeabschätzung in der Form

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

so ergibt sich als notwendige Flugzeitskala

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

Einsetzen der Energie in Joule ergibt

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

Aus der horizontalen Bewegung folgt dann

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Diese Werte kennzeichnen eine durch die Unschärferelation gesetzte Grenze, garantieren jedoch keine bestimmte experimentelle Schärfe. Um diesen Unterschied quantitativ zu erfassen, nehmen wir an, dass die zulässige Energiebreite $\Delta E = \epsilon E_1$ beträgt. Wegen $E = Mgh$ entspricht dies auch einer relativen Höhenbreite $\Delta H/H_1 = \epsilon$. Die Abschätzungen lauten dann

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m}.$$

Eine scharfe Stufe mit $\epsilon \ll 1$ erfordert Zeiten und Längen, die erheblich größer als die grundlegende Schranke sind.

Bei einer Größenordnungsbetrachtung mit $\Delta E t_q \sim h$ gibt man stattdessen an

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.