

## المسألة 1: قمر صناعي سيئ الحظ

## Th 1 قمر صناعي سيئ الحظ

تتمثل المناورات المدارية الأكثر شيوعاً التي تنفذها المركبات الفضائية في تغييرات السرعة على امتداد اتجاه الطيران، أي التسارع للوصول إلى مدارات أعلى أو الكبح لبدء العودة إلى الغلاف الجوي. سندرس في هذه المسألة التغيرات المدارية عندما يُطبق دفع المحرك في اتجاه شعاعي.

للحصول على القيم العددية، استخدم: نصف قطر الأرض  $R_T = 6.37 \cdot 10^6$  m، وتسارع الجاذبية على سطح الأرض  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>، واعتبر طول اليوم النجمي  $T_0 = 24.0$  h.

نعتبر قمراً صناعياً للاتصالات متزامناً مع دوران الأرض<sup>1</sup>، كتلته  $m$ ، موضوعاً في مدار دائري استوائي نصف قطره  $r_0$ . تحتوي هذه الأقمار الصناعية على «محرك الأوج» الذي يوفر الدفعات المماسية اللازمة للوصول إلى المدار النهائي.

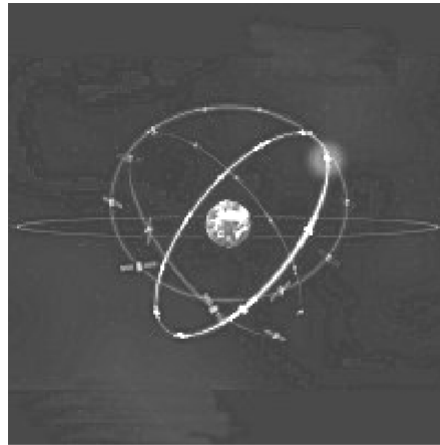


Image: ESA

الصورة: وكالة الفضاء الأوروبية

تُبين الدرجات في بداية كل سؤال فرعي، بين قوسين.

## السؤال 1

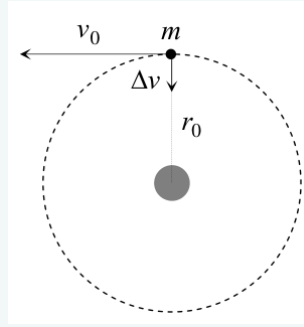
1.1 (0.3) احسب القيمة العددية لـ  $r_0$ .

1.2 (0.3+0.1) أعط التعبير التحليلي لسرعة القمر الصناعي  $v_0$  بدلالة  $g$ ، و  $R_T$ ، و  $r_0$ ، واحسب قيمتها العددية.

1.3 (0.4+0.4) أوجد تعبير زخم الزاوي  $L_0$  وطاقته الميكانيكية  $E_0$ ، بدلالة  $v_0$ ، و  $m$ ، و  $g$ ، و  $R_T$ .

بعد الوصول إلى هذا المدار الدائري المتزامن مع دوران الأرض (انظر الشكل F-1)، وتثبيت القمر الصناعي في الموقع المطلوب، وأثناء تجهيزه لأداء عمله، يتسبب خطأ من مراقبي التحكم الأرضي في تشغيل محرك الأوج مرة أخرى. ويتصادف أن يكون الدفع موجهاً نحو الأرض، وعلى الرغم من استجابة الفريق الأرضي السريعة لإيقاف المحرك، يكتسب القمر الصناعي تغيراً غير مرغوب فيه في

السرعة مقداره  $\Delta v$ . نَمِيز هذه الدفعة بالمعامل  $\beta = \Delta v/v_0$ . تكون مدة تشغيل المحرك دائماً مهملة مقارنة بأي أزمنة مدارية أخرى، بحيث يمكن اعتبارها لحظية.



F-1

## السؤال 2

افترض أن  $\beta < 1$ .

- 2.1 (0.4+0.5) حدّد معاملي المدار الجديد<sup>2</sup>، وهما نصف الوتر البؤري العمودي  $l$  والاختلاف المركزي  $\varepsilon$ ، بدلالة  $r_0$  و  $\beta$ .
- 2.2 (1.0) احسب الزاوية  $\alpha$  بين المحور الأكبر للمدار الجديد ومتجه الموضع عند التشغيل العرضي الخاطئ للمحرك.
- 2.3 (1.0+0.2) أعطِ التعبيرين التحليليين لبُعدي الحضيض  $r_{\min}$  والأوج  $r_{\max}$  عن مركز الأرض، بدلالة  $r_0$  و  $\beta$ ، واحسب قيمتهما العدديتين عندما  $\beta = 1/4$ .
- 2.4 (0.5+0.2) حدّد الزمن الدوري للمدار الجديد،  $T$ ، بدلالة  $T_0$  و  $\beta$ ، واحسب قيمته العددية عندما  $\beta = 1/4$ .

<sup>1</sup> زمن دورانه هو  $T_0$ .

<sup>2</sup> انظر «التلميح».

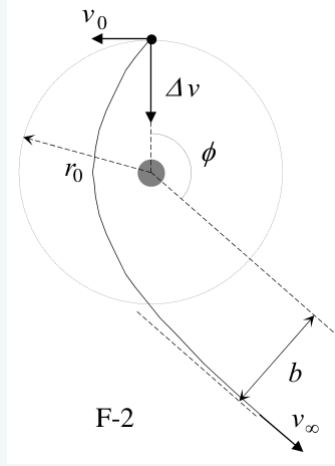
## السؤال 3

- 3.1 (0.5) احسب الحد الأدنى لمعامل الدفعة،  $\beta_{\text{esc}}$ ، اللازم لإفلات القمر الصناعي من جاذبية الأرض.
- 3.2 (1.0) حدّد في هذه الحالة أقرب مسافة يصل إليها القمر الصناعي من مركز الأرض على المسار الجديد،  $r'_{\min}$ ، بدلالة  $r_0$ .

## السؤال 4

افترض أن  $\beta > \beta_{\text{esc}}$ .

- 4.1 (1.0) حدّد السرعة المتبقية عند اللانهاية،  $v_{\infty}$ ، بدلالة  $v_0$  و  $\beta$ .
- 4.2 (1.0) أوجد «معامل التصادم»  $b$  لاتجاه الإفلات التقاربي بدلالة  $r_0$  و  $\beta$ . (انظر الشكل F-2).
- 4.3 (1.0+0.2) حدّد الزاوية  $\phi$  لاتجاه الإفلات التقاربي بدلالة  $\beta$ . احسب قيمتها العددية عندما  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}}$ .

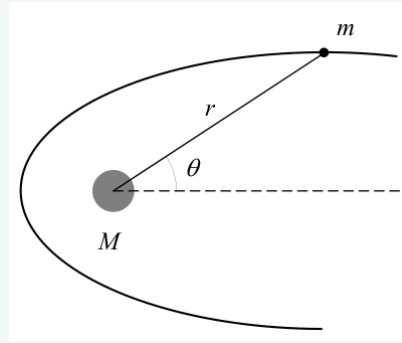


F-2

### تلميح

تحت تأثير قوى مركزية تخضع لقانون التربيع العكسي، تتبع الأجسام مسارات على شكل قطوع ناقصة أو مكافئة أو زائدة. في التقريب  $m \ll M$ ، تقع الكتلة الجاذبة  $M$  عند إحدى البؤرتين. وباتخاذ هذه البؤرة مبدأً للإحداثيات، يمكن كتابة المعادلة القطبية العامة لهذه المنحنيات على الصورة الآتية (انظر الشكل F-3)

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$



F-3

حيث  $l$  ثابت موجب يُسمَّى نصف الوتر البؤري العمودي، و  $\varepsilon$  هو الاختلاف المركزي للمنحنى. وبدلالة ثوابت الحركة:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{و} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

حيث  $G$  ثابت نيوتن للجاذبية، و  $L$  مقدار الزخم الزاوي للكتلة التي تدور في المدار بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات، و  $E$  طاقتها الميكانيكية، مع اتخاذ طاقة الوضع صفرًا عند اللانهاية.

يمكن أن تكون لدينا الحالات الآتية:

(i) إذا كان  $0 \leq \varepsilon < 1$ ، فالمنحنى قطع ناقص (دائرة عندما  $\varepsilon = 0$ ).

(ii) إذا كان  $\varepsilon = 1$ ، فالمنحنى قطع مكافئ.

(iii) إذا كان  $\varepsilon > 1$ ، فالمنحنى قطع زائد.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

1.1 •

$$r_0 = \left( \frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \boxed{4.22 \times 10^7 \text{ m}}.$$

1.2 •

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

1.3 •

$$\boxed{L_0 = \frac{mgR_T^2}{v_0}}, \quad \boxed{E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

2.1 •

$$\boxed{l = r_0, \quad \varepsilon = \beta}.$$

2.2 •

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

ينطبق هذا عندما  $0 < \beta < 1$ ؛ أما عند  $\beta = 0$ ، فالمدار دائري ولا يوجد له محور أكبر مميز.

2.3 •

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

عندما  $\beta = 1/4$

$$\boxed{r_{\min} = 3.38 \times 10^7 \text{ m}}, \quad \boxed{r_{\max} = 5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

2.4 •

$$\boxed{T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

عندما  $\beta = 1/4$ ،  $\boxed{T = 26.4 \text{ h}}$ .

3.1 •

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

3.2 •

$$\boxed{r'_{\min} = \frac{r_0}{2}}.$$

4.1 •

$$\boxed{v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.2 •

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

4.3 •

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

عندما  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$

$$\phi = 138.2^\circ.$$

الحل

لنضع

$$\mu = GM = gR_T^2,$$

حيث  $M$  كتلة الأرض. نستخدم الجاذبية النيوتنية لأرض ثابتة كروية الشكل، مع  $m \ll M$ ، ونهمل مقاومة الغلاف الجوي وتأثير الأجرام الأخرى. نعامل تشغيل المحرك على أنه لحظي، وكتلة القمر الصناعي على أنها ثابتة. وتساوي طاقة وضع الجاذبية صفرًا عند اللانهاية.

### 1.1 — نصف قطر المدار المتزامن مع دوران الأرض

في المدار الدائري، يوفر تسارع الجاذبية التسارع المركزي:

$$\frac{\mu}{r_0^2} = \frac{v_0^2}{r_0}.$$

الزمن الدوري المداري هو  $T_0$ ، لذا

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}.$$

بالجمع بين هاتين المعادلتين نحصل على

$$r_0^3 = \frac{\mu T_0^2}{4\pi^2}.$$

ومن ثم

$$r_0 = \left( \frac{gR_T^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

باستخدام  $T_0 = 24.0 \times 3600$  s،

$$r_0 = \left[ \frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2(24.0 \times 3600)^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.222197 \dots \times 10^7 \text{ m}.$$

إذن،

$$r_0 = 4.22 \times 10^7 \text{ m}.$$

### 1.2 — السرعة المدارية الابتدائية

يعطي شرط المدار الدائري

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{gR_T^2}{r_0}.$$

وعليه

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{r_0}}.$$

عددياً،

$$v_0 = 3070.47 \dots \text{ m s}^{-1} = \boxed{3.07 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}.$$

### 1.3 — الزخم الزاوي والطاقة الميكانيكية الابتدائيان

السرعة عمودية على نصف القطر، لذا فإن مقدار الزخم الزاوي هو

$$L_0 = mr_0 v_0.$$

بما أن  $r_0 = \mu/v_0^2$

$$L_0 = \frac{m\mu}{v_0} = \frac{mgR_T^2}{v_0}.$$

الطاقة الميكانيكية هي

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mu m}{r_0}.$$

باستخدام  $\mu/r_0 = v_0^2$

$$E_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

### 2.1 — نصف الوتر البؤري العمودي والاختلاف المركزي بعد الدفعة

ليكن  $\hat{\mathbf{r}}$  متجهاً شعاعياً نحو الخارج عند التشغيل الخاطئ، وليكن  $\hat{\mathbf{t}}$  متجهاً في اتجاه السرعة الأصلية. مباشرة بعد الدفعة،

$$\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{t}} - \beta v_0 \hat{\mathbf{r}}.$$

المركبتان متعامدتان، مما يعطي

$$v^2 = v_0^2(1 + \beta^2).$$

الدفعة شعاعية، ولذلك يكون دفعها الزاوي حول مركز الأرض صفراً. وبناءً عليه،

$$L = L_0 = mr_0 v_0.$$

يبقى نصف القطر  $r_0$  أثناء التشغيل اللحظي للمحرك، لذا تكون الطاقة الجديدة

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \beta^2) - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

إذن  $E < 0$  عندما  $\beta < 1$ ، كما يلزم مدار مقيد.

من صيغ المدار المعطاة،

$$l = \frac{L^2}{\mu m^2} = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = \boxed{r_0},$$

و

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu^2 m^3} = 1 + (\beta^2 - 1) = \beta^2.$$

لأن  $\beta$  نسبة غير سالبة بين مقدارَي سرعة،

$$\boxed{\varepsilon = \beta}.$$

ينطبق هذان التعبيران لـ  $l$  و  $\varepsilon$  أيضًا على حالتَي القطع المكافئ والقطع الزائد اللتين سنتناولهما لاحقًا.

## 2.2 — اتجاه المحور الأكبر

عند لحظة التشغيل الخاطئ،  $r = r_0 = l$ . وبالتعويض في المعادلة القطبية نحصل على

$$r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_0}.$$

عندما  $\beta > 0$ ، يتطلب ذلك

$$\cos \theta_0 = 0.$$

المحور المرجعي القطبي هو اتجاه المحور الأكبر، لذا فإن متجه الموضع عند التشغيل الخاطئ عمودي على ذلك المحور:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}.$$

لتحديد الفرع، نختار  $\theta$  بحيث تزداد في اتجاه الحركة المدارية. عندئذ

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r_0 \beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

السرعة الشعاعية الابتدائية موجّهة نحو الداخل، لذا  $dr/d\theta < 0$ . وبالتالي،

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

يصل القمر الصناعي بعد ذلك إلى الحضيض عند  $\theta = \pi$ . وفق الاتجاهات المبينة في الشكل F-1، يكون المحور الأكبر أفقيًا ويقع الحضيض إلى يسار الأرض.

عندما  $\beta = 0$ ، يبقى المدار دائريًا، ولا يوجد اتجاه وحيد للمحور الأكبر.

## 2.3 — الحضيض والأوج

بالنسبة إلى

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta},$$

يكون نصف القطر أصغر ما يمكن عندما يكون المقام أكبر ما يمكن، وذلك عند  $\theta = \pi$ . ويكون نصف القطر أكبر ما يمكن عند  $\theta = 0$ . وعليه

$$\boxed{r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}}, \quad \boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}}.$$

عندما  $\beta = 1/4$ ،

$$r_{\min} = \frac{4}{5}r_0 = \boxed{3.38 \times 10^7 \text{ m}},$$

$$r_{\max} = \frac{4}{3}r_0 = \boxed{5.63 \times 10^7 \text{ m}}.$$

كلتا المسافتين مقاسة من مركز الأرض.

## 2.4 — الزمن الدوري للمدار الجديد

نصف المحور الأكبر للقطع الناقص هو

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 - \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}.$$

يعطي قانون كبلر الثالث للمدارات حول الكتلة المركزية نفسها

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}.$$

إذن،

$$T = T_0 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{3/2} = \boxed{\frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}.$$

عندما  $\beta = 1/4$ ،

$$T = 24.0 \left( \frac{16}{15} \right)^{3/2} \text{ h} = 26.4396 \dots \text{ h},$$

ومن ثم

$$\boxed{T = 26.4 \text{ h}}.$$

### 3.1 — الحد الأدنى للدفعة اللازمة للإفلات

لا يمكن لمسار أن يصل إلى اللانهاية إلا إذا كانت طاقته الميكانيكية غير سالبة. ويحقق مسار الإفلات الحدي  $E = 0$ :

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0.$$

إذن

$$\boxed{\beta_{\text{esc}} = 1}.$$

عند هذه العتبة،  $\varepsilon = 1$ ، لذا يكون المدار قطعاً مكافئاً وتتوّل السرعة إلى الصفر عند اللانهاية.

### 3.2 — أقرب مسافة عند عتبة الإفلات

عندما  $\beta = 1$ ،

$$l = r_0, \quad \varepsilon = 1.$$

وعليه فإن بُعد حضيض القطع المكافئ هو

$$r'_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon} = \boxed{\frac{r_0}{2}}.$$

يتحرك القمر الصناعي في البداية نحو الداخل، لذا يصل إلى هذه المسافة الدنيا قبل الإفلات. عددياً،

$$r'_{\min} = 2.11 \times 10^7 \text{ m} > R_T,$$

ولذلك يمر مسار الإفلات الحدي دون الاصطدام بالأرض.

### 4.1 — السرعة المتبقية عند اللانهاية

عندما  $\beta > 1$ ، تكون الطاقة موجبة. عند اللانهاية، تنعدم طاقة وضع الجاذبية، ويعطي انخفاض الطاقة

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1).$$

وعليه

$$\boxed{v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

### 4.2 — معامل التصادم

معامل التصادم  $b$  هو المسافة العمودية من مركز الأرض إلى خط التقارب الخارج.

بعيداً عن الأرض، تقترب الحركة من حركة منتظمة على امتداد خط التقارب هذا. ولذلك يكون مقدار زخمها الزاوي

$$L = mbv_{\infty}.$$

يعطي انحفاظ الزخم الزاوي

$$mbv_{\infty} = mr_0v_0.$$

باستخدام نتيجة 4.1،

$$b = \frac{r_0v_0}{v_{\infty}} = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

### 4.3 — اتجاه الإفلات

نستخدم الاصطلاح القطبي نفسه المستخدم في 2.2:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2},$$

بحيث تزداد  $\theta$  في اتجاه الحركة، ويقع الحضيض عند  $\theta = \pi$ .

عند اللانهاية، يؤول المقام إلى الصفر:

$$\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

نعرف

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

بعد المرور بالحضيض، يصل الفرع الخارج إلى

$$\theta_{\infty} = 2\pi - \delta.$$

السرعة المماسية هي  $L/(mr)$ ، وهي تؤول إلى الصفر عندما  $r \rightarrow \infty$ . لذلك يتطابق الاتجاه الحدي للسرعة مع الاتجاه الشعاعي الحدي نحو الخارج.

الزاوية  $\phi$  المبيّنة على يمين الشكل F-2 هي الزاوية الأصغر بين نصف القطر الأصلي المتجه نحو الخارج وهذا الاتجاه الخارج. وبالتالي،

$$\phi = 2\pi - (\theta_{\infty} - \theta_0) = 2\pi - \left(2\pi - \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

وعليه

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

يحقق الفرع المعني

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi.$$

عندما  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 90^\circ + 48.1897\dots^\circ,$$

مما يعطي

$$\phi = 138.2^\circ.$$

تصف صيغ الإفلات مسارًا كبلريًا خاليًا من الاصطدام. ولأرض ذات حجم محدود، يتطلب ذلك أيضًا  $r_0/(1 + \beta) > R_T$ ، وهو شرط يتحقق في المثال العددي المحدد.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

## المسألة 2: القياسات المطلقة للكميات الكهربائية

### Th 2 القياسات المطلقة للكميات الكهربائية

أوجدت التحولات التكنولوجية والعلمية التي شهدها القرن التاسع عشر حاجة ملحة إلى معايير للكميات الكهربائية تحظى بقبول عالمي. وكان يُعتقد أن الوحدات المطلقة الجديدة ينبغي أن تعتمد حصراً على معايير الطول والكتلة والزمن التي أُرسيت بعد الثورة الفرنسية. وقد أُجريت أعمال تجريبية مكثفة لتحديد قيم هذه الوحدات في الفترة من 1861 إلى 1912. ونطرح هنا ثلاث دراسات لحالات محددة.

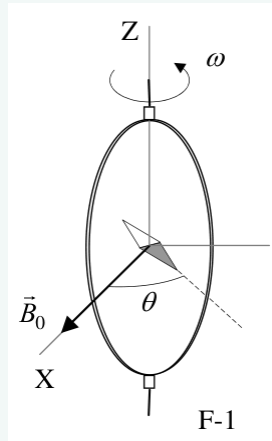
تُبين الدرجات في بداية كل سؤال فرعي، بين قوسين.

#### تعيين الأوم (كلفن)

يُدار ملف دائري مغلق عدد لفاته  $N$ ، ونصف قطره  $a$ ، ومقاومته الكلية  $R$ ، بسرعة زاوية منتظمة  $\omega$  حول قطر رأسي في مجال مغناطيسي أفقي  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ .

1. (0.5+1.0) احسب القوة الدافعة الكهربائية  $\mathcal{E}$  المستحثة في الملف، وكذلك متوسط القدرة  $\langle P \rangle$  اللازمة لإبقاء الملف في حالة حركة. أهمل الحث الذاتي للملف.

توضع إبرة مغناطيسية صغيرة عند مركز الملف، كما هو موضح في الشكل F-1. ويمكنها الدوران ببطء بحرية حول المحور Z في مستوى أفقي، لكنها لا تستطيع مجازة دوران الملف السريع.



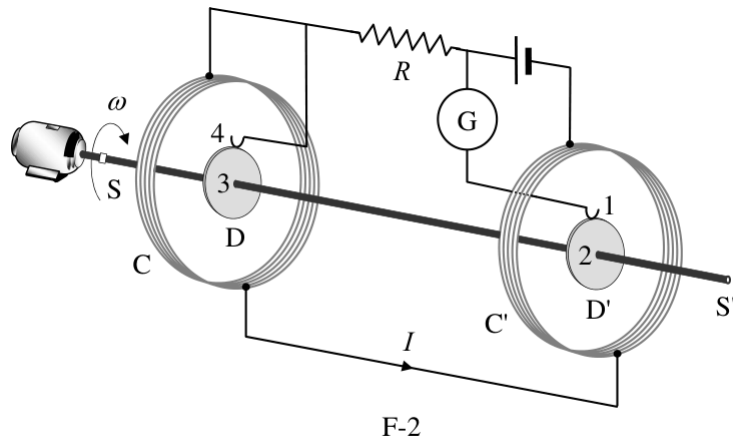
F-1

2. (2.0) بعد بلوغ الحالة المستقرة، تستقر الإبرة في اتجاه يصنع زاوية صغيرة  $\theta$  مع  $\vec{B}_0$ . احسب مقاومة الملف  $R$  بدلالة هذه الزاوية وسائر معلمات النظام.

استخدم اللورد كلفن هذه الطريقة في ستينيات القرن التاسع عشر لإرساء المعيار المطلق للأوم. وللاستغناء عن الملف الدوار، ابتكر لورنتس طريقة بديلة استخدمها اللورد رايلي والسيدة سيدجويك، ونحلها في الفقرات التالية.

#### تعيين الأوم (رايلي، سيدجويك).

يُبين التركيب التجريبي في الشكل F-2. ويتكون من قرصين معدنيين متماثلين D و D' نصف قطر كل منهما  $b$ ، مثبتين على المحور الموصل SS'. يدير محرك هذه المجموعة بسرعة زاوية  $\omega$  يمكن ضبطها لقياس  $R$ . ويحيط بالقرصين ملفان متماثلان C و C' (نصف قطر كل منهما  $a$ ، وعدد لفات كل منهما  $N$ ). وهما موصولان بحيث يسري فيهما التيار  $I$  في اتجاهين متعاكسين. ويُستخدم الجهاز بأكمله لقياس المقاومة  $R$ .



F-2

<sup>1</sup> تُعرّف القيمة المتوسطة  $\langle X \rangle$  لكمية  $X(t)$  في نظام دوري زمنه الدوري  $T$  بالعلاقة

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt.$$

قد تحتاج إلى واحد أو أكثر من التكاملات التالية:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad \text{ولاحقاً} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

**3. (2.0)** افترض أن التيار  $I$  المار في الملفين C وC' يولد مجالاً مغناطيسياً منتظماً  $B$  حول D وD'، مساوياً للمجال عند مركز الملف. احسب<sup>1</sup> القوة الدافعة الكهربائية  $\mathcal{E}$  المستحثة بين الحافتين 1 و4، بافتراض أن المسافة بين الملفين أكبر بكثير من نصف قطرها وأن  $a \gg b$ .

يُوصَل القرصان بالدائرة بواسطة تلامسات فرشية عند حافتيهما 1 و4. ويكشف الجلفانومتر G عن مرور التيار في الدائرة 1-2-3-4.

**4. (0.5)** تُقاس المقاومة  $R$  عندما تكون قراءة G صفراً. أوجد  $R$  بدلالة المعلمات الفيزيائية للنظام.

### تعيين الأمبير

يتيح تمرير تيار في موصلين وقياس القوة بينهما تعييناً مطلقاً للتيار نفسه. ويعتمد «ميزان التيار» الذي صممه اللورد كلفن في عام 1882 على هذه الطريقة. ويتكون من ستة ملفات متماثلة أحادية اللفة  $C_1 \dots C_6$ ، نصف قطر كل منها  $a$ ، موصولة على التوالي. وكما هو موضح في الشكل F-3، تقع الملفات الثابتة  $C_1$  و  $C_3$  و  $C_4$  و  $C_6$  في مستويين أفقيين تفصل بينهما مسافة صغيرة  $2h$ . ويحمل ذراعاً الميزان، اللذان طول كل منهما  $d$ ، الملفين  $C_2$  و  $C_5$ ، وهما عند الاتزان على مسافتين متساويتين من المستويين.

يسري التيار  $I$  في الملفات المختلفة باتجاه يجعل القوة المغناطيسية المؤثرة في  $C_2$  متجهة إلى أعلى، بينما تكون القوة المؤثرة في  $C_5$  متجهة إلى أسفل. وتلزم كتلة  $m$  على مسافة  $x$  من نقطة الارتكاز O لإعادة الميزان إلى وضع الاتزان الموصوف أعلاه عند مرور التيار في الدائرة.



3. مقدار القوة الدافعة الكهربائية بين الحافتين هو

$$|\mathcal{E}_{14}| = B\omega b^2 = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}. \quad .4$$

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}, \quad \text{متجهة إلى أعلى.} \quad .5$$

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 a d}}. \quad .6$$

7. ضمن رتبة تقريب الإزاحة الصغيرة المحدد،

$$\delta z_{\max} \approx \frac{M l h^2}{m x d} = \frac{M g l h^3}{4 \mu_0 a I^2 d^2}.$$

تؤدي الإزاحة الموجبة إلى عودة نحو الاتزان عندما يكون  $0 < \delta z < \delta z_{\max}$  وتمثل المساواة الحالة الحدية.

## الحل

1. القوة الدافعة الكهربائية المستحثة ومتوسط القدرة الميكانيكية

لتكن  $A = \pi a^2$ . نختار العمودي الموجب على الملف على الصورة

$$\hat{n}(t) = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j},$$

بحيث يكون موازياً للمجال المطبق عند  $t = 0$ .

الفيض المغناطيسي الكلي المرتبط باللفات الـ  $N$  هو

$$\Lambda(t) = N A B_0 \cos(\omega t).$$

ومن ثم يعطي قانون فاراداي

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Lambda}{dt} = N A B_0 \omega \sin(\omega t),$$

أو

$$\mathcal{E}(t) = N \pi a^2 B_0 \omega \sin(\omega t).$$

ولا يغير اختيار اتجاه ابتدائي مختلف إلا الطور.

بما أننا نهمل الحث الذاتي، فإن التيار اللحظي هو

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}.$$

عند ثبات السرعة الزاوية، تساوي القدرة الميكانيكية المبذولة ضد عزم الكبح المغناطيسي معدل توليد حرارة جول:

$$P(t) = i^2(t) R = \frac{N^2 A^2 B_0^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

وباستخدام  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle P \rangle = \frac{N^2 \pi^2 a^4 B_0^2 \omega^2}{2R}.$$

## 2. المقاومة من انحراف الإبرة المغناطيسية

المجال عند مركز ملف دائري ذي  $N$  لفة هو

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2a} \hat{n}(t).$$

بالتعويض عن التيار الذي أوجدناه في الجزء 1، وكتابة  $\phi = \omega t$ ،

$$\vec{B}_c(t) = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} (\sin \phi \cos \phi \hat{i} + \sin^2 \phi \hat{j}).$$

يتغير اتجاه الإبرة بمقدار مهمل خلال دورة واحدة للملف. ولذلك فإن متوسط عزم القوة المؤثر فيها يساوي حاصل الضرب الاتجاهي لعزمها المغناطيسي في المتوسط المتجهي للمجال الكلي. وبما أن

$$\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2},$$

فإن متوسط مجال الملف هو

$$\langle \vec{B}_c \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

وهو عمودي على المجال المطبق.

تصطف الإبرة المستقرة مع

$$\langle \vec{B}_{\text{total}} \rangle = B_0 \hat{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \hat{j}.$$

ومن ثم

$$\tan \theta = \frac{\langle B_{c,y} \rangle}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R},$$

فنحصل على

$$R = \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \tan \theta}.$$

وللزاوية الصغيرة المحددة،

$$R \approx \frac{\mu_0 \pi N^2 a \omega}{4 \theta}.$$

## 3. القوة الدافعة الكهربائية بين حافتي القرصين الدوارين

مقدار المجال المغناطيسي عند مركز أي من الملفين المحيطين هو

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a}.$$

يسمح التباعد الكبير بين الملفين بإهمال مساهمة مجال كل منهما عند الآخر. ويسمح الشرط  $a \gg b$  باعتبار هذا المجال المركزي منتظماً على امتداد كل قرص.

عند نصف القطر  $r$ ، يتحرك عنصر من القرص بسرعة مماسية

$$v = \omega r.$$

في مجال مغناطيسي محوري، تكون القوة المغناطيسية لكل وحدة شحنة،  $\vec{v} \times \vec{B}$ ، شعاعية الاتجاه. ومن ثم فإن مقدار القوة الدافعة الكهربائية الحركية من مركز أحد القرصين إلى حافته هو

$$\mathcal{E}_d = \int_0^b B \omega r dr = \frac{1}{2} B \omega b^2.$$

يدور القرصان في الاتجاه نفسه، لكن مجاليهما المغناطيسيين متعاكسان. ولذلك فإن قوتيهما الدافعتين الكهربائيتين بين الحافة والمركز متعاكستان في الإشارة. وبما أن المركزين موصولان بالمحور الموصل، فإن مقداري القوتين الدافعتين الكهربائيتين يتجمعان بين الحافتين:

$$|\mathcal{E}_{14}| = 2\mathcal{E}_d = B\omega b^2.$$

ومن ثم

$$|\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

تتحدد القطبية باتجاه  $\vec{\omega}$  بالنسبة إلى المجال المحوري في كل قرص.

#### 4. المقاومة عند انعدام قراءة الجلفانومتر

عندما تكون قراءة الجلفانومتر صفراً، لا يمر تيار في فرع القرص-المحور-الجلفانومتر. ولذلك لا يحدث هبوط في الجهد بسبب المقاومة على امتداد هذا الفرع.

توازن القوة الدافعة الكهربائية للقرصين الجهد  $IR$  بين طرفي المقاومة:

$$IR = |\mathcal{E}_{14}| = \frac{\mu_0 N I \omega b^2}{2a}.$$

وباختزال التيار غير الصفري،

$$R = \frac{\mu_0 N \omega b^2}{2a}.$$

#### 5. القوة بين $C_2$ و $C_1$

لسلكين طويلين متوازيين تفصل بينهما مسافة  $h$ ، ويمر في كل منهما تيار  $I$ ، تكون القوة المغناطيسية لكل وحدة طول

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}.$$

وفقاً للتقريب المحدد، تنطبق هذه العلاقة محلياً على امتداد محيط الملفين  $2\pi a$ . ولذلك تكون القوة

$$F = f(2\pi a) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h}(2\pi a),$$

ومن ثم

$$F = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

يسري التياران في  $C_1$  و  $C_2$  في الاتجاه الدوراني نفسه، لذا يكون التفاعل تجاذبياً. وبما أن  $C_1$  يقع فوق  $C_2$ ، فإن القوة المؤثرة في  $C_2$  تتجه إلى أعلى.

#### 6. التيار من اقتران الميزان

يجذب الملف العلوي  $C_1$  الملف  $C_2$  إلى أعلى، بينما يدفعه الملف السفلي  $C_3$ ، الذي يحمل تياراً معاكساً، إلى أعلى بالتناظر. ويسهم كل منهما بالقوة التي أوجدناها في الجزء 5. ومن ثم فإن القوة الكلية المتجهة إلى أعلى والمؤثرة في  $C_2$  هي  $2F$ .

وبالمثل، تكون القوة الكلية المؤثرة في  $C_5$  مساوية لـ  $2F$  ومتجهة إلى أسفل. وتنتج هاتان القوتان عزمين في الاتجاه الدوراني نفسه:

$$\tau_{\text{mag}} = (2F)d + (2F)d = 4Fd.$$

تولد الكتلة المضافة العزم المعاكس  $mgx$ . وعند الاتزان،

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a I^2 d}{h}.$$

وبالتالي،

$$I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}.$$

## 7. الإزاحة العظمى التي تولّد عزم إرجاع

نكتب  $z = \delta z$ ، وتكون موجبة عندما يرتفع  $C_2$  وينخفض  $C_5$ . ولتكن  $\alpha$  زاوية ميل الميزان الموافقة، بحيث

$$z = d \sin \alpha.$$

نُبقى على افتراض بقاء مراكز الملفات على استقامة واحدة، ونعتبر التيار ثابتاً.

نعرف

$$K = \mu_0 a I^2.$$

بعد الإزاحة، تصبح المسافتان بين  $C_2$  والملفين الثابتين العلوي والسفلي  $h - z$  و  $h + z$ . وتبقى القوتان المغناطيسيتان متجهتين إلى أعلى، لذا فإن مجموعهما هو

$$F_L(z) = \frac{K}{h - z} + \frac{K}{h + z} = \frac{2Kh}{h^2 - z^2}.$$

وعلى اليمين، تتبادل المسافتان قيمتهما؛ ويكون للقوة الكلية المتجهة إلى أسفل المقدار نفسه.

باعتبار العزم الموجب هو الذي يميل إلى زيادة  $z$ ، يكون العزم المغناطيسي الكلي

$$\tau_{\text{mag}} = 2d \cos \alpha F_L(z) = \frac{4Khd}{h^2 - z^2} \cos \alpha.$$

تولّد الكتلة المضافة العزم المعاكس

$$\tau_m = -mgx \cos \alpha.$$

ولأن مركز كتلة الميزان يقع على مسافة  $l$  أسفل نقطة ارتكازه، فإن وزنه يولّد عزم الإرجاع

$$\tau_M = -Mgl \sin \alpha.$$

وتُلغى أوزان الأجزاء المعلقة المتساوية بعضها بعضاً في اتزان العزوم.

ومن ثم فإن العزم المحصل هو

$$\tau(z) = \left( \frac{4Khd}{h^2 - z^2} - mgx \right) \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

ومن شرط الاتزان في الجزء 6،

$$mgx = \frac{4Kd}{h}.$$

بالتعويض نحصل على

$$\tau(z) = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} \cos \alpha - Mgl \sin \alpha.$$

للميل الصغير، يكون  $\cos \alpha > 0$ ، لذا تكون إشارة العزم هي إشارة المقدار

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} = mgx \frac{z^2}{h^2 - z^2} - Mgl \tan \alpha.$$

وباستخدام التقريبات المحددة،

$$\frac{z^2}{h^2 - z^2} \approx \frac{z^2}{h^2}, \quad \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{z}{d},$$

نحصل على

$$\frac{\tau(z)}{\cos \alpha} \approx \frac{mgx}{h^2} z^2 - \frac{Mgl}{d} z.$$

عندما يكون  $z > 0$ ، يبدأ الميزان بالتحرك عائداً نحو الاتزان إذا كان  $\tau(z) < 0$ . ولذلك

$$\frac{mgx}{h^2} z < \frac{Mgl}{d},$$

أو

$$z < \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

ومن ثم فإن الإزاحة الحدية هي

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mlh^2}{mxd}.$$

وباستخدام علاقة الاتزان مرة أخرى،

$$\delta z_{\max} \approx \frac{Mglh^3}{4\mu_0 a I^2 d^2}.$$

عند هذا الحد ينعدم العزم المحصل ضمن الرتبة المحتفظ بها؛ وتولد إزاحة موجبة أكبر عزمًا يُبعد الميزان عن الاتزان. أما عند إزاحة سالبة صغيرة، فإن كلا الحدين في العزم التقريبي يتجه نحو زيادة  $z$ ، فيبدأ الميزان بالعودة نحو الاتزان.

الحد المذكور هو نتيجة الرتبة الأولى غير المنعدمة في تقريب الإزاحة الصغيرة، ويتطلب  $\delta z_{\max} \ll h$  و  $\delta z_{\max} \ll d$  للاستخدام الكمي للتقريبات.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

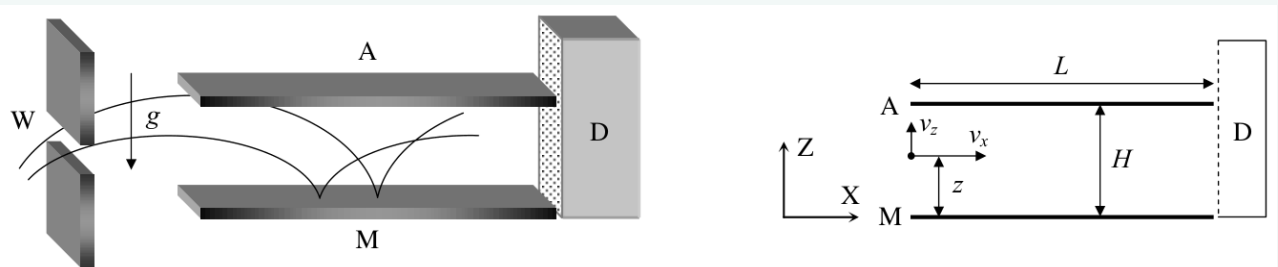
### المسألة 3: النيوترونات في مجال الجاذبية

#### Th 3 النيوترونات في مجال الجاذبية

في العالم الكلاسيكي المألوف، تُعدّ كرة ترتد ارتداداً مرناً على سطح الأرض مثلاً مثالاً للحركة الدائمة. فالكرة محصورة: لا يمكنها أن تهبط إلى ما دون السطح أو أن ترتفع فوق نقطة انقلاب حركتها. وستبقى محصورة في هذه الحالة، فتنعكس حركتها إلى أسفل ثم ترتد إلى أعلى مرة بعد أخرى، إلى الأبد. ولا يمكن أن يوقف هذه العملية إلا مقاومة الهواء أو الارتدادات غير المرنة، وسنهمل كليهما فيما يأتي.

أعلنت مجموعة من الفيزيائيين من معهد لاو - لانجفان في غرونوبل في عام 2002 عن أدلة تجريبية على سلوك النيوترونات في مجال جاذبية الأرض<sup>1</sup>. في التجربة، سُمح لنيوترونات تتحرك نحو اليمين بالسقوط نحو سطح بلوري أفقي يعمل مرآةً للنيوترونات، فكانت ترتد عنه ارتداداً مرناً إلى الارتفاع الابتدائي مرة بعد أخرى.

يوضح الشكل F-1 مخطط ترتيب التجربة. وهو يتكون من الفتحة  $W$ ، ومرآة النيوترونات  $M$  (عند الارتفاع  $z = 0$ )، وماصّ النيوترونات  $D$  (عند الارتفاع  $z = H$  وبطول  $L$ )، وكاشف النيوترونات  $A$ . تنتقل حزمة النيوترونات بمركبة سرعة أفقية ثابتة  $v_x$  من  $W$  إلى  $D$  عبر التجويف الواقع بين  $A$  و  $M$ . تُمتص جميع النيوترونات التي تصل إلى سطح  $A$  وتختفي من التجربة. أما تلك التي تصل إلى سطح  $M$  فتنعكس انعكاساً مرناً. يقيس الكاشف  $D$  معدل النفاذ  $N(H)$ ، أي العدد الكلي للنيوترونات التي تصل إلى  $D$  في وحدة الزمن.



تُبين الدرجات في بداية كل سؤال فرعي، بين قوسين.

تدخل النيوترونات التجويف بسرعات رأسية  $v_z$  تغطي نطاقاً واسعاً من القيم الموجبة والسالبة. وما إن تدخل التجويف حتى تتحرك بين المرآة في الأسفل والماس في الأعلى.

1. (1.5) احسب وفق الميكانيكا الكلاسيكية نطاق السرعات الرأسية  $v_z(z)$  للنيوترونات التي تدخل عند ارتفاع  $z$  ويمكنها الوصول إلى الكاشف D. افترض أن  $L$  أكبر بكثير من أي طول آخر في المسألة.

2. (1.5) احسب وفق الميكانيكا الكلاسيكية الطول الأدنى  $L_c$  للتجويف الذي يضمن أن يمتص A جميع النيوترونات الواقعة خارج نطاق السرعات السابق، بصرف النظر عن قيم  $z$ . استخدم  $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$  و  $H = 50 \mu\text{m}$ .

يُقاس معدل نفاذ النيوترونات  $N(H)$  عند D. ونتوقع أن يزداد رتيباً مع  $H$ .

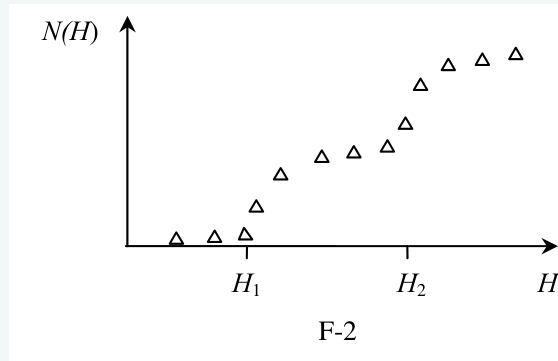
3. (2.5) احسب معدل النفاذ الكلاسيكي  $N_c(H)$  بافتراض أن النيوترونات تصل إلى التجويف بسرعة رأسية  $v_z$  وعند ارتفاع  $z$ ، وأن جميع قيم  $v_z$  و  $z$  متساوية الاحتمال. أعط الإجابة بدلالة  $\rho$ ، وهو العدد الثابت للنيوترونات، لكل وحدة زمن ولكل وحدة سرعة رأسية ولكل وحدة ارتفاع، التي تدخل التجويف بسرعة رأسية  $v_z$  وعند ارتفاع  $z$ .

<sup>1</sup> V. V. Nesvizhevsky وآخرون. «الحالات الكمومية للنيوترونات في مجال جاذبية الأرض». Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

تختلف النتائج التجريبية التي حصلت عليها مجموعة غرونوبل عن التنبؤات الكلاسيكية السابقة، إذ تُظهر بدلاً من ذلك أن قيمة  $N(H)$  تشهد زيادات حادة عندما تتجاوز  $H$  بعض الارتفاعات الحرجة  $H_1, H_2, \dots$  (يعرض الشكل F-2 رسماً تخطيطياً لذلك). وبعبارة أخرى، أظهرت التجربة أن الحركة الرأسية للنيوترونات المرتدة عن المرآة مكّمة. وبلغت بور وسومرفلد التي استخدمها للحصول على مستويات طاقة ذرة الهيدروجين، يمكن كتابة ذلك كما يأتي: «الفعل  $S$  لهذه النيوترونات في الاتجاه الرأسي يساوي مضاعفاً صحيحاً لثابت بلانك للفعل  $h$ ». وهنا يُعطى  $S$  بالعلاقة

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{قاعدة بور-سومرفلد للتكميم})$$

حيث  $p_z$  هو المركبة الرأسية للزخم الكلاسيكي، ويشمل التكامل دورة ارتداد كاملة. ولا يُسمح في التجويف إلا بالنيوترونات التي لها هذه القيم من  $S$ .



4. (2.5) احسب ارتفاعات انقلاب الحركة  $H_n$  ومستويات الطاقة  $E_n$  (المرتبطة بالحركة الرأسية) باستخدام شرط بور-سومرفلد للتكميم. أعط النتيجة العددية لـ  $H_1$  بوحدة  $\mu\text{m}$  ولـ  $E_1$  بوحدة eV.

يتحول التوزيع الابتدائي المنتظم  $\rho$  للنيوترونات عند المدخل، أثناء انتقالها عبر تجويف طويل، إلى التوزيع المتدرج الذي يُرصد عند D (انظر الشكل F-2). من الآن فصاعداً، ندرس للتبسيط حالة تجويف طويل يحقق  $H < H_2$ . وفق الميكانيكا الكلاسيكية، كان يُسمح لجميع النيوترونات ذات الطاقات الواقعة ضمن النطاق المدروس في السؤال 1 بالمرور عبره، بينما لا يُسمح وفق ميكانيكا الكم إلا

بالنيوترونات في مستوى الطاقة  $E_1$ . وبحسب مبدأ هايزنبرغ لعدم اليقين بين الزمن والطاقة، تتطلب إعادة التوزيع هذه زمن عبور أدنى. وسيكون عدم اليقين في طاقة الحركة الرأسية ملحوظاً إذا كان طول التجويف صغيراً. وتؤدي هذه الظاهرة إلى اتساع مستويات الطاقة.

5. (2.0) قدر زمن العبور الأدنى  $t_q$  والطول الأدنى  $L_q$  للتجويف اللازمين لرصد أول زيادة حادة في عدد النيوترونات عند D. استخدم  $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

المعطيات:

| الكمية                   | القيمة                                 |
|--------------------------|----------------------------------------|
| ثابت بلانك للفعل         | $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  |
| سرعة الضوء في الفراغ     | $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ |
| الشحنة الأولية           | $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$    |
| كتلة النيوترون           | $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$   |
| تسارع الجاذبية على الأرض | $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$            |

استخدم، عند الحاجة، العلاقة:

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

1. عندما يكون  $0 \leq z < H$ ، تحقق السرعات النافذة

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}.$$

تصل النيوترونات ذات سرعتي طرفي النطاق إلى الماص، ولذلك تُستبعد هاتان القيمتان.

2. الطول الأدنى الكلاسيكي للتجويف هو

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.39 \text{ cm}.$$

3. معدل النفاذ الكلاسيكي هو

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

4. باستخدام قاعدة التكميم الواردة في المسألة بحذافيرها،

$$H_n = \left( \frac{9n^2 h^2}{32M^2 g} \right)^{1/3} = H_1 n^{2/3},$$

$$E_n = MgH_n = \left( \frac{9n^2 h^2 Mg^2}{32} \right)^{1/3} = E_1 n^{2/3}.$$

عدياً،

$$H_1 = 16.5 \mu\text{m}, \quad E_1 = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

5. باستخدام  $\Delta E t_q \gtrsim \hbar/2$  ومقياس التمييز  $\Delta E \sim E_1$ ، تكون التقديرات عند حد عدم اليقين

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

يتطلب تمييز درجة حادة زمن عبور أطول. وإذا كُتب التقدير التقريبي لعدم اليقين بدلاً من ذلك على الصورة  $\Delta E t_q \sim h$ ، فإن التقديرات المقابلة تكون

$$t_q \sim 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

لا يتحدد المعامل العددي من دون معيار كمي لحدة الدرجة.

## الحل

### 1. النطاق الكلاسيكي للسرعات الرأسية النافذة

الحركة الأفقية منتظمة ولا تؤثر في طاقة الحركة الرأسية. وبين الانعكاسات، يعطي حفظ الطاقة الميكانيكية

$$E_z = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz.$$

يعكس الانعكاس المرن عند المرآة إشارة  $v_z$  من دون تغيير  $E_z$ . وعند نقطة انقلاب الحركة العليا  $z_t$ ، تنعدم السرعة الرأسية، ومن ثم

$$Mgz_t = \frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz,$$

وبالتالي

$$z_t = z + \frac{v_z^2}{2g}.$$

في تجويف طويل بما يكفي، يُمتص كل نيوترون يصل مساره إلى  $z = H$ . لذلك يتطلب النفاذ أن يكون  $z_t < H$ ، أي

$$v_z^2 < 2g(H - z).$$

إذن

$$-\sqrt{2g(H - z)} < v_z < \sqrt{2g(H - z)}, \quad 0 \leq z < H.$$

ترد كلتا الإشارتين: فالنيوترون الذي يتحرك في البداية إلى أسفل ينعكس أولاً عن المرآة، ثم يصعد إلى ارتفاع انقلاب الحركة نفسه. وتُستبعد المساواة لأن المسألة تنص على أن كل نيوترون يصل إلى الماص يُمتص.

### 2. الطول الأدنى الكلاسيكي للتجويف

يجب أن نجد أطول زمن ممكن قبل أن يصل نيوترون خارج هذا النطاق إلى الماص.

نكتب طاقته الرأسية المحفوظة على الصورة  $E_z = Mga$ ، حيث  $a \geq H$  هو ارتفاع انقلاب حركته لو لم يكن الماص موجوداً. ويكون مقدار سرعته الرأسية عند الارتفاع  $z$  هو

$$|v_z(z)| = \sqrt{2g(a-z)}.$$

الزمن اللازم للصعود من المرآة إلى الماص هو

$$\begin{aligned}\tau(a) &= \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{2g(a-z)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \sqrt{a} - \sqrt{a-H} \right).\end{aligned}$$

يتناقص هذا الزمن مع ازدياد  $a$ ، وتكون قيمته العظمى

$$\tau(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

يصل النيوترون الذي يتحرك في البداية إلى أعلى إلى الماص خلال مدة لا تتجاوز زمن رحلة صعود واحدة كهذه. أما النيوترون الذي يتحرك في البداية إلى أسفل، فقد يهبط أولاً إلى المرآة ثم يصعد إلى الماص. ويكون زمنه الكلي على الأكثر  $2\tau(a)$ .

يبدأ أطول مسار في الحالة الحدية من موضع أسفل الماص مباشرة، بحركة بطيئة جداً إلى أسفل، وبطاقة تكفي بالكاد للعودة إلى الارتفاع  $H$ . ومن ثم فإن أصغر حد علوي لزمن الامتصاص هو

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

بما أن زمن العبور الأفقي هو  $L/v_x$ ، تُزال جميع هذه النيوترونات عندما يكون  $L/v_x \geq t_c$ . وأي طول أصغر يسمح لبعض المسارات القريبة بما يكفي من المسار الحدي بالإفلات من الامتصاص. لذلك

$$L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

عددياً،

$$t_c = 2\sqrt{\frac{2(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}}} = 6.39 \times 10^{-3} \text{ s},$$

ومن ثم

$$L_c = (10 \text{ m s}^{-1})t_c = 6.39 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

### 3. معدل النفاذ الكلاسيكي

بحسب التعريف، يكون معدل ورود النيوترونات في العنصر  $dz dv_z$  هو

$$dN = \rho dz dv_z.$$

في تجويف طويل، لا يسهم إلا نطاق السرعات الذي وُجد في الجزء 1. وبالتكامل على هذا النطاق وعلى جميع ارتفاعات الدخول،

$$N_c(H) = \rho \int_0^H \int_{-\sqrt{2g(H-z)}}^{+\sqrt{2g(H-z)}} dv_z dz.$$

إن

$$\begin{aligned}
 N_c(H) &= 2\rho\sqrt{2g} \int_0^H (H-z)^{1/2} dz \\
 &= 2\rho\sqrt{2g} \frac{2}{3} H^{3/2}.
 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{3/2}.$$

يتنبأ هذا بمنحنى أملس متزايد يبدأ عند  $N_c(0) = 0$ ، ولا يتضمن درجات.

#### 4. ارتفاعات انقلاب الحركة والطاقات المكمّاة

لنيوترون يبلغ ارتفاع انقلاب حركته الرأسية  $H_n$ ،

$$E_n = MgH_n.$$

يكون الزخم الرأسى في الجزء الصاعد من مساره

$$p_z(z) = \sqrt{2M(E_n - Mgz)} = M\sqrt{2g(H_n - z)}.$$

أثناء الهبوط، تكون كل من  $p_z$  و  $dz$  سالبة، لذا تساوي مساهمة الهبوط في الفعل مساهمة الصعود. ولا يضيف الانعكاس اللحظى عند المرآة أي إزاحة. وبالتالي، يكون الفعل خلال دورة ارتداد كاملة واحدة

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{H_n} M\sqrt{2g(H_n - z)} dz \\
 &= \frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2}.
 \end{aligned}$$

بتطبيق قاعدة بور-سومرفلد المعطاة  $S = nh$ ،

$$\frac{4}{3} M\sqrt{2g} H_n^{3/2} = nh.$$

وبالحل،

$$H_n = \left( \frac{3nh}{4M\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left( \frac{9n^2h^2}{32M^2g} \right)^{1/3}.$$

يعطي الضرب في  $Mg$

$$E_n = \left( \frac{9n^2h^2Mg^2}{32} \right)^{1/3}.$$

تتناسب كلتا الكميتين مع  $n^{2/3}$ .

عند  $n = 1$ ،

$$H_1 = \left[ \frac{3(6.63 \times 10^{-34})}{4(1.67 \times 10^{-27})\sqrt{2(9.81)}} \right]^{2/3} = 1.653 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

وبالتالي

$$H_1 = 16.5 \text{ } \mu\text{m}.$$

الطاقة المقابلة هي

$$E_1 = MgH_1 = 2.708 \times 10^{-31} \text{ J}.$$

وباستخدام  $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$

$$E_1 = \frac{2.708 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.69 \times 10^{-12} \text{ eV}.$$

##### 5. زمن العبور الكمومي الأدنى والطول الأدنى للتجويف

تحدث البداية الأولى للنفاذ قرب  $MgH = E_1$ . وإذا كان عرض الطاقة للمستوى الأول مقارباً لـ  $E_1$ ، فإن هذه البداية تصبح مطموسة بدرجة كبيرة. ولذلك فإن مقياس الطاقة المناسب لتقدير أولي للقدرة على التمييز هو

$$\Delta E \sim E_1.$$

باستخدام تقدير عدم اليقين بين الزمن والطاقة على الصورة

$$\Delta E t_q \gtrsim \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi},$$

يكون المقياس اللازم لزمن العبور

$$t_q \gtrsim \frac{h}{4\pi E_1}.$$

بالتعويض عن الطاقة بوحدة الجول،

$$t_q \gtrsim \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4\pi(2.708 \times 10^{-31})} = 1.95 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

تعطي الحركة الأفقية عندئذ

$$L_q = v_x t_q \gtrsim (10)(1.95 \times 10^{-4}) = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

تحدد هذه القيم حداً لعدم اليقين، ولا تضمن حدة تجريبية بعينها. ولصياغة هذا التمييز كمياً، لنفترض أن عرض الطاقة المسموح به هو  $\Delta E = \epsilon E_1$ . وبما أن  $E = MgH$ ، فإن ذلك يقابل أيضاً عرضاً نسبياً في الارتفاع  $\epsilon = \Delta H/H_1$ . تصبح التقديرات

$$t_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-4}}{\epsilon} \text{ s}, \quad L_q \gtrsim \frac{1.95 \times 10^{-3}}{\epsilon} \text{ m}.$$

تتطلب درجة حادة، حيث  $\epsilon \ll 1$ ، أزمنة وأطوالاً أكبر بكثير من الحد الأساسي.

أما في معالجة تقديرية لرتبة المقدار باستخدام  $\Delta E t_q \sim h$ ، فتُعطي بدلاً من ذلك القيم

$$t_q \sim \frac{h}{E_1} = 2.45 \times 10^{-3} \text{ s}, \quad L_q \sim 2.45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.45 \text{ cm}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.