

IPhO 2004

理论题与解答 · 韩国浦项 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2004/

题目 1: “乒乓”电阻器

一个电容器由两块半径均为 R 的圆形平行极板组成，两板间距为 d ，其中 $d \ll R$ ，如图 1.1(a) 所示。上极板连接到一个恒定电压源，电势为 V ，下极板接地。然后，将一个质量为 m 、半径为 r ($\ll R, d$)、厚度为 t ($\ll r$) 的薄小圆盘放在下极板的中央，如图 1.1(b) 所示。

假设两极板之间为真空，介电常数为 ϵ_0 ；极板和圆盘均由理想导体制成；所有静电边缘效应均可忽略。整个电路的电感和相对论效应都可以忽略不计。镜像电荷效应也可以忽略。

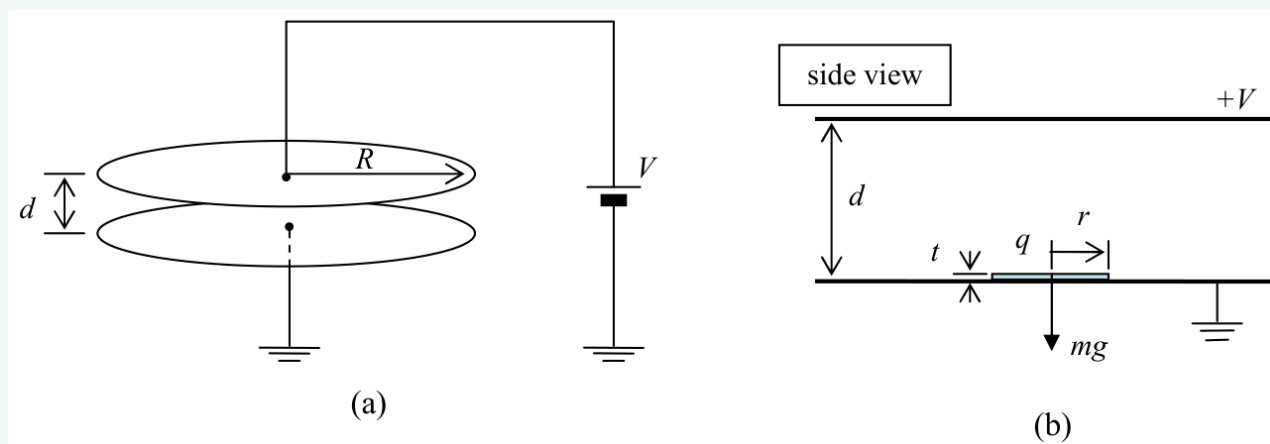


图 1.1 示意图：(a) 连接到恒定电压源的平行板电容器；(b) 电容器内部放入一个小圆盘后，平行极板的侧视图。（详见正文。）

(a) [1.2 分] 在尚未将圆盘放入两板之间时，如图 1.1(a) 所示，计算间距为 d 的两极板之间的静电力 F_p 。

(b) [0.8 分] 当圆盘放在下极板上时，图 1.1(b) 中圆盘上的电荷量 q 与电压 V 的关系为 $q = \chi V$ 。用 r 、 d 和 ϵ_0 表示 χ 。

(c) [0.5 分] 两平行极板与均匀重力场 g 垂直。要使最初静止的圆盘升起，必须将外加电压增大到超过阈值电压 V_{th} 。用 m 、 g 、 d 和 χ 表示 V_{th} 。

(d) [2.3 分] 当 $V > V_{th}$ 时，圆盘在两极板之间上下运动。（假设圆盘仅沿竖直方向运动，不发生任何晃动。）圆盘与极板之间的碰撞为非弹性碰撞，恢复系数为 $\eta \equiv (v_{after}/v_{before})$ ，其中 v_{before} 和 v_{after} 分别为圆盘碰撞前瞬间和碰撞后瞬间的速率。两极板固定不动。圆盘与下极板碰撞后瞬间的速率趋于“稳态速率” v_s ，它与 V 的关系如下：

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

用 m 、 g 、 χ 、 d 和 η 表示系数 α 和 β 。假设圆盘的整个表面均匀且同时接触极板，从而每次碰撞时都瞬间完成全部电荷交换。

(e) [2.2 分] 达到稳态后, 当 $qV \gg mgd$ 时, 通过电容器极板的时间平均电流 I 可近似表示为 $I = \gamma V^2$ 。用 m 、 χ 、 d 和 η 表示系数 γ 。

(f) [3 分] 当外加电压 V (极其缓慢地) 减小时, 存在一个临界电压 V_c , 低于该电压时电荷将停止流动。用 m 、 g 、 χ 、 d 和 η 表示 V_c 及相应的电流 I_c 。将 V_c 与 (c) 中讨论的起升阈值电压 V_{th} 比较, 画出 V 在 $V = 0$ 到 $3V_{th}$ 范围内增大和减小时的 $I - V$ 特性示意图。

题目译自官方英文原文。

答案

这里 $q = \chi V$ 表示圆盘电荷量的大小, 这与 (e) 中的 $qV \gg mgd$ 一致。圆盘与下极板接触后的带符号电荷量为 $-q$, 与上极板接触后则为 $+q$ 。以下往返运动的结果均假定 $0 < \eta < 1$ 。

- (a) 该力为吸引力, 大小为

$$F_p = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

- (b)

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

- (c)

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

- (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

- (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

- (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

增大 V 时, 电流始终为零, 直到 V_{th} , 随后跃迁至导电支路。减小 V 时, 电流沿该支路下降至 (V_c, I_c) , 随后降为零。在高电压下, 该支路趋近于 $I = \gamma V^2$ 。

碰撞后完全不反弹的端点 $\eta = 0$ 是一个奇异情形: 在每次与下极板碰撞后应用接触条件, 得到

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

其中电流为从导电一侧趋近时的极限值，且不存在滞回。当 $\eta = 1$ 时，不存在有限的稳态。

解答

在整个解答中，均忽略圆盘相对于 d 的厚度，并采用题目给出的关于边缘效应和镜像电荷的近似。外加电场的大小为

$$E = \frac{V}{d}$$

当 $V > 0$ 时，其方向向下。

(a)

电容器任一极板上的面电荷密度的大小为

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

计算极板所受的力时，必须排除其自身电场。另一块极板产生的电场为 $E/2$ ，因此静电力为

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

乘以极板面积，得

$$F_p = p\pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

带异种电荷的两极板相互吸引。

(b)

圆盘静置于下极板上时，构成该导体的一部分。其暴露的上表面带有面电荷密度 $-\varepsilon_0 E$ 。因此，其电荷量的大小为

$$q = \varepsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

于是，

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

如果将 q 解释为圆盘与下极板接触时的带符号电荷量，其系数就应为负；后文将 qV 用作正的电场力做功，由此确定这里采用电荷量大小的约定。

(c)

圆盘静止在下极板上时，是极板表面的一部分。因此，它受到的向上电场力等于 (a) 中求得的压力乘以圆盘面积：

$$F_{\text{contact}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

若向上的支持力为 N ，则平衡条件为

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

当维持平衡所需的支持力降至零时，圆盘便可能离开极板。因此

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

得到

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

这里的因子 $1/2$ 至关重要。一旦圆盘离开极板运动，按题意忽略镜像力后，它在均匀外加电场中所受的合电场力为 qE 。因此，接触时和飞行时的电场力必须分别处理。

(d)

将飞行过程中电场力产生的加速度大小定义为

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

圆盘离开下极板后带电 $-q$ ，因此其向上的加速度为 $a_e - g$ 。接触上极板后，其电荷量变为 $+q$ ，因此其向下的加速度为 $a_e + g$ 。

设 v_n 为圆盘第 n 次与下极板碰撞后瞬间向上的速率。设 u_n 为随后与上极板碰撞前瞬间的速率， w_n 为下一次与下极板碰撞前瞬间的速率。

对向上飞行过程应用动能定理，得

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

与上极板碰撞使速率减小为 ηu_n 。因此，向下飞行过程给出

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

最后，与下极板碰撞给出 $v_{n+1} = \eta w_n$ 。联立这些关系，得

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

对于 $0 < \eta < 1$ ， v_n^2 相对于其不动点的偏差在每个周期后都缩小为原来的 η^4 倍。稳态时，

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

因此

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

与式 (1.1) 比较，得

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

(e)

在一个完整周期内，圆盘在上极板处的电荷量由 $-q$ 变为 $+q$ ，在下极板处由 $+q$ 变为 $-q$ 。因此，每个完整周期通过电源的电荷量为 $2q$ 。若周期为 T ，则

$$I = \frac{2q}{T}.$$

当 $qV \gg mgd$ 时，有 $a_e \gg g$ ，因此可忽略重力。此时两次飞行的时间均为 τ ，且 $T = 2\tau$ 。

设 w 为任一次碰撞前瞬间的速率。碰撞后瞬间的速率为 ηw 。在每次飞行过程中,

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

由于加速度恒定, 一次飞行过程中的平均速率为 $(1 + \eta)w/2$ 。因此

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

且

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

对于 $V \geq 0$,

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}} V^2.$$

所以

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}}}.$$

(f)

(e) 中的高电压近似不能用于确定电流停止的条件。必须保留重力。

设 u 和 w 分别表示稳态下与上、下极板碰撞前瞬间的速率。由 (d), $v_s = \eta w$, 且

$$w^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} + \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

利用向上飞行的能量方程,

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

得到

$$u^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} - \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

随着电压减小, 极限的周期运动轨迹是恰好以零速率到达上极板的轨迹。令 $u = 0$, 得

$$a_{e,c} = g \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}.$$

由于 $a_e = \chi V^2/(md)$,

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}}}.$$

低于这一电压时, 圆盘无法维持能够到达上极板的飞行。一旦它未能到达上极板, 其电荷便不再反号, 随后与下极板的连续碰撞会耗散其剩余的机械能。

在临界电压下,

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

向上飞行的初速率为 ηw_c ，末速率为零；向下飞行的初速率为零，末速率为 w_c 。利用平均速率，得

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

因此，停止导电前瞬间的电流为

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

代入 V_c ，得

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

对于每个固定的 $0 < \eta < 1$ ，该电流均为正，因此停止导电时会出现有限幅度的向下跃变。

为了准确说明示意图，可以在不忽略重力的情况下写出完整的导电支路。两次飞行的时间为

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

因此

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

其中 $u(V)$ 和 $w(V)$ 已在上文给出。当向上飞行是减速运动时，这些表达式仍然成立。

与 (c) 比较，得

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} < 1.$$

因此，所要求的示意图具有以下特征：

- **电压增大：** 从原点沿 $I = 0$ 前进至 V_{th} 。在刚超过 V_{th} 时，圆盘升起，稳态电流跃变至 $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$ 。随后沿导电支路继续上升，直至 $3V_{\text{th}}$ 。
- **电压减小：** 沿导电支路原路返回，经过 V_{th} ，继续到达 (V_c, I_c) 。在刚低于 V_c 时，电流降至 $I = 0$ ，然后沿电压轴返回原点。
- **高电压下的形状：** 导电支路趋近于抛物线 $I = \gamma V^2$ 。在 $3V_{\text{th}}$ 处， $qV = 18mgd$ ，因此，示意图终点的一个合适近似值为 $I \approx 9\gamma V_{\text{th}}^2$ 。

等价地，在跃变点之外：

电压范围	V 增大	V 减小
$0 \leq V < V_c$	0	0
$V_c < V < V_{\text{th}}$	0	$I_{\text{on}}(V)$
$V_{\text{th}} < V \leq 3V_{\text{th}}$	$I_{\text{on}}(V)$	$I_{\text{on}}(V)$

区间 $V_c < V < V_{th}$ 为滞回区间：静止的圆盘保持静止，而已经运动的圆盘则继续往返运动。

为完整起见，恰好 $\eta = 0$ 的情形需要单独处理。每次与下极板碰撞后，圆盘都会静止，因此必须重新满足 (c) 中的接触起升条件。所以，电流在 V_{th} 处停止，而不是在正 η 情形的临界电压公式的极限值处停止。从导电一侧趋近时，当 $V \rightarrow V_{th}^+$ ，有 $a_e \rightarrow 2g$ ，且

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

所以

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

此时两个切换电压相同，因此不存在滞回。在另一个端点 $\eta = 1$ 处，碰撞不耗散能量，而电场在每个周期内提供 $2qV$ 的能量；因此不可能存在有限的稳态速率。

解答已与官方解答核对。

题目 2：上升的气球

一个充满氦气的橡胶气球升向高空，那里的气压和温度随高度增加而降低。在以下各问中，假设无论载荷如何，气球始终保持球形，并忽略载荷的体积。还假设气球内氦气的温度始终与周围空气的温度相同，并将所有气体视为理想气体。普适气体常量为 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ，氦气和空气的摩尔质量分别为 $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 和 $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 。重力加速度为 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

[部分 A]

(a) [1.5 分] 设周围空气的压强为 P ，温度为 T 。由于气球的表面张力，气球内部的压强高于外部压强。气球内装有 n 摩尔氦气，内部压强为 $P + \Delta P$ 。求气球所受浮力 F_B 关于 P 和 ΔP 的表达式。

(b) [2 分] 在韩国某个夏日，测得海拔高度 z 处的空气温度 T 在 $0 < z < 15 \text{ km}$ 范围内满足 $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ ，其中 $z_0 = 49 \text{ km}$ ， $T_0 = 303 \text{ K}$ 。海平面处的压强和密度分别为 $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 和 $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ 。在这一高度范围内，压强具有如下形式：

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

用 z_0 、 ρ_0 、 P_0 和 g 表示 η ，并求其数值，保留两位有效数字。将重力加速度视为与高度无关的常量。

[部分 B]

当一个未拉伸时半径为 r_0 的球形橡胶气球被充气至半径为 r ($\geq r_0$) 的球体时，气球表面因拉伸而具有额外的弹性势能。在一种简化理论中，恒定温度 T 下的弹性势能可表示为

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa R T \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

其中 $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) 为尺寸膨胀比， κ 为常量，单位为 mol/m^2 。

(c) [2 分] 用式 (2.2) 中给出的参数表示 ΔP ，并画出 ΔP 随 $\lambda = r/r_0$ 变化的示意图。

(d) [1.5 分] 常量 κ 可由气球充气所需的气体量确定。在 $T_0 = 303 \text{ K}$ 、 $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时，一个未拉伸的气球 ($\lambda = 1$) 内装有 $n_0 = 12.5$ 摩尔氦气。在相同的 T_0 和 P_0 下，将气球充气至 $\lambda = 1.5$ 共需 $n = 3.6n_0 = 45$ 摩尔氦气。气球参数 a 定义为 $a = \kappa/\kappa_0$ ，其中 $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$ 。用 n 、 n_0 和 λ 表示 a 。计算 a 的值，保留两位有效数字。

[部分 C]

在海平面处按照 (d) 中的方法准备一个气球 (在 $T_0 = 303 \text{ K}$ 、 $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下充入 $n = 3.6n_0 = 45$ 摩尔氦气，使其膨胀至 $\lambda = 1.5$)。包括气体、气球本身及其他载荷在内的总质量为 $M_T = 1.12 \text{ kg}$ 。现在让气球从海平面开始上升。

(e) [3 分] 假设气球最终停在高度 z_f 处，此处的浮力与总重力平衡。求 z_f 以及该高度处的膨胀比 λ_f 。答案保留两位有效数字。假设上升过程中不存在漂移效应，也没有气体泄漏。

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 向上的浮力为

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

- (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

- (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

曲线从 (1, 0) 出发，在 $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ 处达到唯一的极大值，随后从正值一侧趋近于零。

- (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

- (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

未按所要求的有效数字舍入的结果为 $z_f = 11.095 \text{ km}$ 和 $\lambda_f = 2.14594$ ；若改用舍入后的 $\eta = 5.5$ 和 $a = 0.11$ ，保留两位有效数字的答案不变。

解答

(a)

根据阿基米德原理，浮力等于所排开空气的重力。将气球所占空间内的周围空气密度视为均匀，有

$$F_B = \rho_A V g.$$

由周围空气和氦气的理想气体状态方程可得

$$\rho_A = \frac{PM_A}{RT}, \quad V = \frac{nRT}{P + \Delta P}.$$

因此，两者共同的温度约去，得到

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

这仅是浮力。氦气、球皮和载荷的重力需在总受力平衡中另行计入。

(b)

大气处于流体静力平衡：

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

对于组分不变的理想空气，

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

利用给定的温度和压强随高度的分布，得到

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

对式 (2.1) 求导，并代入流体静力平衡方程，得到

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

因此，

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}.$$

代入数值得

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517\dots,$$

所以，保留两位有效数字，

$$\eta = 5.5.$$

(c)

在恒温的准静态膨胀过程中，内部超压所做的功用于增加模型中的弹性势能：

$$\Delta P dV = dU.$$

气球的体积为

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

由式 (2.2)，

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa RT (\lambda - \lambda^{-5}).$$

于是

$$\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV / d\lambda} = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

为明确示意图的形状，定义压强尺度

$$C = \frac{4\kappa RT}{r_0}.$$

则

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C\lambda^{-8}(7 - \lambda^6).$$

曲线具有以下特征：

- 其物理定义域为 $\lambda \geq 1$ ，并从 $\lambda = 1$ 时的 $\Delta P = 0$ 处出发。
- 曲线以正斜率上升，直至

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309\dots$$

- 其最大值为

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- 越过最大值后，曲线单调下降，并保持为正。在膨胀比很大时，

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \longrightarrow 0^+,$$

因而横轴是其渐近线。

(d)

令

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

在 $\lambda = 1$ 时，由 (c) 可知 $\Delta P = 0$ 。因此，未拉伸的气球满足

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

由于

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

温度为 T_0 时的超压为

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

充气膨胀后的气球满足

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

除以 $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ ，得

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

因此，

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

代入数值得

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624\dots,$$

从而

$$a = 0.11.$$

(e)

定义无量纲温度

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

则

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

由于没有氦气逸出, n 保持不变。氦气的理想气体状态方程为

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

利用 $P_0 V_0 = n_0 R T_0$, 并除以 t , 得到

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

由空气的理想气体密度表达式可得排开空气的质量:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{RT} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

在最终高度处, 浮力与总重力平衡:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

所以

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

氦气的重力已经包含在 $M_T g$ 中。

在式 (1) 和式 (2) 之间消去与大气有关的因子, 得到仅含最终膨胀比的方程:

$$a (\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

保留未经舍入的中间数值,

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346\dots,$$

因此

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346\dots}{0.109624\dots} = 4.557886\dots$$

左侧在 $\lambda_f \geq 1$ 时严格递增, 因为其导数为 $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$ 。因此, 存在唯一的物理解:

$$\lambda_f = 2.145936 \dots$$

由式 (2) 可得

$$t_f = \left(\frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

因此,

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

保留两位有效数字,

$$\boxed{\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}}.$$

最终高度位于题目给定的大气高度范围内。气球初始时的净升力也为正：在海平面处，它所排开空气的质量为

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：原子探针显微镜

原子探针显微镜 (APM) 是纳米科学领域的有力工具。如图 3.1 所示，可利用光电探测器监测反射激光束，从而检测 APM 中悬臂梁的运动。悬臂梁只能沿竖直方向运动，其位移 z 随时间 t 的变化可由下式描述：

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

其中， m 为悬臂梁的质量， $k = m\omega_0^2$ 为悬臂梁的劲度系数， b 为较小的阻尼系数，满足 $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ ，而 F 为压电管施加的外驱动力。

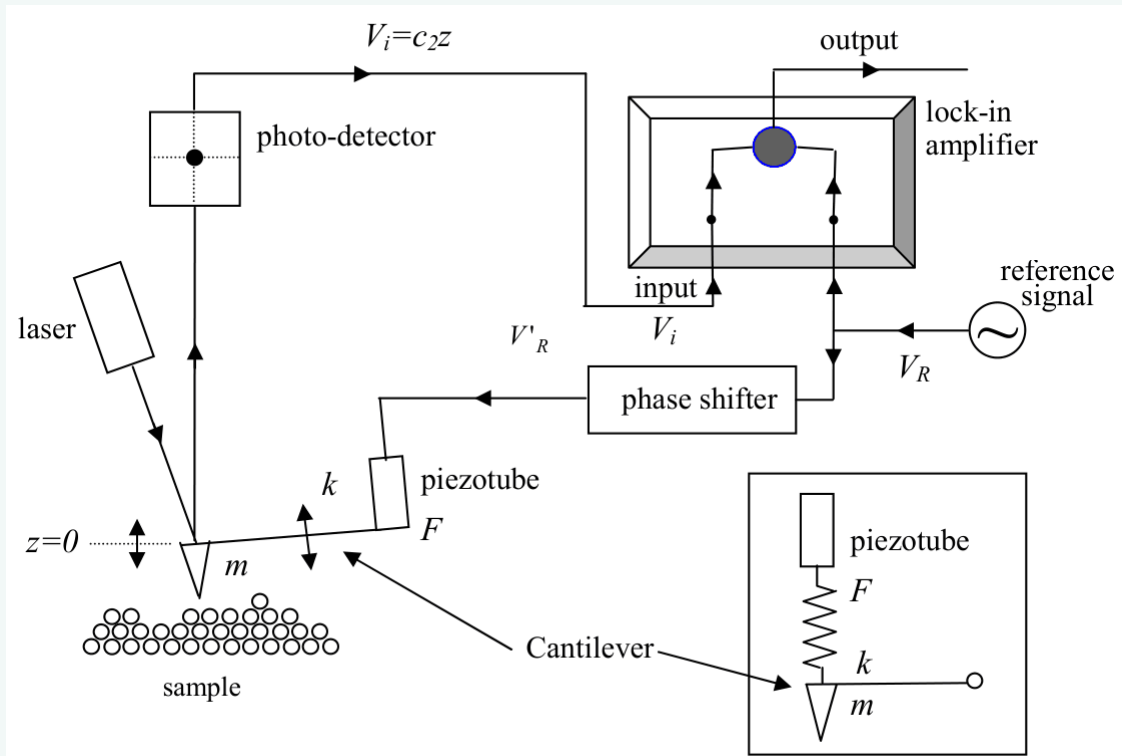


图 3.1 扫描探针显微镜 (SPM) 示意图。右下角的插图描述压电管与悬臂梁之间耦合的简化力学模型。

[部分 A]

(a) [1.5 分] 当 $F = F_0 \sin \omega t$ 时, 满足式 (3.1) 的 $z(t)$ 可写为 $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$, 其中 $A > 0$, 且 $0 \leq \phi \leq \pi$ 。求振幅 A 和 $\tan \phi$ 用 F_0 、 m 、 ω 、 ω_0 和 b 表示的表达式。求共振频率 $\omega = \omega_0$ 处的 A 和相位 ϕ 。

(b) [1 分] 图 3.1 所示的锁相放大器将输入信号与锁相参考信号 $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ 相乘, 然后仅让乘积信号中的直流分量通过。假设输入信号为 $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ 。这里, V_{R0} 、 V_{i0} 、 ω_i 和 ϕ_i 均为给定的正常数。求使输出信号非零时 ω (> 0) 应满足的条件。在此频率下, 非零的直流输出信号的大小如何表示?

(c) [1.5 分] 锁相参考电压 $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ 通过移相器后变为 $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ 。将 V'_R 施加于压电管, 便以力 $F = c_1 V'_R$ 驱动悬臂梁。随后, 光电探测器将悬臂梁的位移 z 转换为电压 $V_i = c_2 z$ 。这里, c_1 和 c_2 为常数。求 $\omega = \omega_0$ 时直流输出信号大小的表达式。

(d) [2 分] 悬臂梁质量的微小变化 Δm 使共振频率发生偏移 $\Delta \omega_0$ 。因此, 在原共振频率 ω_0 处, 相位 ϕ 发生偏移 $\Delta \phi$ 。求相位偏移 $\Delta \phi = \pi/1800$ 所对应的质量变化 Δm , 这一相位偏移是相位测量的典型分辨率。悬臂梁的物理参数为 $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg、 $k = 1.0$ N/m 和 $(b/m) = 1.0 \times 10^3$ s⁻¹。当 $|x| \ll 1$ 时, 使用近似式 $(1+x)^a \approx 1+ax$ 和 $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ 。

[部分 B]

从现在起, 我们考虑如下情况: 除部分 A 中讨论的驱动力外, 悬臂梁还受到样品施加的一些力, 如图 3.1 所示。

(e) [1.5 分] 假设附加力 $f(h)$ 仅取决于悬臂梁与样品表面之间的距离 h , 则可以找到一个新的平衡位置 h_0 。在 $h = h_0$ 附近, 可写出 $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, 其中 c_3 是与 h 无关的常数。求新的共振频率 ω'_0 用 ω_0 、 m 和 c_3 表示的表达式。

(f) [2.5 分] 通过水平移动样品来扫描其表面时, 带电量为 $Q = 6e$ 的悬臂梁尖端遇到一个电荷为 $q = e$ 的电子, 该电子被俘获在表面下方一定距离处 (局域在空间中)。在电子周围扫描时, 观测到共振频率的最大偏移 $\Delta \omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$ 远小于 ω_0 。用 m 、 q 、 Q 、 ω_0 、 $\Delta \omega_0$ 和库仑常量 k_e 表示发生最大偏移时悬臂梁与被俘获电子之间的距离 d_0 。对于 $\Delta \omega_0 = 20$ s⁻¹, 以 nm 为单位计算 d_0 ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9}$ m)。悬臂梁的物理参数为 $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg 和 $k = 1.0$ N/m。忽略悬臂梁尖端和样品表面中的任何极化效应。注意, $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9$ N·m²/C², 且 $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C。

题目译自官方英文原文。

答案

将按题述相乘规则得到的直流输出记为 $S_{dc} = \langle V_R V_i \rangle$ 。

• (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

在 $\omega = \omega_0$ 时,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

• (b) 非零直流输出要求

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

其大小为

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0}V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

• (c)

$$|S_{dc}| = \frac{|c_1c_2|V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

• (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

给定的正相位偏移对应于质量增加。

• (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

条件是 $m\omega_0^2 - c_3 > 0$ 。

• (f) 频率的最大正向偏移出现在电子的正上方, 且

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m\omega_0 \Delta \omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

解答

我们考虑阻尼暂态衰减后的稳态周期运动。全文均采用题目在弱阻尼条件下的约定, 将共振频率取为 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。

(a)

令 $\theta = \omega t - \phi$ 。将 $z = A \sin \theta$ 代入运动方程, 得到

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

展开右端, 并令 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的系数分别相等, 得

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

将这两个方程平方后相加，得到

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2] = F_0^2.$$

利用 $k = m\omega_0^2$ ，得

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

将系数方程相除，得到

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

相位所在的象限可由系数方程确定：当驱动频率为正时， $\sin \phi > 0$ ，而 $\cos \phi$ 与 $\omega_0^2 - \omega^2$ 同号。因此，频率低于共振频率时，相位滞后小于 $\pi/2$ ；频率高于共振频率时，相位滞后大于 $\pi/2$ 。

在 $\omega = \omega_0$ 时，弹性项与惯性项相互抵消。因此，

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

(b)

利用积化和差公式，

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

理想的直流滤波器仅保留与时间无关的项。由于两个频率都为正，和频项的平均值始终为零。差频项仅在以下条件下为常量：

$$\omega = \omega_i.$$

在此频率下，

$$S_{\text{dc}} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

所以其大小为

$$|S_{\text{dc}}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

频率匹配是必要条件，但并不能保证结果非零：如果 $\phi_i = \pi/2 + n\pi$ ，输入信号与参考信号正交，直流输出为零。因此，非零输出还要求 $\cos \phi_i \neq 0$ 。

(c)

在指定频率下，移相后的参考信号以如下力驱动悬臂梁：

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

悬臂梁的位移比力滞后 $\pi/2$ 。因此，移相器使位移与原参考信号同相：

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

该表达式也可通过直接代入运动方程得到。探测器的电压为

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b \omega_0} \sin \omega_0 t.$$

与原参考信号相乘，得到

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b \omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

由于 $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$,

$$S_{dc} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b \omega_0}, \quad \boxed{|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b \omega_0}}.$$

取绝对值是为了涵盖转换常数可正可负的情况。

(d)

质量变化时，劲度系数保持不变。因此，新的固有频率为

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

对于 $|\Delta m| \ll m$ ，利用题目给出的二项式近似，得到

$$\boxed{\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}}.$$

测量频率仍保持为原来的值 ω_0 。取 b 不变，新的相位满足

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b \omega_0}{k - (m + \Delta m) \omega_0^2}.$$

由于 $k = m \omega_0^2$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0 \Delta m}.$$

应用 $\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$ ，得

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0 \Delta m},$$

于是

$$\boxed{\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi}.$$

由给定参数可得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

因此

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

或者，保留两位有效数字，

$$\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

这里, $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$, 且 $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$, 与两项小变化近似均一致。相应的频率变化约为 -0.87 s^{-1} 。

(e)

取远离样品的方向为位移和样品作用力的正方向。令 z_{eq} 为新的静态位移, 对应的间距为 h_0 。静态受力平衡给出

$$kz_{\text{eq}} = f(h_0).$$

对于相对于这一平衡位置的小位移, 定义

$$x = z - z_{\text{eq}} = h - h_0.$$

计入样品的作用力后, 运动方程为

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

代入线性化的力 $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$, 再减去静态平衡方程, 得

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

因此,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

力的梯度使有效劲度系数变为 $k - c_3$, 而恒定力只会使平衡位置发生偏移。因此

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}.$$

能够在其附近稳定振动的平衡位置要求 $k - c_3 > 0$; 将上述频率解释为共振频率时, 还需保留弱阻尼假设。

(f)

由于 $q = e$ 且 $Q = 6e$,

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

相互作用为斥力。为确定频率偏移在何处最大, 令 ρ 为尖端与电子之间的水平距离, d 为它们之间的竖直距离。由库仑定律, 向上的力分量为

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e qQ d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

悬臂梁的竖直位移使 d 发生同样大小的变化。因此, 相关的力梯度为

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e qQ \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

对于微小的频率偏移, 由 (e) 可得

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

所以

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e qQ}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

在弱相互作用的最低阶近似下，可以将扫描高度视为固定值。该表达式在 $\rho = 0$ 处取得正的最大值：当分子为正时，分子随 ρ 增大而减小，分母则增大；超过 $\rho = \sqrt{2}d$ 后，偏移量为非正值。

因此，最大值出现在电子的正上方，此时尖端与电子之间的距离为 d_0 。在该位置，

$$f_z = \frac{k_e q Q}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e q Q}{d_0^3}.$$

代入 (e) 的结果，得到

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

于是，

$$2\omega_0 \Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

由于 $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ ，忽略偏移量的平方项，得

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

数值上，

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

且

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

因此，

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

得到

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

相对频率偏移为 $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$ ，证实了小偏移近似的有效性。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。