

IPhO 2004

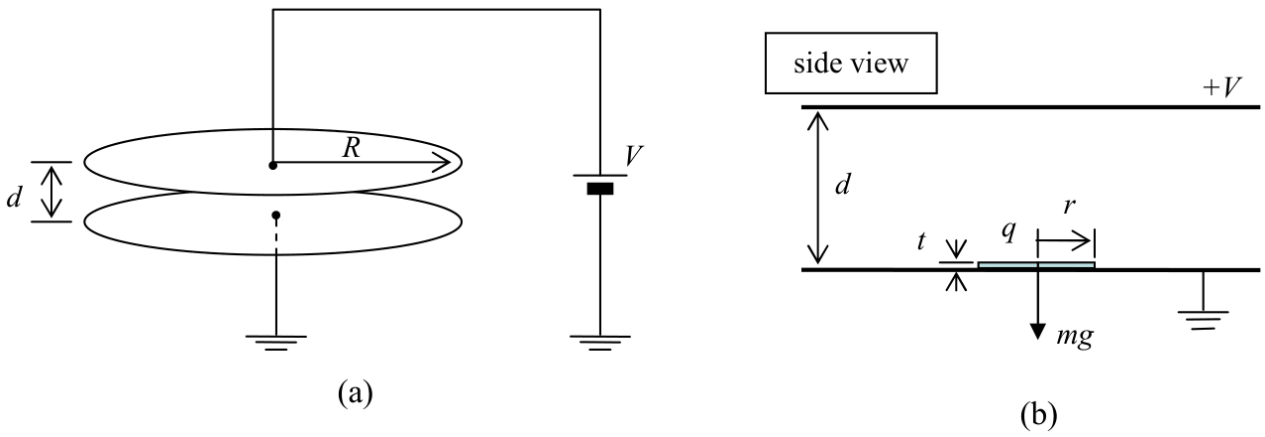
Teorik sorular ve çözümler · Pohang, Kore · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2004/

Soru 1: "Ping-Pong" Direnci

Bir kondansatör, Şekil 1.1(a)'da gösterildiği gibi, her ikisi de R yarıçaplı, aralarında d uzaklığı bulunan iki dairesel paralel levhadan oluşmaktadır; burada $d \ll R$ 'dir. Üst levha, V potansiyelinde *sabit* bir gerilim kaynağına bağlıdır; alt levha ise topraklanmıştır. Daha sonra, Şekil 1.1(b)'de gösterildiği gibi, alt levhanın merkezine kütlesi m , yarıçapı r ($\ll R, d$) ve kalınlığı t ($\ll r$) olan ince ve küçük bir disk yerleştirilir.

Levhalar arasındaki ortamın dielektrik sabiti ϵ_0 olan vakum olduğunu, levhaların ve diskin mükemmel iletkenlerden yapıldığını ve tüm elektrostatik kenar etkilerinin ihmal edilebileceğini varsayalım. Tüm devrenin indüktansı ve görelilik etkileri rahatlıkla göz ardı edilebilir. Görüntü yükü etkisi de ihmal edilebilir.



Şekil 1.1 (a) Sabit bir gerilim kaynağına bağlı paralel levhali bir kondansatörün ve (b) içine küçük bir disk yerleştirilmiş kondansatörün paralel levhalarının yandan görünüşünün şematik çizimleri. (Ayrıntılar için metne bakınız.)

(Ayrıntılar için metne bakınız.)

(a) [1.2 puan] Şekil 1.1(a)'da gösterildiği gibi, disk araya yerleştirilmeden önce aralarında d uzaklığı bulunan levhalar arasındaki elektrostatik kuvveti F_p hesaplayınız.

(b) [0.8 puan] Disk alt levhaya yerleştirildiğinde, Şekil 1.1(b)'deki diskin q yükü ile V gerilimi arasında $q = \chi V$ bağıntısı vardır. χ 'yi r , d ve ϵ_0 cinsinden bulunuz.

(c) [0.5 puan] Paralel levhalar, düzgün bir g kütleçekim alanına diktir. Başlangıçta durmakta olan diski kaldırmak için uygulanan gerilimi bir V_{th} eşik geriliminin üzerine çıkarmamız gerekir. V_{th} 'yi m , g , d ve χ cinsinden elde ediniz.

(d) [2.3 puan] $V > V_{th}$ olduğunda disk, levhalar arasında yukarı-aşağı hareket eder. (Diskin *hiç yalpalamadan* yalnızca düşey doğrultuda hareket ettiğini varsayınız.) Disk ile levhalar arasındaki çarpışmalar esnek değildir ve çarpışmaların geri sekme katsayısı $\eta \equiv (v_{after}/v_{before})$ olarak

tanımlanır; burada v_{before} ve v_{after} , sırasıyla diskin çarpışmadan hemen önceki ve hemen sonraki süratleridir. Levhalar bulundukları konumlarda sabit tutulmaktadır. Diskin alt levhayla çarpışmasından *hemen sonraki* sürati, V 'ye aşağıdaki gibi bağlı olan bir "kararlı durum sürati" v_s 'ye yaklaşır:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

α ve β katsayılarını m, g, χ, d ve η cinsinden elde ediniz. Diskin tüm yüzeyinin levhaya düzgün biçimde ve aynı anda temas ettiğini, böylece her çarpışmada yük alışverişinin tamamının anında gerçekleştiğini varsayınız.

(e) [2.2 puan] Kararlı duruma ulaşıldıktan sonra, $qV \gg mgd$ olduğunda kondansatör levhalarından geçen zaman ortalamalı I akımı yaklaşık olarak $I = \gamma V^2$ ile verilebilir. γ katsayısını m, χ, d ve η cinsinden ifade ediniz.

(f) [3 puan] Uygulanan V gerilimi (son derece yavaş biçimde) azaltıldığında, altına inildiğinde yük akışının duracağı bir V_c kritik gerilimi vardır. V_c 'yi ve buna karşılık gelen I_c akımını m, g, χ, d ve η cinsinden bulunuz. V_c 'yi (c)'de ele alınan kalkış eşiği V_{th} ile karşılaştırarak, V gerilimi $V = 0$ ile $3V_{th}$ aralığında artırılıp azaltıldığında ortaya çıkan $I - V$ karakteristiğinin yaklaşık bir çizimini yapınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada $q = \chi V$, (e)'deki $qV \gg mgd$ koşuluyla tutarlı olarak disk yükünün **büyükliğini** belirtir. Diskin işaretli yükü, alt levhayla temastan sonra $-q$, üst levhayla temastan sonra ise $+q$ 'dur. Aşağıda levhalar arasındaki gidip gelme hareketi için verilen sonuçlarda $0 < \eta < 1$ varsayılmaktadır.

- (a) Kuvvet çekicidir ve büyüklüğü

$$F_p = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

- (b)

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

- (c)

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

- (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

• (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

• (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

V artırılırken akım V_{th} 'ye kadar sıfır kalır, ardından iletim dalına sıçrar. V azaltılırken bu dalı (V_c, I_c) noktasına kadar izler, ardından sıfıra düşer. Yüksek gerilimde bu dal $I = \gamma V^2$ 'ye yaklaşır.

Disk in çarpışma sonrasında tam olarak durduğu $\eta = 0$ uç noktası tekildir: her alt levha çarpışmasından sonra temas koşulu uygulandığında, iletim tarafındaki sınır akımı için

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

elde edilir ve histerezis görülmez. $\eta = 1$ olduğunda sonlu bir kararlı durum yoktur.

Çözüm

Çözüm boyunca diskin kalınlığını d 'ye kıyasla ihmal ediniz ve kenarlar ile görüntü yükleri hakkında belirtilen yaklaşımları kullanınız. Uygulanan alanın büyüklüğü

$$E = \frac{V}{d}$$

olup $V > 0$ için yönü aşağı doğrudur.

(a)

Kondansatör levhalarının her birindeki yüzey yük yoğunluğunun büyüklüğü

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Bir levhaya etki eden kuvvet hesaplanırken levhanın kendi alanı dışarıda bırakılmalıdır. Karşı levhanın oluşturduğu alan $E/2$ olduğundan elektrostatik basınç

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Levhanın alanıyla çarpıldığında

$$F_p = p \pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

Zıt yüklü levhalar birbirini çeker.

(b)

Disk alt levha üzerinde dururken bu iletkenin bir parçasını oluşturur. Açıkta kalan üst yüzündeki yüzey yük yoğunluğu $-\varepsilon_0 E$ 'dir. Dolayısıyla yükün büyüklüğü

$$q = \varepsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

Buna göre,

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

Eğer q , bunun yerine alt levhayla temas sırasındaki işaretli yük olarak yorumlansaydı, katsayısı negatif olurdu; ileride qV 'nin pozitif elektriksel iş olarak kullanılması, burada yükün büyüklüğünün esas alındığını belirler.

(c)

Alt levha üzerinde dururken disk, levha yüzeyinin bir parçasıdır. Bu nedenle diske etki eden yukarı yönlü elektriksel kuvvet, (a)'da bulunan basıncın disk alanıyla çarpımına eşittir:

$$F_{\text{contact}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

Yukarı yönlü normal tepki kuvveti N ise denge koşulu

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

Gerekli normal tepki kuvveti sıfıra ulaştığında kalkış mümkün hâle gelir. Dolayısıyla

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

ve buradan

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

Burada $1/2$ çarpanı zorunludur. Disk levhadan ayrılıp hareket etmeye başladığında, belirtildiği üzere görüntü kuvvetleri ihmal edilirse, düzgün uygulanan alanın diske uyguladığı net kuvvet qE 'dir. Bu nedenle temas sırasındaki kuvvet ile levhalar arasındaki hareket sırasındaki kuvvet ayrı ayrı ele alınmalıdır.

(d)

Levhalar arasındaki hareket sırasında elektriksel ivmenin büyüklüğünü şöyle tanımlayalım:

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

Alt levhadan ayrıldıktan sonra diskin yükü $-q$ olduğundan yukarı yönlü ivmesi $a_e - g$ 'dir. Üst levhaya dokunduktan sonra yükü $+q$ olur; dolayısıyla aşağı yönlü ivmesi $a_e + g$ 'dir.

v_n , alt levhayla n . çarpışmadan hemen sonraki yukarı yönlü sürat olsun. u_n , bunu izleyen üst levha çarpışmasından hemen önceki sürat; w_n ise bir sonraki alt levha çarpışmasından hemen önceki sürat olsun.

Yukarı yönlü hareket için iş-enerji teoremi

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

Üst levhayla çarpışma sürati ηu_n 'ye düşürür. Bu nedenle aşağı yönlü hareket için

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

Son olarak, alt levhayla çarpışma $v_{n+1} = \eta w_n$ verir. Bu bağıntılar birleştirilirse,

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

$0 < \eta < 1$ için v_n^2 'nin sabit noktasından sapmaları her çevrimde η^4 çarpanıyla azalır. Kararlı durumda,

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Böylece

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Denklem (1.1) ile karşılaştırıldığında,

$$\boxed{\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}}.$$

(e)

Tam bir çevrimde diskin yükü üst levhada $-q$ 'dan $+q$ 'ya, alt levhada ise $+q$ 'dan $-q$ 'ya değişir.

Dolayısıyla her tam çevrimde kaynaktan $2q$ yük geçer. Periyot T ise,

$$I = \frac{2q}{T}.$$

$qV \gg mgd$ olduğunda $a_e \gg g$ olur; dolayısıyla kütleçekimi ihmal edilebilir. Bu durumda iki yöndeki hareketin süresi aynı olup τ 'ya eşittir ve $T = 2\tau$ 'dur.

Her iki çarpışmadan da hemen önceki sürat w olsun. Çarpışmadan hemen sonraki sürat ηw 'dir. Levhalar arasındaki her hareket sırasında,

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

İvme sabit olduğundan, levhalar arasındaki bir hareket boyunca ortalama sürat $(1 + \eta)w/2$ 'dir. Bu nedenle

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

ve

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

$V \geq 0$ için,

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}} V^2.$$

Dolayısıyla

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

(f)

Akımın kesilmesini belirlemek için (e)'deki yüksek gerilim yaklaşımı kullanılamaz. Kütleçekimi hesaba katılmalıdır.

u ve w , sırasıyla üst ve alt levha çarpışmalarından hemen önceki kararlı durum süratlerini gösterson.

(d)'den $v_s = \eta w$ ve

$$w^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1-\eta^2} + \frac{g}{1+\eta^2} \right).$$

Yukarı yönlü hareketin enerji denklemini,

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

kullanarak şu sonucu elde ederiz:

$$u^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1-\eta^2} - \frac{g}{1+\eta^2} \right).$$

Gerilim azaltılırken sınırdaki periyodik yörünge, üst levhaya sıfır süratle ancak ulaşan yörüngedir. $u = 0$ alınırsa

$$a_{e,c} = g \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}.$$

$a_e = \chi V^2 / (md)$ olduğundan,

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}}.$$

Bu gerilimin altında disk, üst levhaya ulaşan hareketini sürdüremez. Üst levhaya ulaşamadığı anda yükünün işareti değişmez ve alt levhayla art arda gerçekleşen çarpışmalar kalan mekanik enerjisini sönümler.

Kritik gerilimde,

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

Yukarı yönlü hareket ηw_c süratıyla başlar ve sıfır süratle biter; aşağı yönlü hareket sıfır süratle başlar ve w_c süratıyla biter. Ortalama süratler kullanılırsa,

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

Dolayısıyla kesilmeden hemen önceki akım

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

V_c yerine yazılırsa

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1 + \eta^2} \sqrt{\frac{1 - \eta}{1 + \eta}}.$$

Her sabit $0 < \eta < 1$ için bu akım pozitifdir; dolayısıyla akımın kesilmesi aşağı yönde sonlu bir sıçramaya yol açar.

Çizimi kesin olarak belirlemek için, iletim dalının tamamı kütleçekimi ihmal edilmeden yazılabilir. İki yöndeki hareket süreleri

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

Böylece

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

burada $u(V)$ ve $w(V)$ yukarıda verilmiştir. Bu ifadeler, yukarı yönlü hareket yavaşlayan bir hareket olduğunda da geçerlidir.

(c) ile karşılaştırıldığında

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{2(1 + \eta^2)}} < 1.$$

Dolayısıyla istenen çizim şu özelliklere sahiptir:

- **Gerilim artırılırken:** Orijinden V_{th} 'ye kadar $I = 0$ izlenir. V_{th} 'nin hemen üzerinde disk kalkar ve kararlı akım $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$ 'ye sıçrar. İletim dalı boyunca yukarı doğru $3V_{\text{th}}$ 'ye kadar devam edilir.
- **Gerilim azaltılırken:** İletim dalı geriye doğru izlenerek V_{th} 'den geçilir ve (V_c, I_c) noktasına kadar devam edilir. V_c 'nin hemen altında $I = 0$ 'a düşülür, ardından gerilim eksenini boyunca orijine dönülür.
- **Yüksek gerilimdeki biçim:** İletim dalı $I = \gamma V^2$ parabolüne yaklaşır. $3V_{\text{th}}$ 'de $qV = 18mgd$ olduğundan, yaklaşık çizim için uygun bir yaklaşık uç nokta $I \approx 9\gamma V_{\text{th}}^2$ 'dir.

Eşdeğer olarak, sıçrama noktaları dışında:

Gerilim aralığı	V artırılırken	V azaltılırken
$0 \leq V < V_c$	0	0
$V_c < V < V_{\text{th}}$	0	$I_{\text{on}}(V)$
$V_{\text{th}} < V \leq 3V_{\text{th}}$	$I_{\text{on}}(V)$	$I_{\text{on}}(V)$

$V_c < V < V_{\text{th}}$ aralığı histerezis aralığıdır: durmakta olan bir disk durmaya devam ederken, zaten hareket etmekte olan bir disk gidip gelmeyi sürdürür.

Eksiksiz olması için, **tam olarak** $\eta = 0$ durumu ayrı ele alınmalıdır. Alt levhayla her çarpışma disk durdurduğundan, (c)'deki temas hâinden kalkış koşulu her defasında yeniden sağlanmalıdır. Bu nedenle akım, pozitif η için elde edilen kritik gerilim formülünün limitinde değil, V_{th} 'de durur. İletim tarafında, $V \rightarrow V_{\text{th}}^+$ iken $a_e \rightarrow 2g$ olur ve

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

Dolayısıyla

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

Bu durumda her iki geçiş gerilimi çakışır; dolayısıyla histerezis yoktur. Diğer uç nokta olan $\eta = 1$ 'de çarpışmalarda enerji kaybı olmazken elektrik alanı her çevrimde $2qV$ enerji ekler; sonlu bir kararlı durum sürati var olamaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Yükselen Balon

Helyum gazıyla doldurulmuş kauçuk bir balon, basınç ve sıcaklığın yükseklikle azaldığı gökyüzünde yükselerek çıkar. Aşağıdaki sorularda, taşıdığı yük ne olursa olsun balonun küresel biçimini koruduğunu varsayın ve yükün hacmini ihmal edin. Ayrıca balonun içindeki helyum gazının sıcaklığının her zaman çevredeki havanın sıcaklığıyla aynı olduğunu varsayın ve tüm gazları ideal gaz olarak ele alın. Evrensel gaz sabiti $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, helyumun ve havanın molar kütleleri ise sırasıyla $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ve $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ 'dür. Yer çekimi ivmesi $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 'dir.

[Bölüm A]

(a) [1.5 puan] Çevredeki havanın basıncı P , sıcaklığı T olsun. Balonun yüzey gerilimi nedeniyle içindeki basınç, dışındaki basınçtan daha yüksektir. Balon n mol helyum gazı içermekte olup içindeki basınç $P + \Delta P$ 'dir. Balona etkiyen kaldırma kuvveti F_B 'yi P ve ΔP 'nin bir fonksiyonu olarak bulun.

(b) [2 puan] Kore'de belirli bir yaz gününde, deniz seviyesinden z yüksekliğindeki hava sıcaklığı T 'nin, $0 < z < 15 \text{ km}$ aralığında $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ olduğu belirlenmiştir; burada $z_0 = 49 \text{ km}$ ve $T_0 = 303 \text{ K}$ 'dir. Deniz seviyesindeki basınç ve yoğunluk sırasıyla $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ve $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Bu yükseklik aralığında basınç şu biçimdedir:

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

η 'yı z_0 , ρ_0 , P_0 ve g cinsinden ifade edin ve sayısal değerini iki anlamlı basamakla bulun. Yer çekimi ivmesini yükseklikten bağımsız bir sabit olarak alın.

[Bölüm B]

Gerilmemiş yarıçapı r_0 olan küresel bir kauçuk balon, yarıçapı $r (\geq r_0)$ olan bir küre hâline gelecek şekilde şişirildiğinde, balonun yüzeyinde gerilmeden kaynaklanan ek esneklik enerjisi depolanır. Basitleştirilmiş bir kuramda, sabit T sıcaklığındaki esneklik enerjisi

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa R T \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

ile ifade edilebilir; burada $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) boyutça şişme oranı, κ ise birimi mol/m^2 olan bir sabittir.

(c) [2 puan] ΔP 'yi Denklem (2.2)'de verilen parametreler cinsinden ifade edin ve ΔP 'nin $\lambda = r/r_0$ 'a bağlı grafiğini kabaca çizin.

(d) [1.5 puan] κ sabiti, balonu şişirmek için gereken gaz miktarından belirlenebilir. $T_0 = 303 \text{ K}$ ve $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ koşullarında, gerilmemiş bir balon ($\lambda = 1$), $n_0 = 12.5 \text{ mol}$ helyum içerir. Balonu aynı T_0 ve P_0 koşullarında $\lambda = 1.5$ 'e kadar şişirmek için toplam $n = 3.6n_0 = 45 \text{ mol}$ gerekir. $a = \kappa/\kappa_0$ olarak tanımlanan balon parametresi a 'yı n , n_0 ve λ cinsinden ifade edin; burada $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$ 'dır. a 'nın değerini iki anlamlı basamakla hesaplayın.

[Bölüm C]

Deniz seviyesinde (d)'deki gibi bir balon hazırlanır ($T_0 = 303 \text{ K}$ ve $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ koşullarında $n = 3.6n_0 = 45 \text{ mol}$ helyum gazıyla $\lambda = 1.5$ 'e kadar şişirilir). Gaz, balonun kendisi ve taşıdığı diğer yükler dâhil toplam kütle $M_T = 1.12 \text{ kg}$ 'dır. Şimdi balon deniz seviyesinden yükselmeye bırakılsın.

(e) [3 puan] Balonun sonunda kaldırma kuvvetinin toplam ağırlığı dengelediği z_f yüksekliğinde durduğunu varsayın. z_f 'yi ve bu yükseklikteki şişme oranı λ_f 'yi bulun. Cevapları iki anlamlı basamakla verin. Yukarı doğru uçuş sırasında sürüklenme etkisinin ve gaz sızıntısının olmadığını varsayın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) Yukarı yönlü kaldırma kuvveti

$$F_B = nM_{Ag} \frac{P}{P + \Delta P}.$$

- (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

- (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Eğri $(1, 0)$ noktasından başlar, tek maksimumuna $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ değerinde ulaşır ve ardından pozitif taraftan sıfıra doğru azalır.

- (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

• (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

Yuvarlanmamış sonuçlar $z_f = 11.095 \text{ km}$ ve $\lambda_f = 2.14594$ 'tür; bunun yerine yuvarlanmış $\eta = 5.5$ ve $a = 0.11$ değerleri kullanılırsa iki anlamlı basamakla aynı cevaplar elde edilir.

Çözüm

(a)

Arşimet ilkesine göre kaldırma kuvveti, yer değiştiren havanın ağırlığına eşittir. Çevredeki havanın yoğunluğu balonun boyutları boyunca sabit kabul edilirse,

$$F_B = \rho_A V g.$$

Çevredeki hava ve helyum için ideal gaz denklemleri

$$\rho_A = \frac{P M_A}{R T}, \quad V = \frac{n R T}{P + \Delta P}.$$

bağıntılarını verir. Dolayısıyla ortak sıcaklık sadeleşir:

$$F_B = n M_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

Bu yalnızca kaldırma kuvvetidir. Helyumun, balon zarının ve yükün ağırlıkları toplam kuvvet dengesine ayrı ayrı girer.

(b)

Atmosfer hidrostatik dengededir:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

Bileşimi sabit olan ideal hava için,

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

Verilen sıcaklık ve basınç profilleri kullanıldığında,

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Denklem (2.1)'in türevi alınıp hidrostatik denklemde yerine konulduğunda

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}.$$

Sayısal olarak,

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517 \dots,$$

böylece iki anlamlı basamakla,

$$\boxed{\eta = 5.5}.$$

(c)

Sabit sıcaklıkta gerçekleşen yarı statik bir genişlemede, iç ve dış basınç farkının yaptığı iş, modeldeki esneklik enerjisinin artışı sağlar:

$$\Delta P dV = dU.$$

Balonun hacmi

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

Denklem (2.2)'den,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa R T (\lambda - \lambda^{-5}).$$

Böylece

$$\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV/d\lambda} = \frac{4\kappa R T}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Grafiği belirtmek için basınç ölçeğini

$$C = \frac{4\kappa R T}{r_0}.$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C \lambda^{-8} (7 - \lambda^6).$$

Eğrinin özellikleri şunlardır:

- Fiziksel tanım aralığı $\lambda \geq 1$ 'dir ve $\lambda = 1$ iken $\Delta P = 0$ 'dan başlar.
- Pozitif eğimle yükselerek şu değere ulaşır:

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309 \dots$$

- Maksimum değeri

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- Maksimumdan sonra pozitif kalıp monoton olarak azalır. Büyük şişme oranlarında,

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \longrightarrow 0^+,$$

dolayısıyla yatay eksen bir asimptottur.

(d)

Şöyle tanımlayalım:

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

$\lambda = 1$ iken (c) kısmı $\Delta P = 0$ verir. Bu nedenle gerilmemiş balon

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

bağıntısını sağlar.

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

olduğundan, T_0 sıcaklığında iç ve dış basınç farkı

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Şişirilmiş balon

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

bağıntısını sağlar. $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ 'a bölündüğünde,

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Dolayısıyla,

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

Değerler yerine konulduğunda

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624 \dots,$$

ve dolayısıyla

$$a = 0.11.$$

(e)

Boyutsuz sıcaklığı tanımlayalım:

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

Bu durumda

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Helyum sızıntısı olmadığından n sabit kalır. Helyumun ideal gaz denklemi

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

$P_0 V_0 = n_0 R T_0$ kullanılıp t 'ye bölündüğünde,

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

Yer değiştiren havanın kütlesi, ideal gaz yoğunluğundan bulunur:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{R T} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

Son yükseklikte kaldırma kuvveti toplam ağırlığı dengeler:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

böylece

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

Helyumun ağırlığı zaten $M_T g'$ 'ye dâhildir.

(1) ve (2) arasındaki atmosferik çarpan yok edilince, yalnızca son şişme oranı için bir denklem elde edilir:

$$a \left(\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} \right) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

Ara değerler yuvarlanmadan korunursa,

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346 \dots,$$

ve dolayısıyla

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346 \dots}{0.109624 \dots} = 4.557886 \dots$$

Sol taraf $\lambda_f \geq 1$ için kesin olarak artandır; çünkü türevi $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$ 'dır. Dolayısıyla tek bir fiziksel kök vardır:

$$\lambda_f = 2.145936 \dots$$

Denklem (2) şimdi

$$t_f = \left(\frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

İki anlamlı basamakla,

$$\boxed{\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}}.$$

Son yükseklik, belirtilen atmosfer aralığının içindedir. Balonun başlangıçta net kaldırma kuvveti de pozitiftir: deniz seviyesinde yer değiştirdiği havanın kütlesi

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

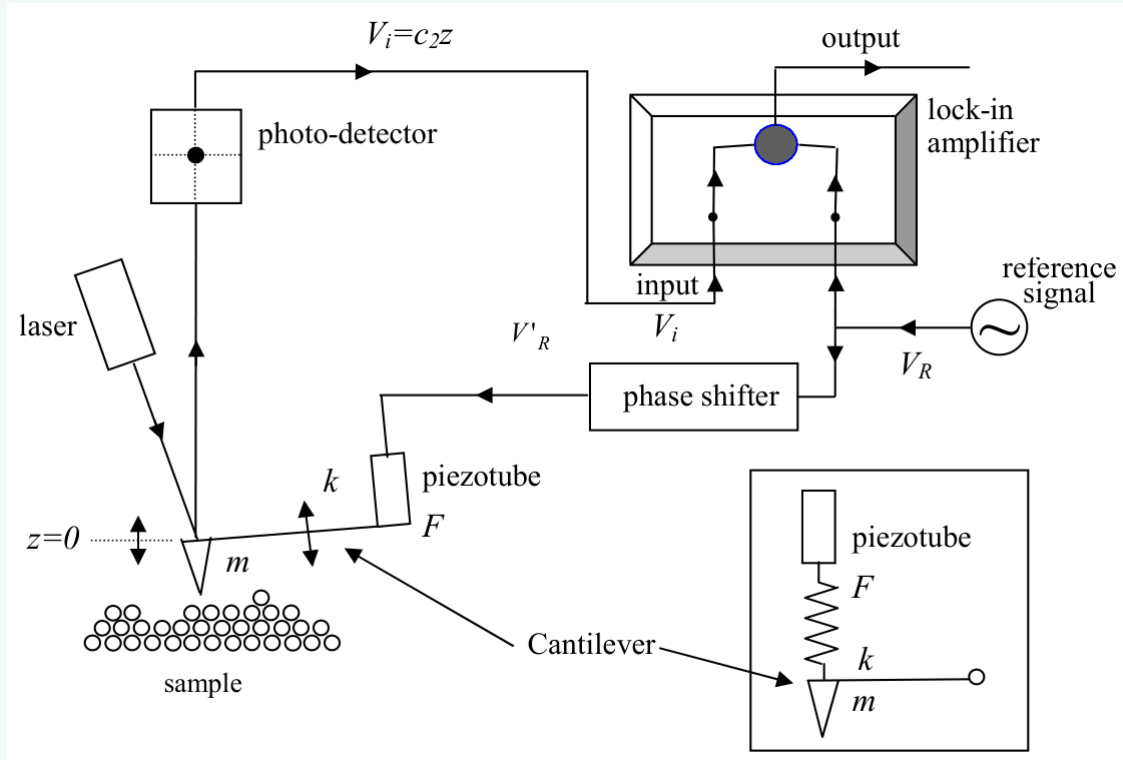
Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Atomik Sonda Mikroskobu

Atomik sonda mikroskopları (APM), nanobilim alanında güçlü araçlardır. APM'deki bir konsolun hareketi, Şekil 3.1'de gösterildiği gibi, yansıyan lazer demetini izleyen bir fotodedektörle algılanabilir. Konsol yalnızca düşey yönde hareket edebilir ve yer değiştirmesi z , zamanın t bir fonksiyonu olarak şu denklemle betimlenebilir:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

Burada m konsolun kütlesi, $k = m\omega_0^2$ konsolun yay sabiti, $b, \omega_0 \gg (b/m) > 0$ koşulunu sağlayan küçük bir sönüm katsayısı ve son olarak F , piezoelektrik tüpün uyguladığı dış sürücü kuvvettir.



Şekil 3.1 Bir taramalı sonda mikroskobunun (SPM) şematik gösterimi. Sağ alt köşedeki küçük şekil, piezoelektrik tüp ile konsol arasındaki bağlantıyı betimleyen basitleştirilmiş bir mekanik modeli göstermektedir.

[Bölüm A]

- (a) [1.5 puan] $F = F_0 \sin \omega t$ olduğunda, Denklem (3.1)'i sağlayan $z(t)$, $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ biçiminde yazılabilir; burada $A > 0$ ve $0 \leq \phi \leq \pi$ 'dir. A genliğinin ve $\tan \phi$ 'nin ifadelerini F_0 , m , ω , ω_0 ve b cinsinden bulunuz. $\omega = \omega_0$ rezonans frekansında A 'yı ve ϕ fazını elde ediniz.
- (b) [1 puan] Şekil 3.1'de gösterilen bir kilitlemeli yükselteç, giriş sinyalini $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ referans sinyaliyle çarpır ve ardından çarpım sinyalinin *yalnızca* dc (doğru akım) bileşenini geçirir. Giriş sinyalinin $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ ile verildiğini varsayınız. Burada V_{R0} , V_{i0} , ω_i ve ϕ_i , verilen pozitif sabitlerdir. Çıkış sinyalinin sıfırdan farklı olması için $\omega (>0)$ üzerindeki koşulu bulunuz. Bu frekansta sıfırdan farklı *dc çıkış sinyalinin* büyüklüğünün ifadesi nedir?
- (c) [1.5 puan] Faz kaydırıcıdan geçen $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ kilitlemeli yükselteç referans gerilimi, $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ biçimine dönüşür. Piezoelektrik tüpe uygulanan V'_R , konsolu $F = c_1 V'_R$ kuvvetiyle sürer. Ardından fotodedektör, konsolun z yer değiştirmesini $V_i = c_2 z$ gerilimine dönüştürür. Burada c_1 ve c_2 sabitlerdir. $\omega = \omega_0$ için *dc çıkış sinyalinin* büyüklüğünün ifadesini bulunuz.
- (d) [2 puan] Konsol kütlesindeki küçük bir Δm değişimi, rezonans frekansını $\Delta \omega_0$ kadar kaydırır. Bunun sonucunda, başlangıçtaki ω_0 rezonans frekansında ϕ fazı $\Delta \phi$ kadar kayar. Faz ölçümlerinde tipik bir çözünürlük olan $\Delta \phi = \pi/1800$ faz kaymasına karşılık gelen Δm kütle

değişimini bulunuz. Konsolun fiziksel parametreleri $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg, $k = 1.0$ N/m ve $(b/m) = 1.0 \times 10^3$ s⁻¹ olarak verilmiştir. $|x| \ll 1$ olduğunda $(1+x)^a \approx 1+ax$ ve $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ yaklaşımlarını kullanınız.

[Bölüm B]

Bundan sonra, Bölüm A'da ele alınan sürücü kuvvete ek olarak, Şekil 3.1'de gösterildiği gibi numuneden kaynaklanan bazı kuvvetlerin konsola etki ettiği durumu ele alalım.

(e) [1.5 puan] Ek $f(h)$ kuvvetinin yalnızca konsol ile numune yüzeyi arasındaki h uzaklığına bağlı olduğu varsayılarak, yeni bir h_0 denge konumu bulunabilir. $h = h_0$ yakınında $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ yazabiliriz; burada c_3 , h 'ye göre sabittir. Yeni ω'_0 rezonans frekansını ω_0 , m ve c_3 cinsinden bulunuz.

(f) [2.5 puan] Numune yatay olarak hareket ettirilerek yüzey taranırken, $Q = 6e$ yüküne sahip konsol ucu, yüzeyin bir miktar altında tuzaklanmış (uzayda yerleşmiş), yükü $q = e$ olan bir elektronla karşılaşır. Elektronun çevresi taranırken, rezonans frekansındaki en büyük $\Delta\omega_0$ ($= \omega'_0 - \omega_0$) kaymasının ω_0 'dan çok küçük olduğu gözlenir. Kaymanın en büyük olduğu durumda konsol ile tuzaklanmış elektron arasındaki d_0 uzaklığını m , q , Q , ω_0 , $\Delta\omega_0$ ve Coulomb sabiti k_e cinsinden ifade ediniz. $\Delta\omega_0 = 20$ s⁻¹ için d_0 'ı nm (1 nm = 1×10^{-9} m) cinsinden hesaplayınız. Konsolun fiziksel parametreleri $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg ve $k = 1.0$ N/m'dir. Hem konsol ucundaki hem de yüzeydeki tüm kutuplanma etkilerini ihmal ediniz.

$k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9$ N · m²/C² ve $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C olduğunu dikkate alınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Belirtilen çarpma kuralına göre dc çıkışını $S_{dc} = \langle V_R V_i \rangle$ ile gösterelim.

- (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

$\omega = \omega_0$ için,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

- (b) Sıfırdan farklı bir dc çıkışı için

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

koşulları gereklidir. Büyüklüğü

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

ile verilir.

• (c)

$$|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

• (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Belirtilen pozitif faz kayması, kütlede bir artışa karşılık gelir.

• (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

burada $m\omega_0^2 - c_3 > 0$ koşulu sağlanmalıdır.

• (f) Frekanstaki en büyük yukarı yönlü kayma, elektronun tam üzerinde gerçekleşir ve

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m\omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

elde edilir.

Çözüm

Sönümlü geçici hareketin ortadan kalkmasından sonraki kararlı periyodik hareketi ele alıyoruz. Çözüm boyunca, soruda benimsenen zayıf sönüm kabulüne uyarak rezonans frekansını $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ olarak alıyoruz.

(a)

$\theta = \omega t - \phi$ olsun. $z = A \sin \theta$ ifadesini hareket denkleminde yerine koyarsak

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

elde ederiz. Sağ tarafı açıp $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ katsayılarını eşitleyince,

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

Bu denklemlerin karelerini alıp toplarsak

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2] = F_0^2.$$

elde ederiz. $k = m\omega_0^2$ bağıntısını kullanarak,

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Katsayı denklemlerini birbirine bölmek şu sonucu verir:

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Fazın bulunduğu bölge katsayı denklemlerinden belirlenir: pozitif sürücü frekansı için $\sin \phi > 0$ iken, $\cos \phi$ 'nin işareti $\omega_0^2 - \omega^2$ 'nin işaretiyle aynıdır. Dolayısıyla faz gecikmesi, rezonansın altında $\pi/2$ 'den küçük, rezonansın üstünde ise $\pi/2$ 'den büyüktür.

$\omega = \omega_0$ olduğunda esneklik ve eylemsizlik terimleri birbirini götürür. Sonuç olarak,

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

(b)

Çarpımı toplama dönüştüren trigonometrik özdeşliği kullanarak,

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

İdeal dc filtresi yalnızca zamandan bağımsız terimleri geçirir. Her iki frekans da pozitif olduğundan, toplam frekanslı terimin ortalaması her zaman sıfırdır. Fark frekanslı terim yalnızca

$$\omega = \omega_i.$$

olduğunda sabittir. Bu frekansta,

$$S_{dc} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

dolayısıyla büyüklük

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

ile verilir. Frekansların eşleşmesi gereklidir, ancak sıfırdan farklı bir sonucu garanti etmez:

$\phi_i = \pi/2 + n\pi$ ise giriş ile referans arasında dik faz ilişkisi vardır ve dc çıkışı sıfır olur. Bu nedenle, çıkışın sıfırdan farklı olması için ayrıca $\cos \phi_i \neq 0$ gerekir.

(c)

Belirtilen frekansta, fazı kaydırılmış referans konsolu şu kuvvetle sürer:

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

Konsolun yer değiştirmesi, kuvvetin $\pi/2$ kadar gerisindedir. Dolayısıyla faz kaydırıcı, yer değiştirmenin başlangıçtaki referansla aynı fazda olmasını sağlar:

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Bu ifade, hareket denkleminde doğrudan yerine koyarak da elde edilir. Dedektör gerilimi şöyledir:

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Başlangıçtaki referansla çarpmak şu sonucu verir:

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b\omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

$\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$ olduğundan,

$$S_{\text{dc}} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b\omega_0}, \quad \boxed{|S_{\text{dc}}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}}.$$

Mutlak değer, dönüşüm sabitlerinin her iki işaretini de kapsar.

(d)

Kütle değiştiğinde yay sabiti değişmez. Bu nedenle yeni doğal frekans

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

ile verilir. $|\Delta m| \ll m$ için verilen binom yaklaşımı şu sonucu verir:

$$\boxed{\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}}.$$

Ölçüm frekansı başlangıçtaki ω_0 değerinde kalır. b 'nin değişmediğini alırsak, yeni faz şu bağıntıyı sağlar:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b\omega_0}{k - (m + \Delta m)\omega_0^2}.$$

$k = m\omega_0^2$ olduğundan,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0 \Delta m}.$$

$\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$ yaklaşımını uygulayarak,

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0 \Delta m},$$

ve buradan

$$\boxed{\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi}.$$

elde edilir. Verilen parametreler şu değerleri verir:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

Dolayısıyla

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

ya da iki anlamlı basamakla,

$$\boxed{\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}}.$$

Burada $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$ ve $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$ olup her iki küçük değişim yaklaşımıyla da tutarlıdır. Buna karşılık gelen frekans değişimi yaklaşık -0.87 s^{-1} 'dir.

(e)

Pozitif yer değiştirme yönünü ve pozitif numune kuvvetinin yönünü numuneden uzaklaşan yönde alalım. z_{eq} , h_0 aralığına karşılık gelen yeni statik yer değiştirme olsun. Statik kuvvet dengesi řu bağıntıyı verir:

$$kz_{eq} = f(h_0).$$

Bu denge konumundan küçük bir yer deęiřtirme için

$$x = z - z_{eq} = h - h_0.$$

tanımını yapalım. Numune kuvveti de dahil edildiğinde hareket denklemleri şöyledir:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

Doğrusallaştırılmış $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$ kuvvetini yerine koyup statik denge denklemini çıkaralım:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

Böylece,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

Kuvvet gradyanı etkin yay sabitini $k - c_3$ olarak değiştirirken, sabit kuvvet yalnızca denge konumunu kaydırır. Dolayısıyla

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}.$$

Kararlı, salınımlı bir denge için $k - c_3 > 0$ gerekir; rezonans yorumu ayrıca zayıf sönüm varsayımını da korur.

(f)

$q = e$ ve $Q = 6e$ olduğundan,

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

Etkileřim iticidir. Frekans kaymasının nerede en büyük olduğunu belirlemek için, uç ile elektron arasındaki yatay uzaklık ρ , düşey uzaklık ise d olsun. Coulomb yasası, kuvvetin yukarı yönlü bileşenini şöyle verir:

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e qQ d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Konsolun düşey yer değiştirmesi, d 'yi aynı miktarda değiştirir. Bu nedenle ilgili kuvvet gradyanı şöyledir:

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e qQ \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Küçük bir frekans kayması için (e) kısmı řu sonucu verir:

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

dolayısıyla

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e qQ}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Zayıf etkileşimde en düşük mertebede, tarama yüksekliği sabit kabul edilebilir. Bu ifade, pozitif maksimumunu $\rho = 0$ 'da alır: pay pozitif olduğu sürece ρ arttıkça azalır ve payda artar; $\rho = \sqrt{2}d$ 'nin ötesinde kayma pozitif değildir.

Dolayısıyla maksimum, ucun elektronun tam üzerinde olduğu ve uç–elektron uzaklığının d_0 olduğu konumda gerçekleşir. Bu noktada,

$$f_z = \frac{k_e q Q}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e q Q}{d_0^3}.$$

(e) kısmında yerine koymak şu sonucu verir:

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

Bunun sonucunda,

$$2\omega_0 \Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

$\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ olduğundan kaymanın karesini ihmal ederiz:

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

Sayısal olarak,

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

ve

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

Böylece,

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

buradan

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

elde edilir. Bağlı frekans kayması $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$ olup küçük kayma yaklaşımının geçerliliğini doğrular.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.