

# IPhO 2004

Теоретические задачи и решения · Пхохан, Корея · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2004/

## Задача 1: Резистор «Пинг-понг»

Конденсатор состоит из двух круглых параллельных пластин радиуса  $R$ , разделённых расстоянием  $d$ , причём  $d \ll R$ , как показано на рис. 1.1(a). Верхняя пластина подключена к источнику *постоянного* напряжения и имеет потенциал  $V$ , а нижняя пластина заземлена. Затем в центр нижней пластины помещают тонкий маленький диск массой  $m$ , радиусом  $r$  ( $\ll R, d$ ) и толщиной  $t$  ( $\ll r$ ), как показано на рис. 1.1(b).

Предположим, что между пластинами находится вакуум с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$ ; пластины и диск изготовлены из идеальных проводников; всеми электростатическими краевыми эффектами можно пренебречь. Индуктивностью всей цепи и релятивистскими эффектами также можно пренебречь. Влиянием зарядов-образованных тоже можно пренебречь.

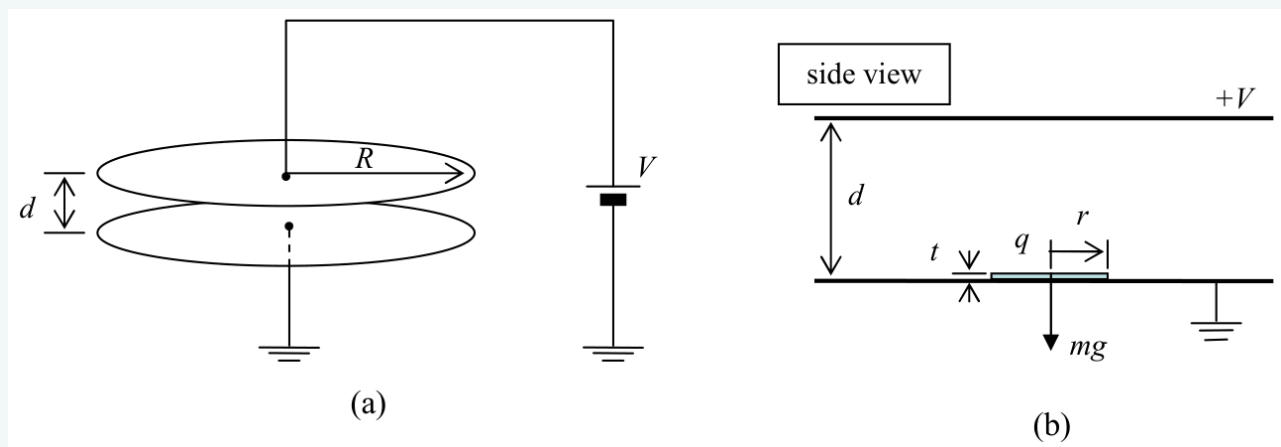


Рисунок 1.1. Схематические изображения: (a) плоский конденсатор, подключённый к источнику постоянного напряжения; (b) вид сбоку на параллельные пластины с маленьким диском внутри конденсатора. (Подробности см. в тексте.)

(a) [1.2 балла] Вычислите электростатическую силу  $F_p$  между пластинами, разделёнными расстоянием  $d$ , до помещения между ними диска, как показано на рис. 1.1(a).

(b) [0.8 балла] Когда диск находится на нижней пластине, его заряд  $q$  на рис. 1.1(b) связан с напряжением  $V$  соотношением  $q = \chi V$ . Найдите  $\chi$  через  $r$ ,  $d$  и  $\varepsilon_0$ .

(c) [0.5 балла] Параллельные пластины расположены перпендикулярно однородному полю тяжести  $g$ . Чтобы первоначально покоящийся диск начал подниматься, приложенное напряжение необходимо увеличить выше порогового значения  $V_{th}$ . Выразите  $V_{th}$  через  $m$ ,  $g$ ,  $d$  и  $\chi$ .

(d) [2.3 балла] При  $V > V_{th}$  диск движется вверх и вниз между пластинами. (Предположите, что диск движется только вертикально, без каких-либо покачиваний.) Столкновения диска с пластинами неупругие, с коэффициентом восстановления  $\eta \equiv (v_{after}/v_{before})$ , где  $v_{before}$  и  $v_{after}$  — скорости диска непосредственно до и после столкновения соответственно. Пластины неподвижно закреплены. Скорость диска *сразу после* столкновения с нижней пластиной стремится к «установившейся скорости»  $v_s$ , которая зависит от  $V$  следующим образом:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

Выразите коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  через  $m, g, \chi, d$  и  $\eta$ . Предположите, что вся поверхность диска соприкасается с пластиной равномерно и одновременно, так что при каждом столкновении полная перезарядка происходит мгновенно.

(e) [2.2 балла] После установления стационарного режима средний по времени ток  $I$  через пластины конденсатора при  $qV \gg mgd$  можно приближённо описать выражением  $I = \gamma V^2$ . Выразите коэффициент  $\gamma$  через  $m, \chi, d$  и  $\eta$ .

(f) [3 балла] При уменьшении приложенного напряжения  $V$  (чрезвычайно медленном) существует критическое напряжение  $V_c$ , ниже которого перенос заряда прекращается. Найдите  $V_c$  и соответствующий ток  $I_c$  через  $m, g, \chi, d$  и  $\eta$ . Сравнив  $V_c$  с пороговым напряжением отрыва  $V_{th}$ , рассмотренным в (c), схематически изобразите вольт-амперную характеристику  $I - V$  при увеличении и уменьшении  $V$  в диапазоне от  $V = 0$  до  $3V_{th}$ .

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

Здесь  $q = \chi V$  обозначает **модуль** заряда диска, что согласуется с условием  $qV \gg mgd$  в (e). С учётом знака его заряд равен  $-q$  после контакта с нижней пластиной и  $+q$  после контакта с верхней пластиной. Приведённые ниже результаты для движения между пластинами предполагают  $0 < \eta < 1$ .

- (a) Сила является силой притяжения и имеет модуль

$$F_p = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

- (b)

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

- (c)

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

• (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

• (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

• (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

При увеличении  $V$  ток остаётся нулевым до  $V_{th}$ , затем скачком переходит на проводящую ветвь. При уменьшении  $V$  он следует по этой ветви до точки  $(V_c, I_c)$ , затем падает до нуля. При большом напряжении ветвь приближается к  $I = \gamma V^2$ .

Предельный случай полного прилипания  $\eta = 0$  является особым: применение условия контакта после каждого удара о нижнюю пластину даёт

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

для предельного тока со стороны проводящего режима, причём гистерезис отсутствует. При  $\eta = 1$  конечного стационарного режима не существует.

## Решение

Во всём решении пренебрегаем толщиной диска по сравнению с  $d$  и используем указанные приближения относительно краевых эффектов и зарядов-изображений. Модуль напряжённости приложенного поля равен

$$E = \frac{V}{d}$$

и при  $V > 0$  поле направлено вниз.

(a)

Модуль поверхностной плотности заряда на каждой пластине конденсатора равен

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

При вычислении силы, действующей на пластину, необходимо исключить её собственное поле. Поле, создаваемое противоположной пластиной, равно  $E/2$ , поэтому электростатическое давление равно

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Умножая на площадь пластины, получаем

$$F_p = p\pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

Разноимённо заряженные пластины притягиваются.

**(b)**

Пока диск покоится на нижней пластине, он является частью этого проводника. На его открытой верхней поверхности поверхностная плотность заряда равна  $-\varepsilon_0 E$ . Следовательно, модуль его заряда равен

$$q = \varepsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

Таким образом,

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

Если бы  $q$  трактовался как заряд с учётом знака при контакте с нижней пластиной, коэффициент при нём был бы отрицательным; дальнейшее использование  $qV$  как положительной работы электрических сил определяет принятое здесь соглашение о модуле заряда.

**(c)**

В состоянии покоя на нижней пластине диск является частью её поверхности. Поэтому направленная вверх электрическая сила, действующая на него, равна давлению, найденному в (a), умноженному на площадь диска:

$$F_{\text{contact}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

Если  $N$  — направленная вверх нормальная реакция опоры, условие равновесия имеет вид

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

Отрыв становится возможным, когда необходимая нормальная реакция опоры обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

откуда

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

Множитель  $1/2$  здесь принципиально важен. Когда диск находится в полёте, при предписанном пренебрежении силами со стороны зарядов-изображений результирующая электрическая сила, действующая на него в однородном приложенном поле, равна  $qE$ . Поэтому силу при контакте и силу в полёте необходимо рассматривать отдельно.

**(d)**

Обозначим модуль ускорения, обусловленного электрической силой во время полёта, через

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

После отрыва от нижней пластины диск имеет заряд  $-q$ , поэтому его ускорение вверх равно  $a_e - g$ . После касания верхней пластины его заряд становится равным  $+q$ , поэтому его ускорение вниз равно  $a_e + g$ .

Пусть  $v_n$  — скорость движения вверх сразу после  $n$ -го столкновения с нижней пластиной. Пусть  $u_n$  — скорость непосредственно перед следующим столкновением с верхней пластиной, а  $w_n$  — скорость непосредственно перед следующим столкновением с нижней пластиной.

Теорема об изменении кинетической энергии для полёта вверх даёт

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

Столкновение с верхней пластиной уменьшает скорость до  $\eta u_n$ . Поэтому для полёта вниз получаем

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

Наконец, столкновение с нижней пластиной даёт  $v_{n+1} = \eta w_n$ . Объединяя эти соотношения, получаем

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

При  $0 < \eta < 1$  отклонения  $v_n^2$  от неподвижной точки отображения за каждый цикл умножаются на  $\eta^4$ . В стационарном режиме

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Таким образом,

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Сравнивая с уравнением (1.1), получаем

$$\boxed{\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}}.$$

**(е)**

За один полный цикл заряд диска изменяется от  $-q$  до  $+q$  на верхней пластине и от  $+q$  до  $-q$  на нижней пластине. Поэтому за полный цикл через источник проходит заряд  $2q$ . Если период равен  $T$ , то

$$I = \frac{2q}{T}.$$

При  $qV \gg mgd$  имеем  $a_e \gg g$ , поэтому силой тяжести можно пренебречь. Тогда оба полёта имеют одинаковую продолжительность  $\tau$ , причём  $T = 2\tau$ .

Пусть  $w$  — скорость непосредственно перед любым из ударов. Скорость сразу после удара равна  $\eta w$ . Во время каждого полёта

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

Поскольку ускорение постоянно, средняя скорость за время полёта равна  $(1 + \eta)w/2$ . Поэтому

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

и

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

При  $V \geq 0$

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}} V^2.$$

Следовательно,

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}}}.$$

**(f)**

Приближение больших напряжений из (е) нельзя использовать для определения момента прекращения тока. Необходимо учитывать силу тяжести.

Обозначим через  $u$  и  $w$  скорости в стационарном режиме непосредственно перед ударами о верхнюю и нижнюю пластины соответственно. Из (d) имеем  $v_s = \eta w$  и

$$w^2 = 2d \left( \frac{a_e}{1 - \eta^2} + \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

Используя уравнение изменения энергии при полёте вверх,

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

получаем

$$u^2 = 2d \left( \frac{a_e}{1 - \eta^2} - \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

При уменьшении напряжения предельной периодической траекторией является та, на которой диск достигает верхней пластины с нулевой скоростью. Полагая  $u = 0$ , получаем

$$a_{e,c} = g \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Поскольку  $a_e = \chi V^2 / (md)$ ,

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}}}.$$

Ниже этого напряжения диск не может поддерживать движение с достижением верхней пластины. Как только он перестаёт достигать этой пластины, знак его заряда не меняется, и при последующих столкновениях с нижней пластиной оставшаяся механическая энергия рассеивается.

При критическом напряжении

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

Полёт вверх начинается со скоростью  $\eta w_c$  и заканчивается с нулевой скоростью; полёт вниз начинается с нулевой скоростью и заканчивается со скоростью  $w_c$ . Используя средние скорости, получаем

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

Поэтому ток непосредственно перед прекращением переноса заряда равен

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

Подстановка  $V_c$  даёт

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

При любом фиксированном  $0 < \eta < 1$  этот ток положителен, поэтому его прекращение сопровождается конечным скачком вниз.

Чтобы точно описать схематический график, можно записать полную проводящую ветвь без пренебрежения силой тяжести. Длительности двух полётов равны

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

Таким образом,

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

где  $u(V)$  и  $w(V)$  приведены выше. Эти выражения остаются справедливыми и при замедленном движении вверх.

Сравнение с (с) даёт

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} < 1.$$

Следовательно, требуемый схематический график имеет следующие особенности:

- **Увеличение напряжения:** следуем по  $I = 0$  от начала координат до  $V_{\text{th}}$ . При напряжении чуть выше  $V_{\text{th}}$  диск отрывается, и установившийся ток скачком возрастает до  $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$ . Далее движемся вверх по проводящей ветви до  $3V_{\text{th}}$ .
- **Уменьшение напряжения:** возвращаемся по проводящей ветви через  $V_{\text{th}}$  и продолжаем до точки  $(V_c, I_c)$ . При напряжении чуть ниже  $V_c$  ток падает до  $I = 0$ , затем движемся по оси напряжения обратно к началу координат.
- **Форма при большом напряжении:** проводящая ветвь приближается к параболе  $I = \gamma V^2$ . При  $3V_{\text{th}}$  имеем  $qV = 18mgd$ , поэтому для конечной точки схематического графика

подходит приближённое значение  $I \approx 9\gamma V_{th}^2$ .

То же самое вдали от точек скачка можно представить в виде таблицы:

| Диапазон напряжения       | Увеличение $V$ | Уменьшение $V$ |
|---------------------------|----------------|----------------|
| $0 \leq V < V_c$          | 0              | 0              |
| $V_c < V < V_{th}$        | 0              | $I_{on}(V)$    |
| $V_{th} < V \leq 3V_{th}$ | $I_{on}(V)$    | $I_{on}(V)$    |

Интервал  $V_c < V < V_{th}$  является интервалом гистерезиса: покоящийся диск остаётся в покое, а уже движущийся диск продолжает перемещаться между пластинами.

Для полноты рассмотрения случай **строго**  $\eta = 0$  требует отдельного анализа. После каждого удара о нижнюю пластину диск остаётся в покое, поэтому условие отрыва при контакте из (с) должно каждый раз выполняться заново. Следовательно, ток прекращается при  $V_{th}$ , а не при предельном значении формулы критического напряжения для положительных  $\eta$ . Со стороны проводящего режима при  $V \rightarrow V_{th}^+$  имеем  $a_e \rightarrow 2g$  и

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

Следовательно,

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

Оба напряжения переключения в этом случае совпадают, поэтому гистерезис отсутствует. В другом предельном случае,  $\eta = 1$ , при столкновениях энергия не рассеивается, тогда как электрическое поле добавляет  $2qV$  за цикл; конечной установившейся скорости существовать не может.

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 2: Поднимающийся воздушный шар

Резиновый воздушный шар, наполненный гелием, поднимается высоко в небо, где давление и температура уменьшаются с высотой. В следующих вопросах считайте, что шар сохраняет сферическую форму независимо от полезной нагрузки, и пренебрегайте объёмом полезной нагрузки. Также считайте, что температура гелия внутри шара всегда равна температуре окружающего воздуха, а все газы являются идеальными. Универсальная газовая постоянная равна  $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ , а молярные массы гелия и воздуха равны соответственно  $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  и  $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ . Ускорение свободного падения равно  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

[Часть А]

(а) [1.5 балла] Пусть давление окружающего воздуха равно  $P$ , а температура —  $T$ . Из-за поверхностного натяжения оболочки давление внутри шара выше наружного. Шар содержит  $n$  молей гелия, а давление внутри него равно  $P + \Delta P$ . Найдите действующую на

шар выталкивающую силу  $F_B$  как функцию  $P$  и  $\Delta P$ .

(b) [2 балла] В один из летних дней в Корее было установлено, что температура воздуха  $T$  на высоте  $z$  над уровнем моря описывается зависимостью  $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$  в диапазоне  $0 < z < 15 \text{ km}$ , где  $z_0 = 49 \text{ km}$  и  $T_0 = 303 \text{ K}$ . Давление и плотность на уровне моря составляли соответственно  $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  и  $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ . В этом диапазоне высот давление имеет вид

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

Выразите  $\eta$  через  $z_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$  и  $g$  и найдите его численное значение с двумя значащими цифрами. Считайте ускорение свободного падения постоянным, не зависящим от высоты.

[Часть В]

Когда резиновый шар сферической формы с радиусом  $r_0$  в нерастянутом состоянии надувают до радиуса  $r$  ( $\geq r_0$ ), его оболочка приобретает дополнительную упругую энергию вследствие растяжения. В упрощённой теории упругая энергия при постоянной температуре  $T$  может быть выражена как

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa R T \left( 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

где  $\lambda \equiv r/r_0$  ( $\geq 1$ ) — коэффициент увеличения радиуса при надувании, а  $\kappa$  — постоянная, измеряемая в  $\text{mol/m}^2$ .

(c) [2 балла] Выразите  $\Delta P$  через параметры, приведённые в уравнении (2.2), и изобразите эскиз графика зависимости  $\Delta P$  от  $\lambda = r/r_0$ .

(d) [1.5 балла] Постоянную  $\kappa$  можно определить по количеству газа, необходимому для надувания шара. При  $T_0 = 303 \text{ K}$  и  $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  нерастянутый шар ( $\lambda = 1$ ) содержит  $n_0 = 12.5$  молей гелия. Чтобы надуть шар до  $\lambda = 1.5$  при тех же  $T_0$  и  $P_0$ , требуется в общей сложности  $n = 3.6n_0 = 45$  молей. Выразите параметр шара  $a$ , определяемый как  $a = \kappa/\kappa_0$ , через  $n$ ,  $n_0$  и  $\lambda$ , где  $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$ . Вычислите  $a$  с двумя значащими цифрами.

[Часть С]

На уровне моря шар подготавливают так же, как в пункте (d) (надувают до  $\lambda = 1.5$ , заполнив его  $n = 3.6n_0 = 45$  молями гелия при  $T_0 = 303 \text{ K}$  и  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). Полная масса, включающая газ, сам шар и всю полезную нагрузку, равна  $M_T = 1.12 \text{ kg}$ . Теперь шар отпускают, и он поднимается с уровня моря.

(e) [3 балла] Предположим, что шар в конце концов останавливается на высоте  $z_f$ , где выталкивающая сила уравнивает полную силу тяжести. Найдите  $z_f$  и коэффициент увеличения радиуса  $\lambda_f$  на этой высоте. Приведите ответы с двумя значащими цифрами. Считайте, что при подъёме отсутствуют снос шара и утечка газа.

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- (a) Направленная вверх выталкивающая сила равна

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

- (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

- (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Кривая начинается в точке  $(1, 0)$ , достигает единственного максимума при  $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ , а затем убывает, приближаясь к нулю сверху.

- (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

- (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

Неокруглённые результаты:  $z_f = 11.095 \text{ km}$  и  $\lambda_f = 2.14594$ ; при использовании округлённых значений  $\eta = 5.5$  и  $a = 0.11$  ответы с двумя значащими цифрами получаются теми же.

## Решение

(a)

По закону Архимеда выталкивающая сила равна весу вытесненного воздуха. Считая плотность окружающего воздуха однородной в пределах размеров шара, получаем

$$F_B = \rho_A V g.$$

Уравнения состояния идеального газа для окружающего воздуха и гелия дают

$$\rho_A = \frac{PM_A}{RT}, \quad V = \frac{nRT}{P + \Delta P}.$$

Поэтому общая для них температура сокращается:

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

Это только выталкивающая сила. Силы тяжести, действующие на гелий, оболочку и полезную нагрузку, учитываются отдельно в общем балансе сил.

**(b)**

Атмосфера находится в гидростатическом равновесии:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

Для воздуха постоянного состава, рассматриваемого как идеальный газ,

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

Используя заданные зависимости температуры и давления от высоты, получаем

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Дифференцируя уравнение (2.1) и подставляя результат в уравнение гидростатики, получаем

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}}.$$

Численно

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517 \dots,$$

так что с двумя значащими цифрами

$$\boxed{\eta = 5.5}.$$

**(c)**

При квазистатическом расширении при постоянной температуре работа избыточного внутреннего давления идёт на увеличение упругой энергии, описываемой данной моделью:

$$\Delta P dV = dU.$$

Объём шара равен

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

Из уравнения (2.2)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa R T (\lambda - \lambda^{-5}).$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV / d\lambda} = \frac{4\kappa R T}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})}.$$

Чтобы описать эскиз графика, введём масштаб давления

$$C = \frac{4\kappa R T}{r_0}.$$

Тогда

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C\lambda^{-8}(7 - \lambda^6).$$

Кривая обладает следующими свойствами:

- Её физическая область определения —  $\lambda \geq 1$ , и она начинается со значения  $\Delta P = 0$  при  $\lambda = 1$ .
- Она возрастает с положительным наклоном до

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309 \dots$$

- Её максимальное значение равно

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- После максимума она монотонно убывает, оставаясь положительной. При большом растяжении

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \rightarrow 0^+,$$

поэтому горизонтальная ось является асимптотой.

**(d)**

Пусть

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

При  $\lambda = 1$  из пункта (с) получаем  $\Delta P = 0$ . Поэтому для нерастянутого шара выполняется

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

Поскольку

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

избыточное давление при температуре  $T_0$  равно

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Для надутого шара выполняется

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

Деля на  $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ , получаем

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Следовательно,

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

Подстановка даёт

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624 \dots,$$

откуда

$$\boxed{a = 0.11}.$$

**(e)**

Введём безразмерную температуру

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

Тогда

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Поскольку гелий не утекает,  $n$  остаётся постоянным. Его уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

Используя  $P_0 V_0 = n_0 R T_0$  и деля на  $t$ , получаем

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

Масса вытесненного воздуха определяется через его плотность, найденную из уравнения состояния идеального газа:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{R T} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

На конечной высоте выталкивающая сила уравнивает полную силу тяжести:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

так что

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

Сила тяжести, действующая на гелий, уже включена в  $M_T g$ .

Исключая из (1) и (2) множитель, описывающий состояние атмосферы, получаем уравнение только для конечного коэффициента увеличения радиуса:

$$a (\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

Сохраняя неокруглённые промежуточные значения, получаем

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346 \dots,$$

и поэтому

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346 \dots}{0.109624 \dots} = 4.557886 \dots$$

Левая часть строго возрастает при  $\lambda_f \geq 1$ , поскольку её производная равна  $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$ .

Таким образом, существует единственный физически допустимый корень:

$$\lambda_f = 2.145936 \dots$$

Теперь уравнение (2) даёт

$$t_f = \left( \frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

Следовательно,

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

С двумя значащими цифрами

$$\boxed{\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}}.$$

Конечная высота находится в пределах заданного диапазона высот атмосферы. Кроме того, в начальный момент результирующая сила направлена вверх: на уровне моря масса вытесненного шаром воздуха равна

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

---

Решение проверено по официальному решению.

### Задача 3: Атомный зондовый микроскоп

Атомные зондовые микроскопы (АРМ) являются мощным инструментом нанонауки. Движение кантилевера в АРМ можно регистрировать с помощью фотодетектора, отслеживающего отражённый лазерный луч, как показано на рис. 3.1. Кантилевер может двигаться только в вертикальном направлении, и его смещение  $z$  как функция времени  $t$  описывается уравнением

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \tag{3.1}$$

где  $m$  — масса кантилевера,  $k = m\omega_0^2$  — его жёсткость,  $b$  — малый коэффициент затухания, удовлетворяющий условию  $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ , а  $F$  — внешняя вынуждающая сила, создаваемая пьезоэлектрической трубкой.

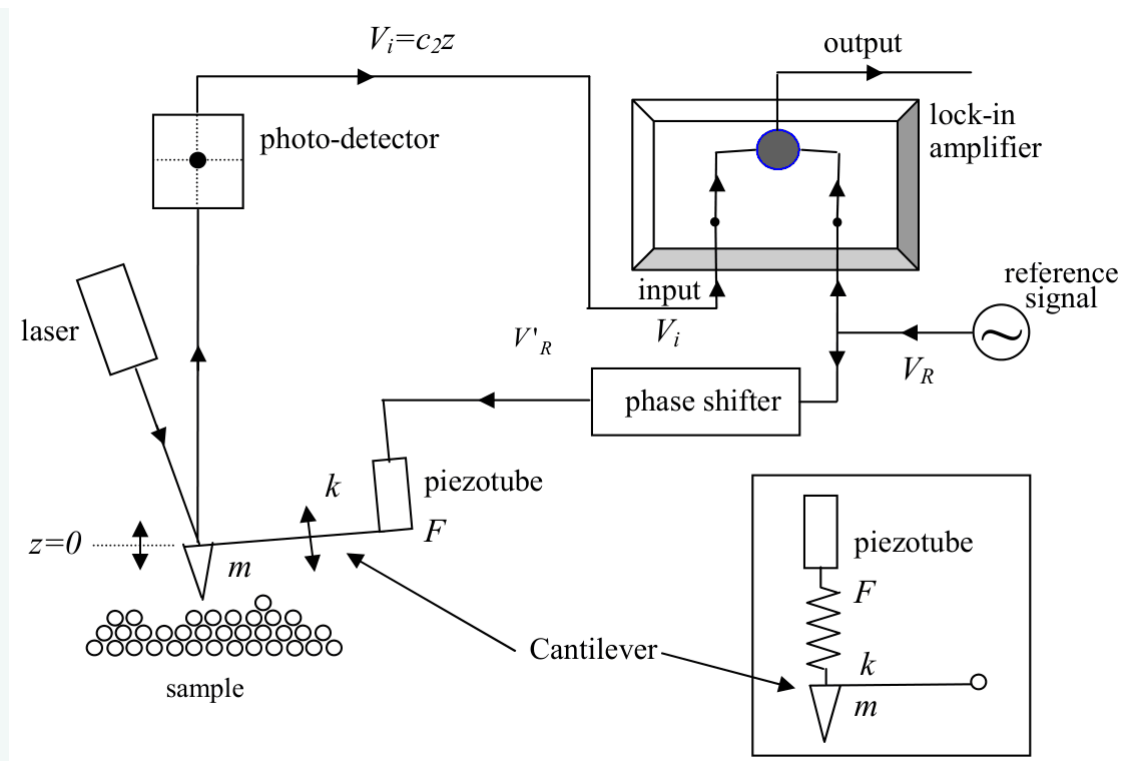


Рисунок 3.1. Схема сканирующего зондового микроскопа (SPM). На вставке в правом нижнем углу показана упрощённая механическая модель, описывающая связь пьезотрубки с кантилевером.

### [Часть А]

(а) [1.5 балла] При  $F = F_0 \sin \omega t$  решение  $z(t)$  уравнения (3.1) можно записать в виде  $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ , где  $A > 0$  и  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Найдите выражения для амплитуды  $A$  и  $\tan \phi$  через  $F_0$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  и  $b$ . Найдите  $A$  и фазу  $\phi$  при резонансной частоте  $\omega = \omega_0$ .

(b) [1 балл] Синхронный усилитель, показанный на рис. 3.1, умножает входной сигнал на опорный сигнал  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ , а затем пропускает *только* постоянную составляющую произведения сигналов. Пусть входной сигнал имеет вид  $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ . Здесь  $V_{R0}$ ,  $V_{i0}$ ,  $\omega_i$  и  $\phi_i$  — заданные положительные постоянные. Найдите условие на  $\omega$  ( $>0$ ), при котором выходной сигнал отличен от нуля. Каково выражение для модуля ненулевого *постоянного выходного сигнала* при этой частоте?

(с) [1.5 балла] При прохождении через фазовращатель опорное напряжение синхронного усилителя  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  преобразуется в  $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ . Напряжение  $V'_R$ , приложенное к пьезоэлектрической трубке, приводит кантилевер в движение силой  $F = c_1 V'_R$ . Затем фотодетектор преобразует смещение кантилевера  $z$  в напряжение  $V_i = c_2 z$ . Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные. Найдите выражение для модуля *постоянного выходного сигнала* при  $\omega = \omega_0$ .

(d) [2 балла] Малое изменение  $\Delta m$  массы кантилевера приводит к сдвигу резонансной частоты на  $\Delta \omega_0$ . В результате фаза  $\phi$  на исходной резонансной частоте  $\omega_0$  изменяется на  $\Delta \phi$ . Найдите изменение массы  $\Delta m$ , соответствующее сдвигу фазы  $\Delta \phi = \pi/1800$ , который является типичным разрешением при измерении фазы. Физические параметры кантилевера:  $m = 1.0 \times 10^{-12}$  kg,  $k = 1.0$  N/m и  $(b/m) = 1.0 \times 10^3$  s<sup>-1</sup>. Используйте приближения  $(1+x)^a \approx 1+ax$  и  $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$  при  $|x| \ll 1$ .

## [Часть В]

Далее рассмотрим ситуацию, в которой на кантилевер, помимо вынуждающей силы, рассмотренной в Части А, действуют силы со стороны образца, как показано на рис. 3.1.

(е) [1.5 балла] Предполагая, что дополнительная сила  $f(h)$  зависит только от расстояния  $h$  между кантилевером и поверхностью образца, можно найти новое положение равновесия  $h_0$ . Вблизи  $h = h_0$  можно записать  $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ , где  $c_3$  не зависит от  $h$ . Найдите новую резонансную частоту  $\omega'_0$  через  $\omega_0$ ,  $m$  и  $c_3$ .

(f) [2.5 балла] При сканировании поверхности путём горизонтального перемещения образца острие кантилевера с зарядом  $Q = 6e$  оказывается вблизи электрона с зарядом  $q = e$ , захваченного (локализованного в пространстве) на некоторой глубине под поверхностью. При сканировании в окрестности электрона наблюдаемый максимальный сдвиг резонансной частоты  $\Delta\omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$  оказывается значительно меньше  $\omega_0$ . Выразите расстояние  $d_0$  от кантилевера до захваченного электрона при максимальном сдвиге через  $m$ ,  $q$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega_0$  и постоянную Кулона  $k_e$ . Вычислите  $d_0$  в нм ( $1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$ ) при  $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$ . Физические параметры кантилевера:  $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$  и  $k = 1.0 \text{ N/m}$ . Пренебрегите любыми эффектами поляризации как острия кантилевера, так и поверхности. Учтите, что  $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$  и  $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

Обозначим через  $S_{dc} = \langle V_R V_i \rangle$  постоянный выходной сигнал при указанном правиле перемножения.

• (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

При  $\omega = \omega_0$ ,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

• (b) Для ненулевого постоянного выходного сигнала необходимо

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

Его модуль равен

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

• (c)

$$|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

- (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Заданный положительный сдвиг фазы соответствует увеличению массы.

- (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

при условии  $m\omega_0^2 - c_3 > 0$ .

- (f) Максимальный сдвиг частоты в сторону увеличения возникает непосредственно над электроном, причём

$$d_0 \simeq \left( \frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta \omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

## Решение

Рассмотрим установившееся периодическое движение после затухания переходного процесса. Всюду будем использовать принятое в условии для случая слабого затухания соглашение, согласно которому резонансная частота равна  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

- (a)

Пусть  $\theta = \omega t - \phi$ . Подстановка  $z = A \sin \theta$  в уравнение движения даёт

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

Раскрывая правую часть и приравнивая коэффициенты при  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ , получаем

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая их, получаем

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2] = F_0^2.$$

Используя  $k = m\omega_0^2$ , находим

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}.$$

Деление уравнений для коэффициентов даёт

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Четверть, в которой лежит фаза, определяется уравнениями для коэффициентов: при положительной частоте вынуждающей силы  $\sin \phi > 0$ , а знак  $\cos \phi$  совпадает со знаком  $\omega_0^2 - \omega^2$ . Таким образом, при частотах ниже резонансной отставание по фазе меньше  $\pi/2$ , а при частотах выше резонансной — больше  $\pi/2$ .

При  $\omega = \omega_0$  упругое и инерционное слагаемые взаимно компенсируются. Следовательно,

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

**(b)**

Используя формулу преобразования произведения в сумму, получаем

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

Идеальный фильтр постоянной составляющей сохраняет только слагаемые, не зависящие от времени. Поскольку обе частоты положительны, слагаемое с суммарной частотой всегда имеет нулевое среднее. Слагаемое с разностной частотой постоянно только при

$$\omega = \omega_i.$$

При этой частоте

$$S_{dc} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

поэтому модуль равен

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

Совпадение частот необходимо, но не гарантирует ненулевого результата: если  $\phi_i = \pi/2 + n\pi$ , входной сигнал находится в квадратуре с опорным и постоянный выходной сигнал обращается в нуль. Поэтому для ненулевого выходного сигнала также требуется  $\cos \phi_i \neq 0$ .

**(c)**

При заданной частоте опорный сигнал со сдвинутой фазой приводит кантилевер в движение силой

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

Смещение кантилевера отстаёт по фазе от силы на  $\pi/2$ . Поэтому благодаря фазовращателю смещение оказывается синфазным с исходным опорным сигналом:

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Это выражение также получается непосредственной подстановкой в уравнение движения. Напряжение на выходе детектора равно

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Умножение на исходный опорный сигнал даёт

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b\omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

Поскольку  $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$ ,

$$S_{dc} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b\omega_0}, \quad |S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

Модуль учитывает возможность любого знака коэффициентов преобразования.

**(d)**

При изменении массы жёсткость остаётся неизменной. Поэтому новая собственная частота равна

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

При  $|\Delta m| \ll m$  приведённое в условии биномиальное приближение даёт

$$\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}.$$

Частота измерения остаётся равной исходному значению  $\omega_0$ . Считая  $b$  неизменным, для новой фазы получаем

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b\omega_0}{k - (m + \Delta m)\omega_0^2}.$$

Поскольку  $k = m\omega_0^2$ ,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0 \Delta m}.$$

Применяя  $\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$ , получаем

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0 \Delta m},$$

откуда

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi.$$

Из заданных параметров находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$
$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

или, с точностью до двух значащих цифр,

$$\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Здесь  $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$  и  $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$ , что согласуется с обоими приближениями малых изменений. Соответствующее изменение частоты составляет приблизительно  $-0.87 \text{ s}^{-1}$ .

**(e)**

Выберем положительное направление смещения и силы со стороны образца от образца. Пусть  $z_{\text{eq}}$  — новое статическое смещение, соответствующее зазору  $h_0$ . Условие статического равновесия сил даёт

$$kz_{\text{eq}} = f(h_0).$$

Для малого смещения относительно этого положения равновесия введём

$$x = z - z_{\text{eq}} = h - h_0.$$

С учётом силы со стороны образца уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

Подставим линеаризованную силу  $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$ , затем вычтем уравнение статического равновесия:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

Следовательно,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

Градиент силы изменяет эффективную жёсткость до  $k - c_3$ , тогда как постоянная сила лишь смещает положение равновесия. Таким образом,

$$\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}}.$$

Для устойчивого равновесия, вблизи которого возможны колебания, требуется  $k - c_3 > 0$ ; интерпретация частоты как резонансной также предполагает сохранение условия слабого затухания.

**(f)**

Поскольку  $q = e$  и  $Q = 6e$ ,

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

Взаимодействие является отталкиванием. Чтобы определить, где сдвиг частоты максимален, обозначим через  $\rho$  горизонтальное расстояние между остриём и электроном, а через  $d$  — расстояние между ними по вертикали. По закону Кулона направленная вверх составляющая силы равна

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e q Q d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Вертикальное смещение кантилевера изменяет  $d$  на ту же величину. Поэтому соответствующий градиент силы равен

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e q Q \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Для малого сдвига частоты из пункта (e) получаем

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

так что

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e q Q}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

В ведущем порядке по слабому взаимодействию высоту сканирования можно считать постоянной. Это выражение достигает своего положительного максимума при  $\rho = 0$ : пока числитель положителен, он убывает с ростом  $\rho$ , а знаменатель возрастает; при  $\rho = \sqrt{2}d$  и далее сдвиг неположителен.

Таким образом, максимум достигается непосредственно над электроном, где расстояние от острия до электрона равно  $d_0$ . В этой точке

$$f_z = \frac{k_e q Q}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e q Q}{d_0^3}.$$

Подстановка в результат пункта (е) даёт

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e q Q}{md_0^3}.$$

Следовательно,

$$2\omega_0\Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{md_0^3}.$$

Поскольку  $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ , пренебрегаем квадратом сдвига:

$$d_0 \simeq \left( \frac{k_e q Q}{m\omega_0\Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

Численно

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

и

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

Следовательно,

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

откуда

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

Относительный сдвиг частоты равен  $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$ , что подтверждает применимость приближения малого сдвига.

---

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.