

IPhO 2004

Problemas teóricos y soluciones · Pohang, Corea · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2004/

Problema 1: Resistencia de «ping-pong»

Un condensador consta de dos placas circulares paralelas, ambas de radio R , separadas por una distancia d , donde $d \ll R$, como se muestra en la Fig. 1.1(a). La placa superior está conectada a una fuente de tensión *constante* a un potencial V , mientras que la placa inferior está conectada a tierra. A continuación, se coloca un disco pequeño y delgado de masa m , radio r ($\ll R, d$) y espesor t ($\ll r$) en el centro de la placa inferior, como se muestra en la Fig. 1.1(b).

Supongamos que entre las placas hay vacío, con constante dieléctrica ϵ_0 ; que las placas y el disco están hechos de conductores perfectos; y que pueden despreciarse todos los efectos electrostáticos de borde. La inductancia de todo el circuito y los efectos relativistas pueden despreciarse sin problema. También puede despreciarse el efecto de las cargas imagen.

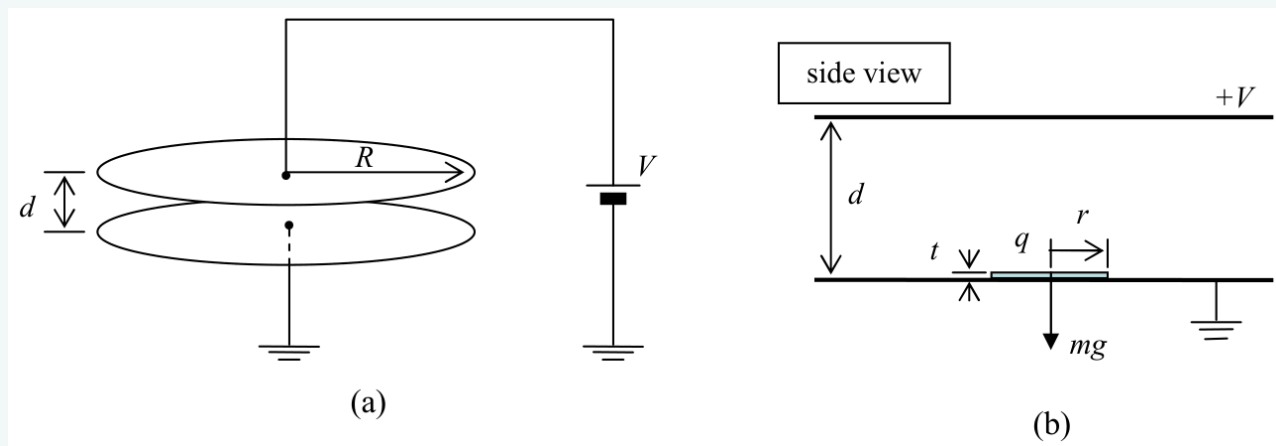


Figura 1.1 Esquemas de (a) un condensador de placas paralelas conectado a una fuente de tensión constante y (b) una vista lateral de las placas paralelas con un pequeño disco introducido en el condensador. (Véanse los detalles en el texto.)

- (a) [1.2 puntos] Calcule la fuerza electrostática F_p entre las placas separadas por d antes de introducir el disco entre ellas, como se muestra en la Fig. 1.1(a).
- (b) [0.8 puntos] Cuando el disco se coloca sobre la placa inferior, la carga q del disco de la Fig. 1.1(b) está relacionada con la tensión V mediante $q = \chi V$. Halle χ en función de r , d y ϵ_0 .
- (c) [0.5 puntos] Las placas paralelas son perpendiculares a un campo gravitatorio uniforme g . Para levantar el disco, inicialmente en reposo, es necesario aumentar la tensión aplicada por encima de una tensión umbral V_{th} . Obtenga V_{th} en función de m , g , d y χ .

(d) [2.3 puntos] Cuando $V > V_{\text{th}}$, el disco realiza un movimiento de subida y bajada entre las placas. (Suponga que el disco se mueve únicamente en dirección vertical, *sin ningún bamboleo*.) Los choques entre el disco y las placas son inelásticos, con un coeficiente de restitución $\eta \equiv (v_{\text{after}}/v_{\text{before}})$, donde v_{before} y v_{after} son los módulos de la velocidad del disco justo antes y después del choque, respectivamente. Las placas permanecen fijas en su posición. El módulo de la velocidad del disco *justo después* del choque con la placa inferior se aproxima a una «velocidad de régimen estacionario» v_s , que depende de V de la siguiente manera:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

Obtenga los coeficientes α y β en función de m , g , χ , d y η . Suponga que toda la superficie del disco toca la placa de manera uniforme y simultánea, de modo que el intercambio completo de carga se produce instantáneamente en cada choque.

(e) [2.2 puntos] Una vez alcanzado el régimen estacionario, la corriente media temporal I a través de las placas del condensador puede aproximarse por $I = \gamma V^2$ cuando $qV \gg mgd$. Expresé el coeficiente γ en función de m , χ , d y η .

(f) [3 puntos] Cuando la tensión aplicada V se reduce (de forma extremadamente lenta), existe una tensión crítica V_c por debajo de la cual deja de circular carga. Halle V_c y la corriente correspondiente I_c en función de m , g , χ , d y η . Comparando V_c con el umbral de despegue V_{th} estudiado en (c), trace un esbozo de las características $I - V$ cuando V aumenta y disminuye en el intervalo de $V = 0$ a $3V_{\text{th}}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí $q = \chi V$ representa el **módulo** de la carga del disco, de acuerdo con $qV \gg mgd$ en (e). Su carga con signo es $-q$ después del contacto con la placa inferior y $+q$ después del contacto con la placa superior. Los resultados siguientes para el movimiento de ida y vuelta suponen $0 < \eta < 1$.

- (a) La fuerza es atractiva, con módulo

$$F_p = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

- (b)

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

- (c)

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

- (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

- (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

- (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

Al aumentar V , la corriente permanece nula hasta V_{th} y después salta a la rama conductora. Al disminuir V , sigue esa rama hasta (V_c, I_c) y después cae a cero. A tensiones altas, la rama se aproxima a $I = \gamma V^2$.

El caso extremo de adherencia completa $\eta = 0$ es singular: al aplicar la condición de contacto después de cada choque con la placa inferior se obtiene

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

para la corriente límite del lado conductor, sin histéresis. Para $\eta = 1$, no existe un régimen estacionario finito.

Solución

En todo lo que sigue, se desprecia el espesor del disco frente a d y se utilizan las aproximaciones indicadas sobre los bordes y las cargas imagen. El campo aplicado tiene módulo

$$E = \frac{V}{d}$$

y apunta hacia abajo para $V > 0$.

(a)

La densidad superficial de carga de cualquiera de las placas del condensador tiene módulo

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Para calcular la fuerza sobre una placa debe excluirse su propio campo. El campo producido por la placa opuesta es $E/2$, por lo que la presión electrostática es

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Multiplicando por el área de la placa se obtiene

$$F_p = p\pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

Las placas, con cargas de signos opuestos, se atraen.

(b)

Mientras el disco reposa sobre la placa inferior, forma parte de ese conductor. Su cara superior expuesta tiene una densidad superficial de carga $-\varepsilon_0 E$. Por tanto, el módulo de su carga es

$$q = \varepsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

En consecuencia,

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

Si, en cambio, se interpretara q como la carga con signo durante el contacto con la placa inferior, su coeficiente sería negativo; el uso posterior de qV como trabajo eléctrico positivo establece la convención de módulo utilizada aquí.

(c)

En reposo sobre la placa inferior, el disco forma parte de la superficie de la placa. Por tanto, la fuerza eléctrica hacia arriba que actúa sobre él es la presión hallada en (a), multiplicada por el área del disco:

$$F_{\text{contact}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

Si N es la reacción normal hacia arriba, el equilibrio exige

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

El despegue se hace posible cuando la reacción normal necesaria llega a cero. Por tanto,

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

de donde se obtiene

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

El factor $1/2$ es esencial aquí. Una vez que el disco está en vuelo, despreciando las fuerzas de las cargas imagen como se indica, la fuerza neta que ejerce sobre él el campo uniforme aplicado es qE . Por tanto, la fuerza durante el contacto y la fuerza durante el vuelo deben tratarse por separado.

(d)

Definimos el módulo de la aceleración eléctrica durante el vuelo mediante

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

Después de abandonar la placa inferior, el disco tiene carga $-q$, por lo que su aceleración hacia arriba es $a_e - g$. Después de tocar la placa superior, su carga pasa a ser $+q$, por lo que su aceleración hacia abajo es $a_e + g$.

Sea v_n el módulo de la velocidad ascendente justo después del n -ésimo choque con la placa inferior. Sea u_n el módulo de la velocidad inmediatamente antes del siguiente choque con la placa superior, y w_n el módulo de la velocidad inmediatamente antes del siguiente choque con la placa inferior.

El teorema del trabajo y la energía aplicado al vuelo ascendente da

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

El choque con la placa superior reduce el módulo de la velocidad a ηu_n . Por tanto, el vuelo descendente da

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

Finalmente, el choque con la placa inferior da $v_{n+1} = \eta w_n$. Combinando estas relaciones,

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Para $0 < \eta < 1$, las desviaciones de v_n^2 respecto a su punto fijo se reducen por un factor η^4 en cada ciclo. En régimen estacionario,

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Así,

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Comparando con la Ec. (1.1),

$$\boxed{\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}}.$$

(e)

En un ciclo completo, la carga del disco cambia de $-q$ a $+q$ en la placa superior y de $+q$ a $-q$ en la placa inferior. Por tanto, una carga $2q$ pasa por la fuente en cada ciclo completo. Si el período es T ,

$$I = \frac{2q}{T}.$$

Cuando $qV \gg mgd$, tenemos $a_e \gg g$, por lo que puede despreciarse la gravedad. Los dos vuelos tienen entonces la misma duración τ , con $T = 2\tau$.

Sea w el módulo de la velocidad inmediatamente antes de cualquiera de los impactos. El módulo de la velocidad inmediatamente después del impacto es ηw . Durante cada vuelo,

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

Como la aceleración es constante, el módulo de la velocidad media durante un vuelo es $(1 + \eta)w/2$. Por tanto,

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

y

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

Para $V \geq 0$,

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}} V^2.$$

Por consiguiente,

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

(f)

La aproximación de alta tensión de (e) no puede utilizarse para determinar el cese de la corriente. Debe mantenerse el efecto de la gravedad.

Sean u y w los módulos de las velocidades en régimen estacionario inmediatamente antes de los impactos con las placas superior e inferior, respectivamente. De (d), $v_s = \eta w$, y

$$w^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1-\eta^2} + \frac{g}{1+\eta^2} \right).$$

Utilizando la ecuación de la energía para el vuelo ascendente,

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

obtenemos

$$u^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1-\eta^2} - \frac{g}{1+\eta^2} \right).$$

Al reducir la tensión, la trayectoria periódica límite es aquella que alcanza justo la placa superior con velocidad nula. Al imponer $u = 0$ se obtiene

$$a_{e,c} = g \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}.$$

Como $a_e = \chi V^2/(md)$,

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}}.$$

Por debajo de esta tensión, el disco no puede mantener vuelos que alcancen la placa superior. Una vez que deja de alcanzar esa placa, su carga no cambia de signo y los sucesivos choques con la placa inferior disipan la energía mecánica que le queda.

A la tensión crítica,

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

El vuelo ascendente comienza con un módulo de la velocidad ηw_c y termina con velocidad nula; el vuelo descendente comienza con velocidad nula y termina con un módulo de la velocidad w_c .

Utilizando las velocidades medias,

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

Por tanto, la corriente inmediatamente antes de su cese es

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

Sustituyendo V_c se obtiene

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

Para cualquier valor fijo $0 < \eta < 1$, esta corriente es positiva, por lo que su cese produce un salto descendente finito.

Para especificar el esbozo con precisión, puede escribirse la rama conductora completa sin despreciar la gravedad. Sus dos tiempos de vuelo son

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

Así,

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

donde $u(V)$ y $w(V)$ vienen dados más arriba. Estas expresiones siguen siendo válidas cuando el vuelo ascendente es desacelerado.

La comparación con (c) da

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} < 1.$$

Por tanto, el esbozo solicitado tiene las siguientes características:

- **Tensión creciente:** se sigue $I = 0$ desde el origen hasta V_{th} . Justo por encima de V_{th} , el disco despegue y la corriente estacionaria salta a $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$. Se continúa ascendiendo por la rama conductora hasta $3V_{\text{th}}$.
- **Tensión decreciente:** se recorre en sentido inverso la rama conductora, pasando por V_{th} , y se continúa hasta (V_c, I_c) . Justo por debajo de V_c , se cae a $I = 0$ y después se sigue el eje de la tensión de vuelta al origen.
- **Forma a tensiones altas:** la rama conductora se aproxima a la parábola $I = \gamma V^2$. Para $3V_{\text{th}}$, $qV = 18mgd$, por lo que un extremo aproximado adecuado para el esbozo es $I \approx 9\gamma V_{\text{th}}^2$.

Equivalentemente, fuera de los puntos de salto:

Intervalo de tensión	V creciente	V decreciente
$0 \leq V < V_c$	0	0
$V_c < V < V_{\text{th}}$	0	$I_{\text{on}}(V)$

Intervalo de tensión	V creciente	V decreciente
$V_{th} < V \leq 3V_{th}$	$I_{on}(V)$	$I_{on}(V)$

El intervalo $V_c < V < V_{th}$ es el intervalo de histéresis: un disco en reposo permanece en reposo, mientras que un disco que ya está en movimiento continúa su recorrido de ida y vuelta.

Para completar el análisis, el caso **exactamente** $\eta = 0$ requiere un tratamiento aparte. Cada impacto con la placa inferior deja el disco en reposo, por lo que la condición de despegue en contacto de (c) debe cumplirse de nuevo. En consecuencia, la corriente cesa en V_{th} , y no en el límite de la fórmula de la tensión crítica para η positivo. Del lado conductor, cuando $V \rightarrow V_{th}^+$, $a_e \rightarrow 2g$, y

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

Por consiguiente,

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

Ambas tensiones de conmutación coinciden entonces, por lo que no hay histéresis. En el otro extremo, $\eta = 1$, los choques no disipan energía, mientras que el campo eléctrico aporta $2qV$ por ciclo; no puede existir una velocidad finita de régimen estacionario.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Globo ascendente

Un globo de goma lleno de helio asciende hasta gran altura en el cielo, donde la presión y la temperatura disminuyen con la altura. En las siguientes preguntas, suponga que el globo mantiene su forma esférica independientemente de la carga útil y desprecie el volumen de esta. Suponga también que la temperatura del helio en el interior del globo es siempre la misma que la del aire ambiente y trate todos los gases como gases ideales. La constante universal de los gases es $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ y las masas molares del helio y del aire son $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ y $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, respectivamente. La aceleración de la gravedad es $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

[Parte A]

(a) [1.5 puntos] Sean P la presión del aire ambiente y T su temperatura. La presión en el interior del globo es mayor que la exterior debido a la tensión superficial del globo. El globo contiene n moles de helio y la presión en su interior es $P + \Delta P$. Halle la fuerza de empuje F_B que actúa sobre el globo en función de P y ΔP .

(b) [2 puntos] En un determinado día de verano en Corea, se observó que la temperatura del aire T a una altura z sobre el nivel del mar era $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ en el intervalo $0 < z < 15 \text{ km}$, con $z_0 = 49 \text{ km}$ y $T_0 = 303 \text{ K}$. La presión y la densidad al nivel del mar eran $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ y $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$, respectivamente. Para este intervalo de alturas, la presión tiene la forma

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

Expresar η en términos de z_0 , ρ_0 , P_0 y g , y halle su valor numérico con dos cifras significativas. Considere que la aceleración de la gravedad es constante e independiente de la altura.

[Parte B]

Cuando un globo de goma de forma esférica, cuyo radio sin estirar es r_0 , se infla hasta formar una esfera de radio r ($\geq r_0$), la superficie del globo almacena energía elástica adicional debido al estiramiento. En una teoría simplificada, la energía elástica a temperatura constante T se puede expresar como

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

donde $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) es la razón de inflado y κ es una constante cuyas unidades son mol/m^2 .

(c) [2 puntos] Expresar ΔP en términos de los parámetros dados en la ec. (2.2) y esboce la gráfica de ΔP en función de $\lambda = r/r_0$.

(d) [1.5 puntos] La constante κ se puede determinar a partir de la cantidad de gas necesaria para inflar el globo. A $T_0 = 303 \text{ K}$ y $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, un globo sin estirar ($\lambda = 1$) contiene $n_0 = 12.5$ moles de helio. Se necesitan $n = 3.6n_0 = 45$ moles en total para inflar el globo hasta $\lambda = 1.5$ a los mismos valores de T_0 y P_0 . Expresar el parámetro del globo a , definido como $a = \kappa/\kappa_0$, en términos de n , n_0 y λ , donde $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$. Calcule a con dos cifras significativas.

[Parte C]

Se prepara un globo como en (d) al nivel del mar (inflado hasta $\lambda = 1.5$ con $n = 3.6n_0 = 45$ moles de helio a $T_0 = 303 \text{ K}$ y $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$). La masa total, que incluye el gas, el propio globo y las demás cargas útiles, es $M_T = 1.12 \text{ kg}$. Ahora se deja que el globo ascienda desde el nivel del mar.

(e) [3 puntos] Suponga que el globo acaba deteniéndose a la altura z_f , donde la fuerza de empuje equilibra el peso total. Halle z_f y la razón de inflado λ_f a esa altura. Dé las respuestas con dos cifras significativas. Suponga que no hay efectos de deriva ni fugas de gas durante el ascenso.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) La fuerza de empuje hacia arriba es

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

- (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

• (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

La curva parte de $(1, 0)$, alcanza su único máximo en $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ y luego decrece hacia cero manteniéndose positiva.

• (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

• (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

Los resultados sin redondear son $z_f = 11.095 \text{ km}$ y $\lambda_f = 2.14594$; si se usan en su lugar los valores redondeados $\eta = 5.5$ y $a = 0.11$, se obtienen las mismas respuestas con dos cifras significativas.

Solución

(a)

Según el principio de Arquímedes, la fuerza de empuje es igual al peso del aire desplazado. Considerando que la densidad del aire ambiente es uniforme a escala de las dimensiones del globo,

$$F_B = \rho_A V g.$$

Las ecuaciones de los gases ideales para el aire circundante y el helio dan

$$\rho_A = \frac{PM_A}{RT}, \quad V = \frac{nRT}{P + \Delta P}.$$

Por tanto, la temperatura común se cancela:

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

Esta es únicamente la fuerza de empuje. Los pesos del helio, de la envoltura y de la carga útil intervienen por separado en el balance total de fuerzas.

(b)

La atmósfera se encuentra en equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

Para aire ideal de composición constante,

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

Usando los perfiles de temperatura y presión dados,

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Al derivar la ec. (2.1) y sustituir en la ecuación hidrostática se obtiene

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}}.$$

Numéricamente,

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517 \dots,$$

por lo que, con dos cifras significativas,

$$\boxed{\eta = 5.5}.$$

(c)

En una expansión cuasiestática a temperatura constante, el trabajo realizado por la sobrepresión interna proporciona el incremento de la energía elástica descrita por el modelo:

$$\Delta P dV = dU.$$

El volumen del globo es

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

A partir de la ec. (2.2),

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa R T (\lambda - \lambda^{-5}).$$

Así,

$$\boxed{\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV/d\lambda} = \frac{4\kappa R T}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})}.$$

Para precisar el esbozo de la gráfica, definimos la escala de presión

$$C = \frac{4\kappa R T}{r_0}.$$

Entonces,

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C \lambda^{-8} (7 - \lambda^6).$$

La curva presenta las siguientes características:

- Su dominio físico es $\lambda \geq 1$ y parte de $\Delta P = 0$ cuando $\lambda = 1$.
- Crece con pendiente positiva hasta

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309 \dots$$

- Su valor máximo es

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- Tras el máximo, decrece monótonamente y se mantiene positiva. Para un inflado grande,

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \rightarrow 0^+,$$

por lo que el eje horizontal es una asíntota.

(d)

Sea

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

Para $\lambda = 1$, el apartado (c) da $\Delta P = 0$. Por tanto, el globo sin estirar satisface

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

Como

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

la sobrepresión a temperatura T_0 es

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

El globo inflado satisface

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

Dividiendo por $P_0 V_0 = n_0 R T_0$,

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Por tanto,

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

Al sustituir se obtiene

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624 \dots,$$

y, por consiguiente,

$$a = 0.11.$$

(e)

Definimos la temperatura adimensional

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

Entonces,

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Como no se escapa helio, n permanece constante. Su ecuación de gas ideal es

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

Usando $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ y dividiendo por t ,

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

La masa de aire desplazada se obtiene a partir de su densidad como gas ideal:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{RT} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

A la altura final, el empuje equilibra el peso total:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

de modo que

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

El peso del helio ya está incluido en $M_T g$.

Al eliminar el factor atmosférico entre (1) y (2), se obtiene una ecuación que depende únicamente de la razón de inflado final:

$$a (\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

Conservando los valores intermedios sin redondear,

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346 \dots,$$

y, por tanto,

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346 \dots}{0.109624 \dots} = 4.557886 \dots$$

El miembro izquierdo es estrictamente creciente para $\lambda_f \geq 1$, porque su derivada es $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$.

Por tanto, existe una única raíz física:

$$\lambda_f = 2.145936 \dots$$

La ecuación (2) da ahora

$$t_f = \left(\frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

En consecuencia,

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

Con dos cifras significativas,

$$\boxed{\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}}.$$

La altura final se encuentra dentro del intervalo atmosférico especificado. El globo también tiene una fuerza ascensional neta inicial positiva: al nivel del mar, la masa de aire que desplaza es

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Microscopio de sonda atómica

Los microscopios de sonda atómica (APM) son herramientas muy potentes en el campo de la nanociencia. El movimiento de una palanca en voladizo en un APM puede detectarse mediante un fotodetector que registra el haz láser reflejado, como se muestra en la Fig. 3.1. La palanca solo puede moverse en la dirección vertical y su desplazamiento z en función del tiempo t puede describirse mediante la ecuación

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

donde m es la masa de la palanca, $k = m\omega_0^2$ es su constante elástica, b es un pequeño coeficiente de amortiguamiento que satisface $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ y, por último, F es una fuerza excitadora externa ejercida por el tubo piezoeléctrico.

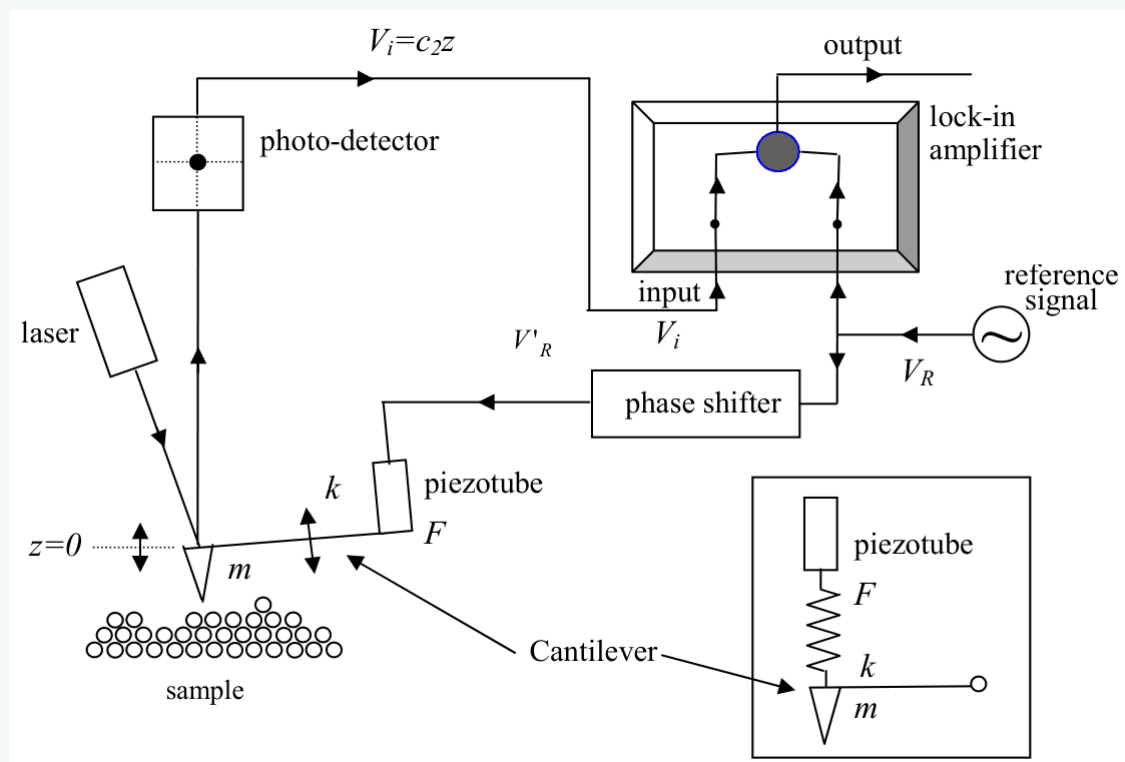


Figura 3.1 Diagrama esquemático de un microscopio de sonda de barrido (SPM). El recuadro de la esquina inferior derecha representa un modelo mecánico simplificado para describir el acoplamiento del tubo piezoeléctrico con la palanca.

[Parte A]

(a) [1.5 puntos] Cuando $F = F_0 \sin \omega t$, la función $z(t)$ que satisface la Ec. (3.1) puede escribirse como $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$, donde $A > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Halle las expresiones de la amplitud A y de $\tan \phi$ en función de F_0 , m , ω , ω_0 y b . Obtenga A y la fase ϕ a la frecuencia de resonancia $\omega = \omega_0$.

(b) [1 punto] El amplificador de detección síncrona (lock-in) que se muestra en la Fig. 3.1 multiplica una señal de entrada por la señal de referencia del lock-in, $V_R = V_{R0} \sin \omega t$, y después deja pasar *únicamente* la componente continua (dc) de la señal resultante de la multiplicación. Suponga que la señal de entrada viene dada por $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$. Aquí, V_{R0} , V_{i0} , ω_i y ϕ_i

son constantes positivas dadas. Halle la condición que debe cumplir ω (>0) para que la señal de salida no sea nula. ¿Cuál es la expresión de la magnitud de la *señal de salida continua* no nula a esta frecuencia?

(c) [1.5 puntos] Al pasar por el desfasador, la tensión de referencia del lock-in $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ se transforma en $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$. La tensión V'_R , aplicada al tubo piezoeléctrico, excita la palanca con una fuerza $F = c_1 V'_R$. A continuación, el fotodetector convierte el desplazamiento de la palanca, z , en una tensión $V_i = c_2 z$. Aquí, c_1 y c_2 son constantes. Halle la expresión de la magnitud de la *señal de salida continua* para $\omega = \omega_0$.

(d) [2 puntos] Una pequeña variación Δm de la masa de la palanca produce un desplazamiento $\Delta \omega_0$ de la frecuencia de resonancia. Como resultado, la fase ϕ a la frecuencia de resonancia original ω_0 cambia en $\Delta \phi$. Halle la variación de masa Δm correspondiente al cambio de fase $\Delta \phi = \pi/1800$, que es una resolución típica en las mediciones de fase. Los parámetros físicos de la palanca son $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg, $k = 1.0$ N/m y $(b/m) = 1.0 \times 10^3$ s $^{-1}$. Utilice las aproximaciones $(1+x)^a \approx 1+ax$ y $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$ cuando $|x| \ll 1$.

[Parte B]

A partir de ahora, consideremos la situación en la que, además de la fuerza excitadora estudiada en la Parte A, actúan sobre la palanca algunas fuerzas debidas a la muestra, como se indica en la Fig. 3.1.

(e) [1.5 puntos] Suponiendo que la fuerza adicional $f(h)$ depende únicamente de la distancia h entre la palanca y la superficie de la muestra, se puede encontrar una nueva posición de equilibrio h_0 . Cerca de $h = h_0$, podemos escribir $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$, donde c_3 es una constante independiente de h . Halle la nueva frecuencia de resonancia ω'_0 en función de ω_0 , m y c_3 .

(f) [2.5 puntos] Durante el barrido de la superficie mediante el desplazamiento horizontal de la muestra, la punta de la palanca, cargada con $Q = 6e$, se encuentra con un electrón de carga $q = e$ atrapado (localizado en el espacio) a cierta distancia bajo la superficie. Durante el barrido en torno al electrón, se observa que el desplazamiento máximo de la frecuencia de resonancia $\Delta \omega_0$ ($= \omega'_0 - \omega_0$) es mucho menor que ω_0 . Expresé la distancia d_0 entre la palanca y el electrón atrapado cuando se produce el desplazamiento máximo en función de m , q , Q , ω_0 , $\Delta \omega_0$ y la constante de Coulomb k_e . Calcule d_0 en nm ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) para $\Delta \omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$. Los parámetros físicos de la palanca son $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg y $k = 1.0$ N/m. Desprecie cualquier efecto de polarización tanto en la punta de la palanca como en la superficie. Tenga en cuenta que $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ y $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Denotemos por $S_{\text{dc}} = \langle V_R V_i \rangle$ la salida continua según la regla de multiplicación indicada.

• (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Para $\omega = \omega_0$,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

• (b) Una salida continua no nula requiere

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

Su magnitud es

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0}V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

• (c)

$$|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

• (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

El cambio de fase positivo especificado corresponde a un aumento de masa.

• (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

siempre que $m\omega_0^2 - c_3 > 0$.

• (f) El aumento máximo de la frecuencia se produce justo encima del electrón, y

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m\omega_0 \Delta \omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

Solución

Consideramos el movimiento periódico estacionario una vez que el transitorio amortiguado se ha extinguido. En todo el desarrollo utilizamos la convención del problema para el régimen de amortiguamiento débil, según la cual la frecuencia de resonancia es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(a)

Sea $\theta = \omega t - \phi$. Al sustituir $z = A \sin \theta$ en la ecuación de movimiento, se obtiene

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

Desarrollando el miembro derecho e igualando los coeficientes de $\sin \theta$ y $\cos \theta$,

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

Al elevar al cuadrado y sumar estas ecuaciones, resulta

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2] = F_0^2.$$

Utilizando $k = m\omega_0^2$,

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

Dividiendo las ecuaciones de los coeficientes, se obtiene

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

El cuadrante se deduce de las ecuaciones de los coeficientes: para una frecuencia de excitación positiva, $\sin \phi > 0$, mientras que $\cos \phi$ tiene el signo de $\omega_0^2 - \omega^2$. Por tanto, el retraso de fase es menor que $\pi/2$ por debajo de la resonancia y mayor que $\pi/2$ por encima de ella.

Para $\omega = \omega_0$, los términos elástico e inercial se cancelan. En consecuencia,

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

(b)

Utilizando la identidad que transforma un producto en una suma,

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

El filtro ideal de continua conserva únicamente los términos independientes del tiempo. Como ambas frecuencias son positivas, el término de frecuencia suma siempre tiene valor medio nulo. El término de frecuencia diferencia es constante solo cuando

$$\omega = \omega_i.$$

A esta frecuencia,

$$S_{dc} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

por lo que la magnitud es

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

La coincidencia de frecuencias es necesaria, pero no garantiza un resultado no nulo: si $\phi_i = \pi/2 + n\pi$, la entrada está en cuadratura con la referencia y la salida continua se anula. Por tanto, una salida no nula también requiere $\cos \phi_i \neq 0$.

(c)

A la frecuencia especificada, la referencia desfasada excita la palanca con

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

El desplazamiento de la palanca se retrasa $\pi/2$ respecto de la fuerza. Por tanto, el desfase hace que el desplazamiento esté en fase con la referencia original:

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Esta expresión también se obtiene directamente por sustitución en la ecuación de movimiento. La tensión del detector es

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Al multiplicar por la referencia original, se obtiene

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b\omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

Como $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$,

$$S_{dc} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b\omega_0}, \quad \boxed{|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}}.$$

El valor absoluto permite que las constantes de conversión tengan cualquiera de los dos signos.

(d)

La constante elástica no cambia al variar la masa. Por tanto, la nueva frecuencia propia es

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

Para $|\Delta m| \ll m$, la aproximación binomial proporcionada da

$$\boxed{\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}}.$$

La frecuencia de medida se mantiene en el valor original ω_0 . Suponiendo que b no cambia, la nueva fase satisface

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b\omega_0}{k - (m + \Delta m)\omega_0^2}.$$

Puesto que $k = m\omega_0^2$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0 \Delta m}.$$

Aplicando $\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$,

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0 \Delta m},$$

y, por tanto,

$$\boxed{\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi}.$$

Con los parámetros dados se obtiene

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

Así,

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

o, con dos cifras significativas,

$$\boxed{\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}}.$$

Aquí, $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$ y $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$, en concordancia con ambas aproximaciones de variaciones pequeñas. El cambio de frecuencia asociado es aproximadamente -0.87 s^{-1} .

(e)

Tomemos como positivos el desplazamiento y la fuerza de la muestra dirigidos en sentido de alejamiento de esta. Sea z_{eq} el nuevo desplazamiento estático, correspondiente a la separación h_0 . El equilibrio estático de fuerzas da

$$kz_{\text{eq}} = f(h_0).$$

Para un pequeño desplazamiento respecto de este equilibrio, definimos

$$x = z - z_{\text{eq}} = h - h_0.$$

Incluyendo la fuerza de la muestra, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

Introducimos la fuerza linealizada $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$ y restamos la ecuación de equilibrio estático:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

Por tanto,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

El gradiente de fuerza modifica la constante elástica efectiva, que pasa a ser $k - c_3$, mientras que la fuerza constante solo desplaza el equilibrio. Así,

$$\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}}.$$

Un equilibrio oscilatorio estable requiere $k - c_3 > 0$; la interpretación en términos de resonancia mantiene también la hipótesis de amortiguamiento débil.

(f)

Como $q = e$ y $Q = 6e$,

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

La interacción es repulsiva. Para determinar dónde es mayor el desplazamiento de frecuencia, sea ρ la separación horizontal entre la punta y el electrón, y sea d su separación vertical. La ley de Coulomb da la componente de la fuerza dirigida hacia arriba

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e q Q d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Un desplazamiento vertical de la palanca modifica d en la misma cantidad. Por tanto, el gradiente de fuerza pertinente es

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e q Q \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Para un pequeño desplazamiento de frecuencia, el apartado (e) da

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

de modo que

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e q Q}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Al orden dominante en la interacción débil, la altura de barrido puede considerarse fija. Esta expresión alcanza su máximo positivo en $\rho = 0$: mientras el numerador es positivo, disminuye con ρ y el denominador aumenta; más allá de $\rho = \sqrt{2}d$, el desplazamiento es no positivo.

Por tanto, el máximo se produce justo encima del electrón, donde la distancia entre la punta y el electrón es d_0 . En ese punto,

$$f_z = \frac{k_e q Q}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e q Q}{d_0^3}.$$

Sustituyendo en el apartado (e), resulta

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e q Q}{md_0^3}.$$

En consecuencia,

$$2\omega_0\Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{md_0^3}.$$

Como $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$, despreciamos el cuadrado del desplazamiento:

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m\omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

Numéricamente,

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

y

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

Por tanto,

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

lo que da

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

El desplazamiento relativo de frecuencia es $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$, lo que confirma la validez de la aproximación de desplazamiento pequeño.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.