

IPhO 2004

Theorieaufgaben und Lösungen · Pohang, Korea · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2004/

Aufgabe 1: „Ping-Pong“-Widerstand

Ein Kondensator besteht aus zwei kreisförmigen, parallelen Platten mit jeweils dem Radius R , deren Abstand d beträgt, wobei $d \ll R$ gilt, wie in Abb. 1.1(a) dargestellt. Die obere Platte ist an eine *konstante* Spannungsquelle angeschlossen und liegt auf dem Potential V , während die untere Platte geerdet ist. Anschließend wird eine dünne, kleine Scheibe der Masse m mit dem Radius r ($\ll R, d$) und der Dicke t ($\ll r$) mittig auf die untere Platte gelegt, wie in Abb. 1.1(b) dargestellt.

Wir nehmen an, dass sich zwischen den Platten Vakuum mit der Dielektrizitätskonstante ϵ_0 befindet, dass die Platten und die Scheibe aus idealen Leitern bestehen und dass sämtliche elektrostatischen Randeﬀekte vernachlässigt werden können. Die Induktivität des gesamten Stromkreises und relativistische Eﬀekte können ohne Weiteres außer Acht gelassen werden. Auch der Einfluss von Spiegelladungen kann vernachlässigt werden.

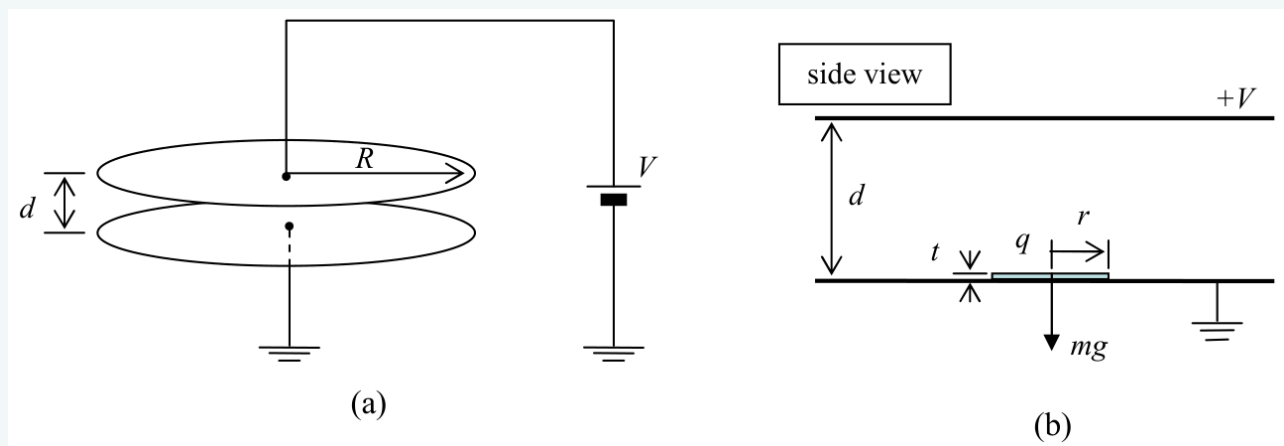


Abbildung 1.1 Schematische Darstellungen von (a) einem an eine konstante Spannungsquelle angeschlossenen Plattenkondensator und (b) einer Seitenansicht der parallelen Platten mit einer kleinen Scheibe im Inneren des Kondensators. (Einzelheiten siehe Text.)

(a) [1.2 Punkte] Berechnen Sie die elektrostatische Kraft F_p zwischen den Platten im Abstand d , bevor die Scheibe dazwischengelegt wird, wie in Abb. 1.1(a) dargestellt.

(b) [0.8 Punkte] Wenn die Scheibe auf die untere Platte gelegt wird, hängt die Ladung q auf der Scheibe in Abb. 1.1(b) gemäß $q = \chi V$ mit der Spannung V zusammen. Bestimmen Sie χ in Abhängigkeit von r , d und ϵ_0 .

(c) [0.5 Punkte] Die parallelen Platten stehen senkrecht zu einem homogenen Schwerfeld g . Damit die anfangs ruhende Scheibe abhebt, muss die angelegte Spannung über eine Schwellenspannung V_{th} erhöht werden. Bestimmen Sie V_{th} in Abhängigkeit von m , g , d und χ .

(d) [2.3 Punkte] Wenn $V > V_{\text{th}}$ gilt, bewegt sich die Scheibe zwischen den Platten auf und ab. (Nehmen Sie an, dass sich die Scheibe ausschließlich vertikal *ohne jegliches Taumeln* bewegt.) Die Stöße zwischen der Scheibe und den Platten sind unelastisch mit der Stoßzahl $\eta \equiv (v_{\text{after}}/v_{\text{before}})$, wobei v_{before} und v_{after} die Geschwindigkeitsbeträge der Scheibe unmittelbar vor bzw. nach dem Stoß sind. Die Platten sind ortsfest befestigt. Der Geschwindigkeitsbetrag der Scheibe *unmittelbar nach* dem Stoß an der unteren Platte nähert sich einem „stationären Geschwindigkeitsbetrag“ v_s , der wie folgt von V abhängt:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten α und β in Abhängigkeit von m , g , χ , d und η . Nehmen Sie an, dass die gesamte Oberfläche der Scheibe die Platte gleichmäßig und gleichzeitig berührt, sodass bei jedem Stoß der vollständige Ladungsaustausch augenblicklich erfolgt.

(e) [2.2 Punkte] Nach Erreichen des stationären Zustands lässt sich der zeitlich gemittelte Strom I durch die Kondensatorplatten für $qV \gg mgd$ durch $I = \gamma V^2$ annähern. Drücken Sie den Koeffizienten γ durch m , χ , d und η aus.

(f) [3 Punkte] Wird die angelegte Spannung V (äußerst langsam) verringert, so gibt es eine kritische Spannung V_c , unterhalb derer der Ladungsfluss zum Erliegen kommt. Bestimmen Sie V_c und den zugehörigen Strom I_c in Abhängigkeit von m , g , χ , d und η . Vergleichen Sie V_c mit der in (c) behandelten Abhebe-Schwellenspannung V_{th} und skizzieren Sie grob die $I - V$ -Kennlinie, wenn V im Bereich von $V = 0$ bis $3V_{\text{th}}$ erhöht und verringert wird.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier bezeichnet $q = \chi V$ den **Betrag** der Scheibenladung, im Einklang mit $qV \gg mgd$ in (e). Ihre vorzeichenbehaftete Ladung ist nach dem Kontakt mit der unteren Platte $-q$ und nach dem Kontakt mit der oberen Platte $+q$. Die folgenden Ergebnisse für die Hin- und Herbewegung setzen $0 < \eta < 1$ voraus.

- (a) Die Kraft ist anziehend und hat den Betrag

$$F_p = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

- (b)

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

- (c)

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

- (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

- (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

- (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

Beim Erhöhen von V bleibt der Strom bis V_{th} null und springt dann auf den leitenden Zweig. Beim Verringern von V folgt er diesem Zweig bis (V_c, I_c) und fällt dann auf null. Bei hoher Spannung nähert sich der Zweig $I = \gamma V^2$ an.

Der Grenzfall des vollständigen Haftenbleibens $\eta = 0$ ist singulär: Die Anwendung der Kontaktbedingung nach jedem Aufprall auf die untere Platte ergibt

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

für den Grenzwert des Stroms auf der leitenden Seite, ohne Hysterese. Bei $\eta = 1$ gibt es keinen endlichen stationären Zustand.

Lösung

Im Folgenden wird die Dicke der Scheibe gegenüber d vernachlässigt, und es werden die angegebenen Näherungen bezüglich Randeffekten und Spiegelladungen verwendet. Das angelegte Feld hat den Betrag

$$E = \frac{V}{d}$$

und zeigt für $V > 0$ nach unten.

(a)

Die Flächenladungsdichte auf jeder der beiden Kondensatorplatten hat den Betrag

$$\sigma = \varepsilon_0 E.$$

Bei der Berechnung der Kraft auf eine Platte muss ihr eigenes Feld ausgeschlossen werden. Das von der gegenüberliegenden Platte erzeugte Feld beträgt $E/2$, sodass sich für den elektrostatischen Druck ergibt:

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Multiplikation mit der Plattenfläche ergibt

$$F_p = p\pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

Die entgegengesetzt geladenen Platten ziehen einander an.

(b)

Solange die Scheibe auf der unteren Platte ruht, bildet sie einen Teil dieses Leiters. Ihre freiliegende Oberseite trägt die Flächenladungsdichte $-\varepsilon_0 E$. Der Betrag ihrer Ladung ist daher

$$q = \varepsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

Folglich gilt

$$\chi = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

Würde q stattdessen als vorzeichenbehaftete Ladung beim Kontakt mit der unteren Platte aufgefasst, wäre der zugehörige Koeffizient negativ; die spätere Verwendung von qV als positiver elektrischer Arbeit legt die hier verwendete Betragskonvention fest.

(c)

Wenn die Scheibe auf der unteren Platte ruht, ist sie Teil der Plattenoberfläche. Die auf sie wirkende, nach oben gerichtete elektrische Kraft ist daher der in (a) ermittelte Druck, multipliziert mit der Scheibenfläche:

$$F_{\text{contact}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

Bezeichnet N die nach oben gerichtete Normalkraft, so erfordert das Gleichgewicht

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

Das Abheben wird möglich, sobald die erforderliche Normalkraft null erreicht. Daher gilt

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

woraus folgt:

$$V_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

Der Faktor $1/2$ ist hier wesentlich. Sobald sich die Scheibe im Flug befindet, beträgt die auf sie wirkende resultierende elektrische Kraft im homogenen angelegten Feld bei der vorgeschriebenen Vernachlässigung von Spiegelladungskräften qE . Die Kraft bei Kontakt und die Kraft im Flug müssen daher getrennt behandelt werden.

(d)

Wir definieren den Betrag der elektrischen Beschleunigung während des Fluges durch

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

Nach dem Verlassen der unteren Platte trägt die Scheibe die Ladung $-q$, sodass ihre nach oben gerichtete Beschleunigung $a_e - g$ beträgt. Nach dem Berühren der oberen Platte wird ihre Ladung zu $+q$, sodass ihre nach unten gerichtete Beschleunigung $a_e + g$ beträgt.

Es sei v_n der Geschwindigkeitsbetrag der Aufwärtsbewegung unmittelbar nach dem n -ten Stoß an der unteren Platte. Es sei u_n der Geschwindigkeitsbetrag unmittelbar vor dem folgenden Stoß an der oberen Platte und w_n der Geschwindigkeitsbetrag unmittelbar vor dem nächsten Stoß an der unteren Platte.

Der Arbeit-Energie-Satz liefert für den Aufwärtsflug

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

Der Stoß an der oberen Platte reduziert den Geschwindigkeitsbetrag auf ηu_n . Für den Abwärtsflug ergibt sich daher

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

Schließlich ergibt der Stoß an der unteren Platte $v_{n+1} = \eta w_n$. Die Kombination dieser Beziehungen liefert

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Für $0 < \eta < 1$ werden die Abweichungen von v_n^2 von seinem Fixpunkt pro Zyklus mit dem Faktor η^4 multipliziert und nehmen somit ab. Im stationären Zustand gilt

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

Damit folgt

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Der Vergleich mit Gl. (1.1) ergibt

$$\boxed{\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}}.$$

(e)

In einem vollständigen Zyklus ändert sich die Ladung der Scheibe an der oberen Platte von $-q$ auf $+q$ und an der unteren Platte von $+q$ auf $-q$. Somit fließt pro vollständigem Zyklus eine Ladung $2q$ durch die Quelle. Mit der Periodendauer T gilt

$$I = \frac{2q}{T}.$$

Für $qV \gg mgd$ gilt $a_e \gg g$, sodass die Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Die beiden Flüge haben dann dieselbe Dauer τ , mit $T = 2\tau$.

Es sei w der Geschwindigkeitsbetrag unmittelbar vor jedem der beiden Aufpralle. Der Geschwindigkeitsbetrag unmittelbar nach dem Aufprall beträgt ηw . Während jedes Fluges gilt

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

Da die Beschleunigung konstant ist, beträgt der mittlere Geschwindigkeitsbetrag während eines Fluges $(1 + \eta)w/2$. Daher gilt

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

und

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

Für $V \geq 0$ gilt

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}} V^2.$$

Somit folgt

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}}}.$$

(f)

Die Näherung für hohe Spannungen aus (e) kann nicht zur Bestimmung des Erliegens des Stromflusses verwendet werden. Die Schwerkraft muss berücksichtigt werden.

Es seien u und w die stationären Geschwindigkeitsbeträge unmittelbar vor dem Aufprall auf die obere bzw. die untere Platte. Aus (d) folgt $v_s = \eta w$, und

$$w^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} + \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

Mit der Energiegleichung für den Aufwärtsflug,

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

erhalten wir

$$u^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} - \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

Beim Verringern der Spannung ist die periodische Grenzbahn diejenige, auf der die Scheibe die obere Platte gerade noch mit der Geschwindigkeit null erreicht. Setzen wir $u = 0$, so ergibt sich

$$a_{e,c} = g \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}.$$

Da $a_e = \chi V^2 / (md)$ gilt, folgt

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}}}.$$

Unterhalb dieser Spannung kann die Scheibe keine Flüge aufrechterhalten, bei denen sie die obere Platte erreicht. Sobald sie diese Platte nicht mehr erreicht, kehrt sich ihre Ladung nicht um, und bei den aufeinanderfolgenden Stößen an der unteren Platte wird ihre verbleibende mechanische Energie dissipiert.

Bei der kritischen Spannung gilt

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1+\eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

Der Aufwärtsflug beginnt mit dem Geschwindigkeitsbetrag ηw_c und endet bei null; der Abwärtsflug beginnt bei null und endet mit w_c . Aus den mittleren Geschwindigkeitsbeträgen folgt

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

Der Strom unmittelbar vor dem Erliegen des Stromflusses beträgt daher

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

Einsetzen von V_c ergibt

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

Für jedes feste $0 < \eta < 1$ ist dieser Strom positiv, sodass beim Erliegen des Stromflusses ein endlicher Sprung nach unten auftritt.

Um die Skizze genau festzulegen, lässt sich der vollständige leitende Zweig ohne Vernachlässigung der Schwerkraft angeben. Seine beiden Flugzeiten sind

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

Somit gilt

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

wobei $u(V)$ und $w(V)$ oben angegeben sind. Diese Ausdrücke bleiben gültig, wenn der Aufwärtsflug verzögert erfolgt.

Der Vergleich mit (c) ergibt

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} < 1.$$

Die geforderte Skizze weist daher die folgenden Merkmale auf:

- **Steigende Spannung:** Man folgt $I = 0$ vom Ursprung bis V_{th} . Knapp oberhalb von V_{th} hebt die Scheibe ab, und der stationäre Strom springt auf $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$. Anschließend folgt man dem leitenden Zweig nach oben bis $3V_{\text{th}}$.
- **Sinkende Spannung:** Man folgt dem leitenden Zweig zurück durch V_{th} und weiter bis (V_c, I_c) . Knapp unterhalb von V_c fällt der Strom auf $I = 0$; danach folgt man der Spannungsachse zurück zum Ursprung.
- **Verlauf bei hoher Spannung:** Der leitende Zweig nähert sich der Parabel $I = \gamma V^2$ an. Bei $3V_{\text{th}}$ gilt $qV = 18mgd$, sodass $I \approx 9\gamma V_{\text{th}}^2$ ein geeigneter näherungsweiser Endpunkt für die grobe Skizze ist.

Gleichwertig gilt abseits der Sprungstellen:

Spannungsbereich	Steigendes V	Sinkendes V
$0 \leq V < V_c$	0	0
$V_c < V < V_{th}$	0	$I_{on}(V)$
$V_{th} < V \leq 3V_{th}$	$I_{on}(V)$	$I_{on}(V)$

Das Intervall $V_c < V < V_{th}$ ist das Hysteresintervall: Eine ruhende Scheibe bleibt in Ruhe, während eine bereits bewegte Scheibe weiterhin hin und her pendelt.

Der Vollständigkeit halber muss **exakt** $\eta = 0$ gesondert behandelt werden. Nach jedem Aufprall auf die untere Platte ruht die Scheibe, sodass die Abhebebedingung bei Kontakt aus (c) erneut erfüllt sein muss. Folglich kommt der Strom bei V_{th} zum Erliegen und nicht beim Grenzwert der Formel für die kritische Spannung bei positivem η . Auf der leitenden Seite gilt für $V \rightarrow V_{th}^+$, dass $a_e \rightarrow 2g$, und

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

Daher folgt

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

Beide Schaltspannungen fallen dann zusammen, sodass keine Hysteresis auftritt. Am anderen Randfall, $\eta = 1$, dissipieren die Stöße keine Energie, während das elektrische Feld pro Zyklus $2qV$ zuführt; ein endlicher stationärer Geschwindigkeitsbetrag kann daher nicht existieren.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Aufsteigender Ballon

Ein mit Heliumgas gefüllter Gummiballon steigt hoch in den Himmel auf, wo Druck und Temperatur mit zunehmender Höhe abnehmen. Nehmen Sie bei den folgenden Fragen an, dass der Ballon unabhängig von der Nutzlast kugelförmig bleibt, und vernachlässigen Sie das Volumen der Nutzlast. Nehmen Sie außerdem an, dass die Temperatur des Heliumgases im Inneren des Ballons stets gleich der Temperatur der Umgebungsluft ist, und behandeln Sie alle Gase als ideale Gase. Die universelle Gaskonstante ist $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, und die molaren Massen von Helium und Luft betragen $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ bzw. $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$. Die Fallbeschleunigung beträgt $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

[Teil A]

(a) [1.5 Punkte] Der Druck der Umgebungsluft sei P und ihre Temperatur T . Aufgrund der Oberflächenspannung des Ballons ist der Druck im Inneren höher als der Außendruck. Der Ballon enthält n Mol Heliumgas, und der Innendruck beträgt $P + \Delta P$. Bestimmen Sie die auf den Ballon wirkende Auftriebskraft F_B als Funktion von P und ΔP .

(b) [2 Punkte] An einem bestimmten Sommertag in Korea wurde festgestellt, dass die Lufttemperatur T in der Höhe z über dem Meeresspiegel im Bereich $0 < z < 15$ km durch $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ mit $z_0 = 49$ km und $T_0 = 303$ K gegeben war. Druck und Dichte auf Meereshöhe betrugen $P_0 = 1.0$ atm = 1.01×10^5 Pa bzw. $\rho_0 = 1.16$ kg/m³. In diesem Höhenbereich hat der Druck die Form

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

Drücken Sie η durch z_0 , ρ_0 , P_0 und g aus und bestimmen Sie seinen Zahlenwert auf zwei signifikante Stellen. Behandeln Sie die Fallbeschleunigung als höhenunabhängige Konstante.

[Teil B]

Wird ein kugelförmiger Gummiballon mit dem Radius r_0 im ungedehnten Zustand zu einer Kugel mit dem Radius r ($\geq r_0$) aufgeblasen, so speichert die Ballonoberfläche durch die Dehnung zusätzliche elastische Energie. In einer vereinfachten Theorie lässt sich die elastische Energie bei konstanter Temperatur T ausdrücken als

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa R T \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

wobei $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) das Aufblähungsverhältnis ist und κ eine Konstante mit der Einheit mol/m².

(c) [2 Punkte] Drücken Sie ΔP durch die in Gl. (2.2) angegebenen Parameter aus und skizzieren Sie ΔP als Funktion von $\lambda = r/r_0$.

(d) [1.5 Punkte] Die Konstante κ kann aus der zum Aufblasen des Ballons benötigten Gasmenge bestimmt werden. Bei $T_0 = 303$ K und $P_0 = 1.0$ atm = 1.01×10^5 Pa enthält ein ungedehnter Ballon ($\lambda = 1$) $n_0 = 12.5$ Mol Helium. Insgesamt sind $n = 3.6n_0 = 45$ Mol erforderlich, um den Ballon bei denselben Werten von T_0 und P_0 auf $\lambda = 1.5$ aufzublasen. Drücken Sie den durch $a = \kappa/\kappa_0$ definierten Ballonparameter a durch n , n_0 und λ aus, wobei $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$. Berechnen Sie a auf zwei signifikante Stellen.

[Teil C]

Ein Ballon wird auf Meereshöhe wie in (d) vorbereitet (mit $n = 3.6n_0 = 45$ Mol Heliumgas bei $T_0 = 303$ K und $P_0 = 1$ atm = 1.01×10^5 Pa auf $\lambda = 1.5$ aufgeblasen). Die Gesamtmasse einschließlich Gas, Ballonhülle und weiterer Nutzlasten beträgt $M_T = 1.12$ kg. Nun wird der Ballon von Meereshöhe aus aufsteigen gelassen.

(e) [3 Punkte] Nehmen Sie an, dass der Ballon schließlich in der Höhe z_f zum Stillstand kommt, in der die Auftriebskraft die gesamte Gewichtskraft ausgleicht. Bestimmen Sie z_f und das Aufblähungsverhältnis λ_f in dieser Höhe. Geben Sie die Ergebnisse mit zwei signifikanten Stellen an. Nehmen Sie an, dass während des Aufstiegs weder Drifteffekte noch Gasverluste auftreten.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) Die nach oben gerichtete Auftriebskraft beträgt

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

- (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

- (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Die Kurve beginnt bei $(1, 0)$, erreicht ihr einziges Maximum bei $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ und fällt anschließend von oben gegen null ab.

- (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

- (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

Die ungerundeten Ergebnisse sind $z_f = 11.095 \text{ km}$ und $\lambda_f = 2.14594$; mit den gerundeten Werten $\eta = 5.5$ und $a = 0.11$ ergeben sich auf zwei signifikante Stellen dieselben Ergebnisse.

Lösung

(a)

Nach dem archimedischen Prinzip ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft der verdrängten Luft. Wird die Dichte der Umgebungsluft über die Abmessungen des Ballons hinweg als gleichförmig betrachtet, gilt

$$F_B = \rho_A V g.$$

Die idealen Gasgleichungen für die umgebende Luft und das Helium ergeben

$$\rho_A = \frac{PM_A}{RT}, \quad V = \frac{nRT}{P + \Delta P}.$$

Die gemeinsame Temperatur kürzt sich daher heraus:

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

Dies ist allein die Auftriebskraft. Die Gewichtskräfte von Helium, Hülle und Nutzlast gehen gesondert in die gesamte Kräftebilanz ein.

(b)

Die Atmosphäre befindet sich im hydrostatischen Gleichgewicht:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

Für als ideales Gas behandelte Luft mit konstanter Zusammensetzung gilt

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

Mit den vorgegebenen Temperatur- und Druckprofilen folgt

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Durch Differenzieren von Gl. (2.1) und Einsetzen in die hydrostatische Gleichung erhält man

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

Folglich gilt

$$\boxed{\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517 \dots,$$

also auf zwei signifikante Stellen

$$\boxed{\eta = 5.5}.$$

(c)

Bei einer quasistatischen Ausdehnung mit konstanter Temperatur bewirkt die vom inneren Überdruck verrichtete Arbeit die Zunahme der im Modell beschriebenen elastischen Energie:

$$\Delta P dV = dU.$$

Das Ballonvolumen ist

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

Aus Gl. (2.2) folgt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa R T (\lambda - \lambda^{-5}).$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV / d\lambda} = \frac{4\kappa R T}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})}.$$

Zur Beschreibung der Skizze definieren wir die Druckskala

$$C = \frac{4\kappa R T}{r_0}.$$

Dann gilt

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C\lambda^{-8}(7 - \lambda^6).$$

Die Kurve weist folgende Eigenschaften auf:

- Ihr physikalischer Definitionsbereich ist $\lambda \geq 1$, und sie beginnt bei $\Delta P = 0$ für $\lambda = 1$.
- Sie steigt mit positiver Steigung bis

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309 \dots$$

- Ihr Maximalwert beträgt

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- Nach dem Maximum fällt sie monoton ab und bleibt dabei positiv. Bei starker Aufblähung gilt

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \longrightarrow 0^+,$$

sodass die horizontale Achse eine Asymptote ist.

(d)

Es sei

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

Für $\lambda = 1$ ergibt Teil (c) $\Delta P = 0$. Daher gilt für den ungedehnten Ballon

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

Da

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

beträgt der Überdruck bei der Temperatur T_0

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Für den aufgeblasenen Ballon gilt

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

Division durch $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ ergibt

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

Daher folgt

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

Einsetzen ergibt

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624 \dots,$$

und somit

$$a = 0.11.$$

(e)

Wir definieren die dimensionslose Temperatur

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

Dann gilt

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

Da kein Helium entweicht, bleibt n konstant. Seine ideale Gasgleichung lautet

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

Unter Verwendung von $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ und durch Division durch t ergibt sich

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

Die verdrängte Luftmasse folgt aus der Dichte der als ideales Gas behandelten Luft:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{R T} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

In der Endhöhe gleicht die Auftriebskraft die gesamte Gewichtskraft aus:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

also

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

Die Gewichtskraft des Heliums ist bereits in $M_T g$ enthalten.

Durch Eliminieren des atmosphärischen Faktors aus (1) und (2) erhält man eine Gleichung allein für das endgültige Aufblähungsverhältnis:

$$a (\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

Mit ungerundeten Zwischenwerten gilt

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346 \dots,$$

und daher

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346 \dots}{0.109624 \dots} = 4.557886 \dots$$

Die linke Seite wächst für $\lambda_f \geq 1$ streng monoton, da ihre Ableitung $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$ ist. Somit gibt es genau eine physikalisch zulässige Lösung:

$$\lambda_f = 2.145936 \dots$$

Gleichung (2) liefert nun

$$t_f = \left(\frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

Folglich gilt

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

Auf zwei signifikante Stellen ergibt sich

$$\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}.$$

Die Endhöhe liegt innerhalb des angegebenen atmosphärischen Bereichs. Der Ballon hat außerdem zu Beginn einen positiven Nettoauftrieb: Auf Meereshöhe beträgt die von ihm verdrängte Luftmasse

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Atomsondenmikroskop

Atomsondenmikroskope (APMs) sind leistungsfähige Werkzeuge in den Nanowissenschaften. Die Bewegung eines Federbalkens in einem APM lässt sich mit einem Photodetektor erfassen, der den reflektierten Laserstrahl überwacht, wie in Abb. 3.1 dargestellt. Der Federbalken kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen, und seine Auslenkung z als Funktion der Zeit t lässt sich durch die Gleichung

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

beschreiben, wobei m die Masse des Federbalkens, $k = m\omega_0^2$ seine Federkonstante, b ein kleiner Dämpfungskoeffizient mit $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ und schließlich F eine äußere Antriebskraft der piezoelektrischen Röhre ist.

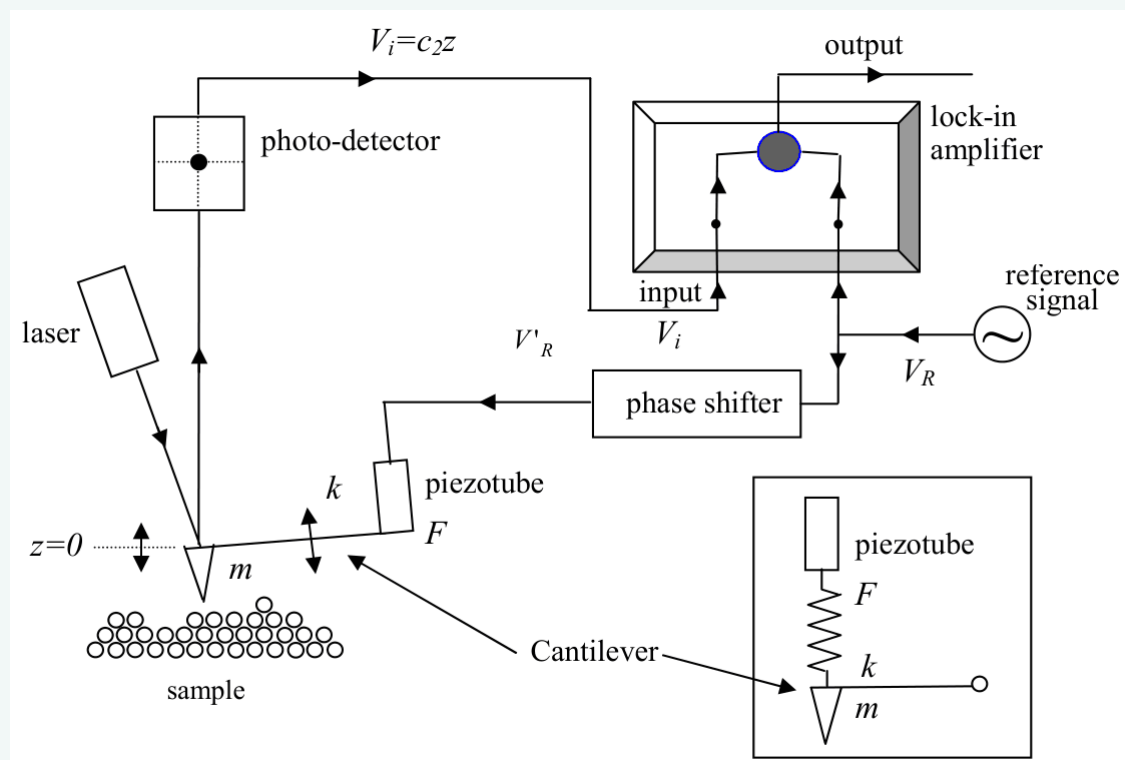


Abbildung 3.1 Schematische Darstellung eines Rastersondenmikroskops (SPM). Die Einfügung in der unteren rechten Ecke zeigt ein vereinfachtes mechanisches Modell zur Beschreibung der Kopplung zwischen der Piezoröhre und dem Federbalken.

[Teil A]

(a) [1.5 Punkte] Für $F = F_0 \sin \omega t$ lässt sich eine Lösung $z(t)$ von Gl. (3.1) als $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ mit $A > 0$ und $0 \leq \phi \leq \pi$ schreiben. Bestimmen Sie die Ausdrücke für die Amplitude A und $\tan \phi$ in Abhängigkeit von F_0 , m , ω , ω_0 und b . Bestimmen Sie A und die Phase ϕ bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$.

(b) [1 Punkt] Der in Abb. 3.1 dargestellte Lock-in-Verstärker multipliziert ein Eingangssignal mit dem Lock-in-Referenzsignal $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ und lässt anschließend *nur* den Gleichanteil des Produktsignals passieren. Nehmen Sie an, dass das Eingangssignal durch $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ gegeben ist. Dabei sind V_{R0} , V_{i0} , ω_i und ϕ_i vorgegebene positive Konstanten. Bestimmen Sie die Bedingung an ω (>0) für ein nicht verschwindendes Ausgangssignal. Wie lautet der Ausdruck für den Betrag des nicht verschwindenden *Gleichspannungsausgangssignals* bei dieser Frequenz?

(c) [1.5 Punkte] Beim Durchlaufen des Phasenschiebers wird die Lock-in-Referenzspannung $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ in $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ umgewandelt. Die an die piezoelektrische Röhre angelegte Spannung V'_R treibt den Federbalken mit der Kraft $F = c_1 V'_R$ an. Anschließend wandelt der Photodetektor die Auslenkung z des Federbalkens in eine Spannung $V_i = c_2 z$ um. Dabei sind c_1 und c_2 Konstanten. Bestimmen Sie den Ausdruck für den Betrag des *Gleichspannungsausgangssignals* bei $\omega = \omega_0$.

(d) [2 Punkte] Eine kleine Änderung Δm der Masse des Federbalkens verschiebt die Resonanzfrequenz um $\Delta \omega_0$. Dadurch verschiebt sich die Phase ϕ bei der ursprünglichen Resonanzfrequenz ω_0 um $\Delta \phi$. Bestimmen Sie die Massenänderung Δm , die einer Phasenverschiebung von $\Delta \phi = \pi/1800$ entspricht, einer typischen Auflösung bei Phasenmessungen. Die physikalischen Parameter des Federbalkens sind $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$, $k = 1.0 \text{ N/m}$ und $(b/m) = 1.0 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. Verwenden Sie für $|x| \ll 1$ die Näherungen $(1+x)^a \approx 1+ax$ und $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$.

[Teil B]

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass neben der in Teil A behandelten Antriebskraft weitere, von der Probe verursachte Kräfte auf den Federbalken wirken, wie in Abb. 3.1 dargestellt.

(e) [1.5 Punkte] Unter der Annahme, dass die zusätzliche Kraft $f(h)$ nur vom Abstand h zwischen dem Federbalken und der Probenoberfläche abhängt, lässt sich eine neue Gleichgewichtslage h_0 bestimmen. In der Nähe von $h = h_0$ können wir $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ schreiben, wobei c_3 bezüglich h konstant ist. Bestimmen Sie die neue Resonanzfrequenz ω'_0 in Abhängigkeit von ω_0 , m und c_3 .

(f) [2.5 Punkte] Beim Abtasten der Oberfläche durch horizontales Verschieben der Probe trifft die mit $Q = 6e$ geladene Spitze des Federbalkens auf ein Elektron mit der Ladung $q = e$, das in einem gewissen Abstand unterhalb der Oberfläche eingefangen (räumlich lokalisiert) ist. Beim Abtasten der Umgebung des Elektrons wird beobachtet, dass die maximale Verschiebung der Resonanzfrequenz $\Delta \omega_0$ ($= \omega'_0 - \omega_0$) sehr viel kleiner als ω_0 ist. Drücken Sie den Abstand d_0 zwischen dem Federbalken und dem eingefangenen Elektron bei maximaler Verschiebung durch

m , q , Q , ω_0 , $\Delta\omega_0$ und die Coulomb-Konstante k_e aus. Berechnen Sie d_0 in nm ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) für $\Delta\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$. Die physikalischen Parameter des Federbalkens sind $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$ und $k = 1.0 \text{ N/m}$. Vernachlässigen Sie jegliche Polarisierungseffekte sowohl in der Spitze des Federbalkens als auch in der Oberfläche. Beachten Sie, dass $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ und $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ gelten.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir bezeichnen das Gleichspannungsausgangssignal gemäß der angegebenen Multiplikationsvorschrift mit $S_{\text{dc}} = \langle V_R V_i \rangle$.

- (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Bei $\omega = \omega_0$ gilt

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

- (b) Ein von null verschiedenes Gleichspannungsausgangssignal erfordert

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

Sein Betrag ist

$$|S_{\text{dc}}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

- (c)

$$|S_{\text{dc}}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

- (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Die angegebene positive Phasenverschiebung entspricht einer Massenzunahme.

- (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

vorausgesetzt, dass $m\omega_0^2 - c_3 > 0$ gilt.

- **(f)** Die maximale Frequenzerhöhung tritt direkt über dem Elektron auf, und es gilt

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta \omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

Lösung

Wir betrachten die stationäre periodische Bewegung nach dem Abklingen des gedämpften Einschwingvorgangs. Durchgehend verwenden wir die in der Aufgabe für schwache Dämpfung gewählte Konvention, nach der die Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ist.

(a)

Sei $\theta = \omega t - \phi$. Einsetzen von $z = A \sin \theta$ in die Bewegungsgleichung ergibt

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Gleichsetzen der Koeffizienten von $\sin \theta$ und $\cos \theta$ erhalten wir

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen liefert

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2] = F_0^2.$$

Mit $k = m\omega_0^2$ folgt

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}.$$

Division der Koeffizientengleichungen ergibt

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Der Quadrant ergibt sich aus den Koeffizientengleichungen: Bei positiver Antriebsfrequenz gilt $\sin \phi > 0$, während $\cos \phi$ das Vorzeichen von $\omega_0^2 - \omega^2$ hat. Somit ist die Phasenverzögerung unterhalb der Resonanz kleiner als $\pi/2$ und oberhalb der Resonanz größer als $\pi/2$.

Bei $\omega = \omega_0$ heben sich der elastische Term und der Trägheitsterm gegenseitig auf. Folglich gilt

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

(b)

Mit der Produkt-zu-Summe-Identität erhalten wir

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

Das ideale Gleichanteilter lässt nur zeitunabhängige Terme passieren. Da beide Frequenzen positiv sind, ergibt der Term mit der Summenfrequenz im zeitlichen Mittel stets null. Der Term mit der Differenzfrequenz ist nur dann konstant, wenn

$$\boxed{\omega = \omega_i}.$$

Bei dieser Frequenz gilt

$$S_{\text{dc}} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

also ist der Betrag

$$\boxed{|S_{\text{dc}}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|}.$$

Die Übereinstimmung der Frequenzen ist notwendig, garantiert jedoch kein von null verschiedenes Ergebnis: Für $\phi_i = \pi/2 + n\pi$ steht das Eingangssignal in Quadratur zum Referenzsignal, und das Gleichspannungsausgangssignal verschwindet. Ein nicht verschwindendes Ausgangssignal erfordert daher zusätzlich $\cos \phi_i \neq 0$.

(c)

Bei der angegebenen Frequenz treibt das phasenverschobene Referenzsignal den Federbalken mit der Kraft

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

Die Auslenkung des Federbalkens hinkt der Kraft um $\pi/2$ nach. Der Phasenschieber bewirkt daher, dass die Auslenkung mit dem ursprünglichen Referenzsignal in Phase ist:

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Dieser Ausdruck folgt auch unmittelbar durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung. Die Detektorspannung ist

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Multiplikation mit dem ursprünglichen Referenzsignal ergibt

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b\omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

Wegen $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$ gilt

$$S_{\text{dc}} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b\omega_0}, \quad \boxed{|S_{\text{dc}}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b\omega_0}}.$$

Der Betrag berücksichtigt beide möglichen Vorzeichen der Umwandlungskonstanten.

(d)

Die Federkonstante bleibt bei der Massenänderung unverändert. Die neue Eigenfrequenz ist daher

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

Für $|\Delta m| \ll m$ ergibt die angegebene binomische Näherung

$$\boxed{\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}}.$$

Die Messfrequenz bleibt auf dem ursprünglichen Wert ω_0 . Unter der Annahme eines unveränderten b erfüllt die neue Phase die Beziehung

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b\omega_0}{k - (m + \Delta m)\omega_0^2}.$$

Wegen $k = m\omega_0^2$ gilt

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0\Delta m}.$$

Mit $\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$ folgt

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0\Delta m},$$

und damit

$$\boxed{\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi}.$$

Die gegebenen Parameter liefern

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

oder auf zwei signifikante Stellen gerundet

$$\boxed{\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}}.$$

Hier sind $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$ und $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$, was mit beiden Näherungen für kleine Änderungen vereinbar ist. Die zugehörige Frequenzänderung beträgt ungefähr -0.87 s^{-1} .

(e)

Wir wählen die positive Richtung der Auslenkung und der von der Probe ausgeübten Kraft von der Probe weg. Sei z_{eq} die neue statische Auslenkung, die dem Abstand h_0 entspricht. Das statische Kräftegleichgewicht liefert

$$kz_{\text{eq}} = f(h_0).$$

Für eine kleine Auslenkung aus dieser Gleichgewichtslage definieren wir

$$x = z - z_{\text{eq}} = h - h_0.$$

Unter Einbeziehung der von der Probe ausgeübten Kraft lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

Wir setzen die linearisierte Kraft $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$ ein und subtrahieren anschließend die Gleichung des statischen Gleichgewichts:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

Daher gilt

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

Der Kraftgradient verändert die effektive Federkonstante zu $k - c_3$, während die konstante Kraft lediglich die Gleichgewichtslage verschiebt. Somit gilt

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}.$$

Ein stabiles Gleichgewicht, um das Schwingungen möglich sind, erfordert $k - c_3 > 0$; die Deutung als Resonanzfrequenz setzt außerdem weiterhin schwache Dämpfung voraus.

(f)

Da $q = e$ und $Q = 6e$ gelten, ist

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

Die Wechselwirkung ist abstoßend. Um zu bestimmen, wo die Frequenzverschiebung am größten ist, bezeichnen wir den horizontalen Abstand zwischen Spitze und Elektron mit ρ und ihren vertikalen Abstand mit d . Das Coulomb-Gesetz liefert für die nach oben gerichtete Kraftkomponente

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e qQ d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Eine vertikale Auslenkung des Federbalkens verändert d um denselben Betrag. Der maßgebliche Kraftgradient ist daher

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e qQ \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

Für eine kleine Frequenzverschiebung ergibt Teil (e)

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

also

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e qQ}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

In führender Ordnung der schwachen Wechselwirkung kann die Abtasthöhe als konstant betrachtet werden. Dieser Ausdruck hat sein positives Maximum bei $\rho = 0$: Solange der Zähler positiv ist, nimmt er mit ρ ab, während der Nenner zunimmt; jenseits von $\rho = \sqrt{2}d$ ist die Verschiebung nicht positiv.

Das Maximum tritt somit direkt über dem Elektron auf, wo der Abstand zwischen Spitze und Elektron d_0 beträgt. An dieser Stelle gilt

$$f_z = \frac{k_e qQ}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e qQ}{d_0^3}.$$

Einsetzen in Teil (e) ergibt

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e qQ}{md_0^3}.$$

Folglich gilt

$$2\omega_0\Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

Da $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$, vernachlässigen wir das Quadrat der Verschiebung:

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

Numerisch gilt

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

und

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

Daher gilt

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

woraus sich ergibt

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

Die relative Frequenzverschiebung beträgt $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$, was die Gültigkeit der Näherung für kleine Verschiebungen bestätigt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.