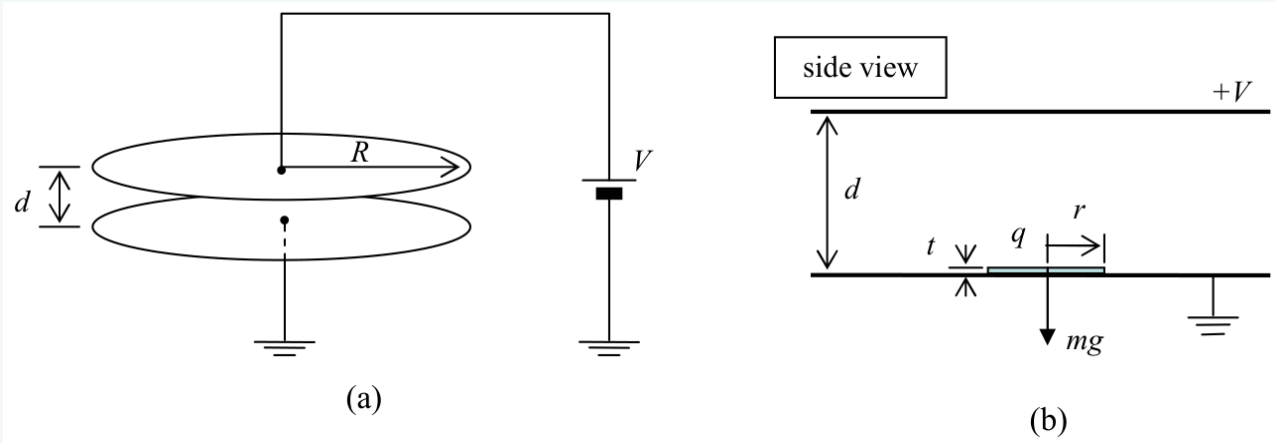


المسألة 1: مقاومة «كرة الطاولة»

يتكوّن مكثّف من لوحين دائريين متوازيين نصف قطر كلّ منهما R ، تفصل بينهما مسافة d ، حيث $d \ll R$ ، كما هو موضّح في الشكل 1.1(a). يُوصّل اللوح العلوي بمصدر جهد ثابت عند جهد V ، بينما يُورّض اللوح السفلي. ثم يوضع قرص رقيق وصغير كتلته m ، ونصف قطره r ($d \ll R$)، وسُمكه t ($t \ll r$)، في مركز اللوح السفلي، كما هو موضّح في الشكل 1.1(b). لنفترض أن الحيز بين اللوحين فراغ ثابت عزله الكهربائي ϵ_0 ؛ وأن اللوحين والقرص مصنوعون من موصلات مثالية؛ وأن جميع تأثيرات الحواف الكهروستاتيكية يمكن إهمالها. ويمكن إهمال محاذة الدائرة بأكملها والتأثيرات النسبية دون تأثير يُعتدّ به. كما يمكن إهمال تأثير الشحنة الصورية.



الشكل 1.1 رسوم تخطيطية لـ (a) مكثّف ذي لوحين متوازيين موصول بمصدر جهد ثابت، و(b) منظر جانبي للوحين المتوازيين مع قرص صغير موضوع داخل المكثّف. (انظر النص للاطلاع على التفاصيل).

(a) [نقطة 1.2] احسب القوة الكهروستاتيكية F_p بين اللوحين اللذين تفصل بينهما مسافة d ، قبل إدخال القرص بينهما كما هو موضّح في الشكل 1.1(a).

(b) [نقطة 0.8] عندما يوضع القرص على اللوح السفلي، ترتبط الشحنة q على القرص في الشكل 1.1(b) بالجهد V وفق العلاقة $q = \chi V$. أوجد χ بدلالة d و ϵ_0 .

(c) [نقطة 0.5] يقع اللوحان المتوازيان عمودياً على مجال جاذبية منتظم g . لرفع القرص الساكن ابتداءً، نحتاج إلى زيادة الجهد المطبق إلى ما يتجاوز جهد عتبة V_{th} . استنتج V_{th} بدلالة m و g و d و χ .

(d) [نقطة 2.3] عندما يكون $V > V_{th}$ ، يتحرّك القرص صعوداً وهبوطاً بين اللوحين. (افترض أن القرص يتحرّك رأسياً فقط دون أي تمايل). تكون التصادمات بين القرص واللوحين غير مرنة، بمعامل ارتداد $\eta \equiv (v_{after}/v_{before})$ ، حيث v_{after} و v_{before} هما سرعتا القرص قبل التصادم مباشرة وبعده مباشرة، على الترتيب. واللوحان مثبّتان في موضعيهما وساكنان. تقترب سرعة القرص بعد التصادم مباشرة مع اللوح السفلي من «سرعة الحالة المستقرة» v_s ، التي تعتمد على V كما يأتي:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}. \quad (1.1)$$

استنتج المعاملين α و β بدلالة m و g و χ و d و η . افترض أن سطح القرص بأكمله يلامس اللوح بصورة متساوية وفي اللحظة نفسها، بحيث يحدث التبادل الكامل للشحنة لحظياً عند كل تصادم.

(e) [2.2 نقطة] بعد بلوغ الحالة المستقرة، يمكن تقريب المتوسط الزمني للتيار I المار عبر لوحى المكثف بالعلاقة $I = \gamma V^2$ عندما يكون $qV \gg mgd$. عبّر عن المعامل γ بدلالة m و χ و d و η .

(f) [3 نقاط] عندما يُخفّض الجهد المطبّق V (ببطء شديد)، يوجد جهد حرج V_c يتوقّف دونه سريان الشحنة. أوجد V_c والتيار الموافق له I_c بدلالة m و g و χ و d و η . وبمقارنة V_c بعتبة الارتفاع V_{th} التي نوقشت في (c)، ارسم رسمًا تقريبيًا لخصائص $I - V$ عند زيادة V وخفضه في المجال من $V = 0$ إلى $3V_{th}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

يرمز $q = \chi V$ هنا إلى مقدار شحنة القرص، بما يتّسق مع $qV \gg mgd$ في (e). وشحنته بإشارتها هي $-q$ بعد ملامسة اللوح السفلي، و $+q$ بعد ملامسة اللوح العلوي. نفترض نتائج الحركة الترددية أدناه أن $0 < \eta < 1$.

• (a) القوة تجاذبية، ومقدارها

$$F_p = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

• (b)

$$\chi = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

• (c)

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

• (d)

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1-\eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1+\eta^2}.$$

• (e)

$$\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1+\eta}{1-\eta}}.$$

• (f)

$$V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} = V_{th} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}},$$

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

عند زيادة V ، يبقى التيار صفرًا حتى V_{th} ، ثم يقفز إلى فرع التوصيل. وعند خفض V ، يتبع هذا الفرع نزولًا حتى (V_c, I_c) ، ثم يهبط إلى الصفر. وعند الجهد العالي، يقترب الفرع من $I = \gamma V^2$.

الحالة الطرفية التي يحدث فيها الالتصاق التام، $\eta = 0$ ، حالة شاذة: فتطبيق شرط التلامس بعد كل اصطدام باللوح السفلي يعطي

$$V_c = V_{th}, \quad I_c = (3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}$$

الحل

نهمل في جميع ما يأتي سُمك القرص مقارنةً بـ d ، ونستخدم التقريبات المذكورة بشأن الحواف والشحنات الصورية. مقدار المجال المطبق هو

$$E = \frac{V}{d}$$

ويُتجه إلى الأسفل عندما يكون $V > 0$.

(a)

مقدار كثافة الشحنة السطحية على أي من لوحَي المكثف هو

$$\sigma = \epsilon_0 E.$$

عند حساب القوة على أحد اللوحين، يجب استبعاد مجاله الذاتي. المجال الناتج عن اللوح المقابل هو $E/2$ ، ومن ثم يكون الضغط الكهروستاتيكي

$$p = \sigma \frac{E}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

وبالضرب في مساحة اللوح نحصل على

$$F_p = p\pi R^2 = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V^2}{2d^2}.$$

يتجاذب اللوحان المشحونان بشحنتين متعاكستين الإشارة.

(b)

عندما يستقر القرص على اللوح السفلي، فإنه يشكّل جزءًا من ذلك الموصل. ويحمل وجهه العلوي المكشوف كثافة شحنة سطحية $-\epsilon_0 E$. لذا فإن مقدار شحنته هو

$$q = \epsilon_0 E \pi r^2 = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d} V.$$

وعليه،

$$\chi = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

لو فُسِّرَت q بدلاً من ذلك على أنها الشحنة بإشارتها عند ملامسة اللوح السفلي، لكان معاملها سالبًا؛ غير أن استخدام qV لاحقًا بوصفه شغلًا كهربائيًا موجبًا يحدّد اصطلاح استخدام مقدار الشحنة المتّبع هنا.

(c)

عندما يكون القرص ساكنًا على اللوح السفلي، فإنه يكون جزءًا من سطح اللوح. لذا فإن القوة الكهربائية المؤثرة عليه إلى الأعلى تساوي الضغط الذي أوجد في (a) مضروبًا في مساحة القرص:

$$F_{\text{contact}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \pi r^2 = \frac{qE}{2} = \frac{\chi V^2}{2d}.$$

إذا كانت N قوة رد الفعل العمودية المتّجهة إلى الأعلى، فإن الاتزان يتطلب

$$N + \frac{\chi V^2}{2d} = mg.$$

يصبح الانفصال عن اللوح ممكنًا عندما تبلغ قوة رد الفعل العمودية اللازمة الصفر. ومن ثم

$$\frac{\chi V_{\text{th}}^2}{2d} = mg,$$

$$V_{th} = \sqrt{\frac{2mgd}{\chi}}.$$

العامل $1/2$ أساسي هنا. ما إن يصبح القرص في حركة حرة بين اللوحين، مع إهمال قوى الشحنات الصورية وفق التعليمات، حتى تصبح محصلة القوة المؤثرة عليه في المجال المطبق المنتظم qE . ولذلك يجب معالجة قوة التلامس وقوة الحركة الحرة كلاً على حدة.

(d)

نعرف مقدار التسارع الكهربائي أثناء الحركة الحرة بالعلاقة

$$a_e = \frac{qE}{m} = \frac{\chi V^2}{md}.$$

بعد مغادرة اللوح السفلي، تكون شحنة القرص $-q$ ، لذا يكون تسارعه إلى الأعلى $a_e - g$. وبعد ملامسة اللوح العلوي، تصبح شحنته $+q$ ، لذا يكون تسارعه إلى الأسفل $a_e + g$.

لتكن السرعة إلى الأعلى بعد التصادم رقم n مع اللوح السفلي مباشرة. ولتكن السرعة قبل التصادم التالي مع اللوح العلوي مباشرة، w_n ، والسرعة قبل التصادم التالي مع اللوح السفلي مباشرة.

تعطي مبرهنة الشغل والطاقة للحركة الحرة صعوداً

$$u_n^2 = v_n^2 + 2d(a_e - g).$$

يقلل التصادم مع اللوح العلوي السرعة إلى ηu_n . لذلك تعطي الحركة هبوطاً

$$w_n^2 = \eta^2 u_n^2 + 2d(a_e + g).$$

وأخيراً، يعطي التصادم مع اللوح السفلي $v_{n+1} = \eta w_n$. ويجمع هذه العلاقات،

$$v_{n+1}^2 = \eta^4 v_n^2 + 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

عندما يكون $0 < \eta < 1$ ، تتناقص انحرافات v_n^2 عن نقطتها الثابتة بعامل η^4 في كل دورة. وفي الحالة المستقرة،

$$(1 - \eta^4)v_s^2 = 2d\eta^2 [(1 + \eta^2)a_e + (1 - \eta^2)g].$$

إذن

$$v_s^2 = \frac{2d\eta^2 a_e}{1 - \eta^2} + \frac{2d\eta^2 g}{1 + \eta^2} = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)} V^2 + \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

وبالمقارنة مع المعادلة (1.1)،

$$\alpha = \frac{2\chi\eta^2}{m(1 - \eta^2)}, \quad \beta = \frac{2gd\eta^2}{1 + \eta^2}.$$

(e)

في دورة كاملة واحدة، تتغير شحنة القرص من $-q$ إلى $+q$ عند اللوح العلوي، ومن $+q$ إلى $-q$ عند اللوح السفلي. وبذلك تمر شحنة $2q$ عبر المصدر في كل دورة كاملة. فإذا كان الزمن الدوري T ، فإن

$$I = \frac{2q}{T}.$$

عندما يكون $qV \gg mgd$ ، يكون لدينا $a_e \gg g$ ، ولذلك يمكن إهمال الجاذبية. وعندئذ تكون مدّتا الحركتين متساويتين وتساوي كل منهما τ ، حيث $T = 2\tau$.

لتكن w السرعة قبل أي من الاصطدامين مباشرة. تكون السرعة بعد الاصطدام مباشرة ηw . وأثناء كل حركة حرة،

$$w^2 - \eta^2 w^2 = 2a_e d, \quad w = \sqrt{\frac{2a_e d}{1 - \eta^2}}.$$

بما أن التسارع ثابت، فإن متوسط السرعة أثناء الحركة الحرة هو $(1 + \eta)w/2$. ولذلك

$$\tau = \frac{2d}{(1 + \eta)w},$$

و

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{\chi V(1 + \eta)}{2d} \sqrt{\frac{2\chi V^2}{m(1 - \eta^2)}}.$$

عندما يكون $V \geq 0$ ،

$$I = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}} V^2.$$

ومن ثم

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\chi^3}{2m} \frac{1 + \eta}{1 - \eta}}}.$$

(f)

لا يمكن استخدام تقريب الجهد العالي الوارد في (e) لتحديد توقّف التيار. ويجب الإبقاء على تأثير الجاذبية.

لتكن u و w سرعتي الحالة المستقرة قبل الاصطدام باللوحين العلوي والسفلي مباشرة، على الترتيب. من (d)، لدينا $v_s = \eta w$ و

$$w^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} + \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

وباستخدام معادلة الطاقة للحركة الحرة صعودًا،

$$u^2 = v_s^2 + 2d(a_e - g),$$

نحصل على

$$u^2 = 2d \left(\frac{a_e}{1 - \eta^2} - \frac{g}{1 + \eta^2} \right).$$

عندما يُخفّض الجهد، يكون المسار الدوري الحدّي هو المسار الذي يصل بالكاد إلى اللوح العلوي بسرعة صفرية. وبوضع $u = 0$ نحصل على

$$a_{e,c} = g \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}.$$

وبما أن $a_e = \chi V^2/(md)$ ، فإن

$$\boxed{V_c = \sqrt{\frac{mgd}{\chi} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}}}.$$

دون هذا الجهد، لا يستطيع القرص مواصلة حركات حرة تبلغ اللوح العلوي. وما إن يعجز عن بلوغ ذلك اللوح، حتى تتوقّف شحنته عن عكس إشارتها، وتبدّد التصادمات المتتالية مع اللوح السفلي ما تبقى من طاقته الميكانيكية.

عند الجهد الحرج،

$$u_c = 0, \quad w_c = 2\sqrt{\frac{gd}{1 + \eta^2}}, \quad v_{s,c} = \eta w_c.$$

تبدأ الحركة الحرة صعوداً بسرعة ηw_c وتنتهي بسرعة صفرية؛ وتبدأ الحركة الحرة هبوطاً بسرعة صفرية وتنتهي بسرعة w_c . وباستخدام متوسطي السرعة،

$$T_c = \frac{2d}{\eta w_c} + \frac{2d}{w_c} = \frac{1+\eta}{\eta} \sqrt{\frac{d(1+\eta^2)}{g}}.$$

لذلك يكون التيار قبل توقّفه مباشرة

$$I_c = \frac{2\chi V_c}{T_c} = \frac{2\eta\chi V_c}{1+\eta} \sqrt{\frac{g}{d(1+\eta^2)}}.$$

وبالتعويض عن V_c نحصل على

$$I_c = \frac{2\eta g \sqrt{m\chi}}{1+\eta^2} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}.$$

لكل قيمة ثابتة $0 < \eta < 1$ ، يكون هذا التيار موجباً، ولذلك يحدث توقّفه قفزة هابطة ذات مقدار محدود.

لتحديد الرسم بدقة، يمكن كتابة فرع التوصيل كاملاً دون إهمال الجاذبية. ومدّت الحركة الحرة فيه هما

$$\tau_{\uparrow} = \frac{2d}{\eta w + u}, \quad \tau_{\downarrow} = \frac{2d}{w + \eta u}.$$

إذن

$$I_{\text{on}}(V) = \frac{2\chi V}{\frac{2d}{\eta w + u} + \frac{2d}{w + \eta u}},$$

حيث تُعطى $u(V)$ و $w(V)$ بالعلاقات الواردة أعلاه. وتظل هذه العبارات صالحة عندما تكون الحركة الحرة صعوداً متباطئة.

تعطي المقارنة مع (c)

$$\frac{V_c}{V_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{2(1+\eta^2)}} < 1.$$

وعليه، يتّصف الرسم المطلوب بالسّمات الآتية:

- **زيادة الجهد:** اتبع $I = 0$ من نقطة الأصل إلى V_{th} . وعند تجاوز V_{th} بقليل، يرتفع القرص عن اللوح ويقفز التيار المستقر إلى $I_{\text{on}}(V_{\text{th}})$. واصل الصعود على فرع التوصيل حتى $3V_{\text{th}}$.
- **خفض الجهد:** عدّ على فرع التوصيل مروراً بـ V_{th} ، وواصل حتى (V_c, I_c) . وعند الانخفاض عن V_c بقليل، اهبط إلى $I = 0$ ، ثم اتبع محور الجهد عائداً إلى نقطة الأصل.
- **الشكل عند الجهد العالي:** يقترب فرع التوصيل من القطع المكافئ $I = \gamma V^2$. وعند $3V_{\text{th}}$ ، يكون $qV = 18mgd$ ، ولذلك فإن نقطة نهاية تقريبية مناسبة للرسم التقريبي هي $I \approx 9\gamma V_{\text{th}}^2$.

وبصورة مكافئة، بعيداً عن نقاط القفز:

خفض V	زيادة V	مجال الجهد
0	0	$0 \leq V < V_c$
$I_{\text{on}}(V)$	0	$V_c < V < V_{\text{th}}$
$I_{\text{on}}(V)$	$I_{\text{on}}(V)$	$V_{\text{th}} < V \leq 3V_{\text{th}}$

الفترة $V_c < V < V_{\text{th}}$ هي فترة التخلفية: فالقرص الساكن يبقى ساكناً، بينما يستمر القرص المتحرّك أصلاً في الحركة الترددية.

واستكمالاً للعرض، تتطلب الحالة $\eta = 0$ تماماً معالجة منفصلة. فكل اصطدام باللوح السفلي يترك القرص ساكناً، ولذلك يجب استيفاء شرط الارتفاع عن اللوح عند التلامس الوارد في (c) من جديد. ونتيجةً لذلك، يتوقف التيار عند V_{th} ، بدلاً من أن يتوقف عند نهاية صيغة الجهد الحرج الخاصة بالقيم الموجبة لـ η . ومن جهة التوصيل، عندما $V \rightarrow V_{th}^+$ ، يكون $a_e \rightarrow 2g$ ، و

$$T \rightarrow \sqrt{\frac{2d}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{3g}}.$$

ومن ثم

$$I_c = \frac{2\chi V_{th}}{\sqrt{2d/g} + \sqrt{2d/(3g)}} = \boxed{(3 - \sqrt{3}) g \sqrt{m\chi}}.$$

يتطابق عندئذ جهد الانتقال، ولذلك لا توجد تخلفية. وعند الحالة الطرفية الأخرى، $\eta = 1$ ، لا تبدد التصادمات أي طاقة، بينما يضيف المجال الكهربائي $2qV$ في كل دورة؛ ومن ثم لا يمكن أن توجد سرعة حالة مستقرة محدودة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: بالون صاعد

يرتفع بالون مطاطي مملوء بغاز الهيليوم عاليًا في السماء، حيث ينخفض الضغط ودرجة الحرارة مع الارتفاع. في الأسئلة التالية، افترض أن شكل البالون يظل كرويًا بصرف النظر عن الحمولة، وأهمل حجم الحمولة. وافترض أيضًا أن درجة حرارة غاز الهيليوم داخل البالون تساوي دائمًا درجة حرارة الهواء المحيط، وعامل جميع الغازات بوصفها غازات مثالية. ثابت الغازات العام هو $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ، والكتلتان الموليتان للهيليوم والهواء هما $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ و $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ، على الترتيب. تسارع الجاذبية هو $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

[الجزء A]

(a) [1.5 درجة] ليكن ضغط الهواء المحيط P ودرجة حرارته T . يكون الضغط داخل البالون أعلى منه خارجه بسبب التوتر السطحي للبالون. يحتوي البالون على n مول من غاز الهيليوم، ويبلغ الضغط داخله $P + \Delta P$. أوجد قوة الطفو F_B المؤثرة في البالون بدلالة ΔP و P .

(b) [درجتان] في أحد أيام الصيف في كوريا، وُجد أن درجة حرارة الهواء T عند ارتفاع z عن مستوى سطح البحر تُعطى بالعلاقة $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ في المجال $0 < z < 15 \text{ km}$ ، حيث $z_0 = 49 \text{ km}$ و $T_0 = 303 \text{ K}$. وكان الضغط والكثافة عند مستوى سطح البحر $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ و $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ ، على الترتيب. في هذا المجال من الارتفاعات، يأخذ الضغط الصورة

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta. \quad (2.1)$$

عبر عن η بدلالة z_0 و ρ_0 و P_0 و g ، وأوجد قيمتها العددية برقمين معنويين. اعتبر تسارع الجاذبية ثابتًا لا يعتمد على الارتفاع.

[الجزء B]

عندما يُنفخ بالون مطاطي كروي الشكل نصف قطره قبل التمدد r_0 ليصبح كرة نصف قطرها r ($r \geq r_0$)، تختزن قشرة البالون طاقة مرونية إضافية بسبب التمدد. في نظرية مبسطة، يمكن التعبير عن الطاقة المرونية عند درجة حرارة ثابتة T بالعلاقة

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (2.2)$$

حيث $\lambda \equiv r/r_0$ ($\lambda \geq 1$) هي نسبة التضخم في الأبعاد، و κ ثابت وحدته mol/m^2 .

(c) [درجتان] عبر عن ΔP بدلالة المعلمات المعطاة في المعادلة (2.2)، وارسم رسمًا تخطيطيًا لـ ΔP بدلالة $\lambda = r/r_0$.

(d) [1.5 درجة] يمكن تحديد الثابت κ من كمية الغاز اللازمة لنفخ البالون. عند $T_0 = 303 \text{ K}$ و $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ، يحتوي البالون غير المتمدّد ($\lambda = 1$) على $n_0 = 12.5$ مول من الهيليوم. ويلزم ما مجموعه $n = 3.6n_0 = 45$ مول لنفخ البالون حتى $\lambda = 1.5$ عند نفس T_0 و P_0 . عبّر عن معلمة البالون a ، المعرّفة بالعلاقة $a = \kappa/\kappa_0$ بدلالة n و n_0 و λ ، حيث $\kappa_0 \equiv r_0 P_0 / (4RT_0)$. احسب a برقمين معنويين.

[الجزء C]

يُجهّز بالون كما في (d) عند مستوى سطح البحر (يُنْفَخ حتى $\lambda = 1.5$ باستخدام $n = 3.6n_0 = 45$ مول من غاز الهيليوم عند $T_0 = 303 \text{ K}$ و $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$). وتبلغ الكتلة الكلية، بما فيها الغاز والبالون نفسه والحمولات الأخرى، $M_T = 1.12 \text{ kg}$. دع البالون الآن يرتفع من مستوى سطح البحر.

(e) [3 درجات] افترض أن البالون يتوقف في النهاية عند الارتفاع z_f ، حيث تتوازن قوة الطفو مع الوزن الكلي. أوجد z_f ونسبة التضخم λ_f عند ذلك الارتفاع. أعط الإجابات برقمين معنويين. افترض عدم وجود تأثير للانجراف أو تسرب للغاز أثناء الصعود.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) قوة الطفو المتجهة إلى أعلى هي

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

• (b)

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0} = 5.5.$$

• (c)

$$\Delta P = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

يبدأ المنحنى عند $(1, 0)$ ، ويبلغ قيمته العظمى الوحيدة عند $\lambda = 7^{1/6} \approx 1.38$ ، ثم يتناقص مقترباً من الصفر من جهة القيم الموجبة.

• (d)

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}} = 0.11.$$

• (e)

$$z_f = 1.1 \times 10^4 \text{ m} = 11 \text{ km}, \quad \lambda_f = 2.1.$$

النتيجتان قبل التقريب هما $z_f = 11.095 \text{ km}$ و $\lambda_f = 2.14594$ ؛ واستخدام القيمتين المقربتين $\eta = 5.5$ و $a = 0.11$ بدلاً من ذلك يعطي الإجابتين نفسيهما برقمين معنويين.

الحل

(a)

وفقاً لمبدأ أرخميدس، تساوي قوة الطفو وزن الهواء المزاح. وباعتبار كثافة الهواء المحيط منتظمة على امتداد أبعاد البالون،

$$F_B = \rho_A V g.$$

تعطي معادلتا الغاز المثالي للهواء المحيط والهيليوم

$$\rho_A = \frac{PM_A}{RT}, \quad V = \frac{nRT}{P + \Delta P}.$$

ولذلك تُختزل درجة الحرارة المشتركة:

$$F_B = nM_A g \frac{P}{P + \Delta P}.$$

هذه هي قوة الطفو وحدها. أما أوزان الهيليوم والغلاف والحمولة فتدخل بصورة منفصلة في توازن القوى الكلي.

(b)

الغلاف الجوي في حالة اتزان هيدروستاتيكي:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g.$$

للهواء المثالي ذي التركيب الثابت،

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{P(z)}{P_0} \frac{T_0}{T(z)}.$$

وباستخدام التوزيعين المعطيين لدرجة الحرارة والضغط،

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

باشتقاق المعادلة (2.1) والتعويض في معادلة الاتزان الهيدروستاتيكي نحصل على

$$-\frac{\eta P_0}{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1} = -\rho_0 g \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\eta-1}.$$

وعليه،

$$\eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0}.$$

عددياً،

$$\eta = \frac{(1.16)(9.8)(49 \times 10^3)}{1.01 \times 10^5} = 5.51517 \dots,$$

ومن ثم، برقمين معنويين،

$$\eta = 5.5.$$

(c)

في تمدد شبه ساكن عند درجة حرارة ثابتة، يوفر الشغل الذي يبذله الضغط الداخلي الزائد الزيادة في الطاقة المرونية التي يصفها النموذج:

$$\Delta P dV = dU.$$

حجم البالون هو

$$V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \lambda^3, \quad \frac{dV}{d\lambda} = 4\pi r_0^3 \lambda^2.$$

من المعادلة (2.2)،

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_T = 16\pi r_0^2 \kappa R T (\lambda - \lambda^{-5}).$$

إذن

$$\Delta P = \frac{(\partial U / \partial \lambda)_T}{dV / d\lambda} = \frac{4\kappa RT}{r_0} (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

لتحديد الرسم التخطيطي، نعرّف مقياس الضغط

$$C = \frac{4\kappa RT}{r_0}.$$

عندئذٍ

$$\frac{d\Delta P}{d\lambda} = C\lambda^{-8}(7 - \lambda^6).$$

يتصف المنحنى بالخصائص التالية:

- مجاله الفيزيائي هو $\lambda \geq 1$ ، ويبدأ عند $\Delta P = 0$ عندما $\lambda = 1$.
- يرتفع بميل موجب حتى

$$\lambda_{\max} = 7^{1/6} = 1.38309 \dots$$

- قيمته العظمى هي

$$\Delta P_{\max} = C \frac{6}{7^{7/6}} \approx 0.620 C.$$

- بعد القيمة العظمى، يتناقص رتيباً مع بقاءه موجباً. وعند نسب تضخم كبيرة،

$$\Delta P \sim \frac{C}{\lambda} \longrightarrow 0^+,$$

لذا يكون المحور الأفقي خطأً مقارباً.

(d)

لتكن

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3.$$

عند $\lambda = 1$ ، يعطي الجزء (c) أن $\Delta P = 0$. ومن ثم يحقق البالون غير المتمدد العلاقة

$$P_0 V_0 = n_0 R T_0.$$

وبما أن

$$a = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{4\kappa R T_0}{r_0 P_0},$$

فإن الضغط الزائد عند درجة الحرارة T_0 هو

$$\frac{\Delta P}{P_0} = a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

يحقق البالون المنفوخ العلاقة

$$(P_0 + \Delta P) V_0 \lambda^3 = n R T_0.$$

بالقسمة على $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ ،

$$\frac{n}{n_0} = \lambda^3 [1 + a (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] = \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}).$$

وعليه،

$$a = \frac{n/n_0 - \lambda^3}{\lambda^2 - \lambda^{-4}}.$$

بالتعويض نحصل على

$$a = \frac{3.6 - 1.5^3}{1.5^2 - 1.5^{-4}} = 0.109624\dots,$$

ومن ثم

$$\boxed{a = 0.11}.$$

(e)

نعرف درجة الحرارة اللابعدية

$$t = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{z}{z_0}.$$

عندئذٍ

$$P = P_0 t^\eta, \quad \Delta P = a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7}).$$

لأن الهيليوم لا يتسرب، تظل n ثابتة. ومعادلة الغاز المثالي له هي

$$[P_0 t^\eta + a P_0 t (\lambda^{-1} - \lambda^{-7})] V_0 \lambda^3 = n R T_0 t.$$

باستخدام $P_0 V_0 = n_0 R T_0$ والقسمة على t ,

$$\frac{n}{n_0} = t^{\eta-1} \lambda^3 + a (\lambda^2 - \lambda^{-4}). \quad (1)$$

تُستنتج كتلة الهواء المزاح من كثافته وفق قانون الغاز المثالي:

$$\rho_A V = \frac{M_A P}{RT} V_0 \lambda^3 = n_0 M_A t^{\eta-1} \lambda^3.$$

عند الارتفاع النهائي، تتوازن قوة الطفو مع الوزن بأكمله:

$$n_0 M_A g t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = M_T g,$$

ومن ثم

$$t_f^{\eta-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{n_0 M_A}. \quad (2)$$

وزن الهيليوم مشمول بالفعل في $M_T g$.

بحذف العامل المتعلق بالغلاف الجوي بين (1) و(2)، نحصل على معادلة لنسبة التضخم النهائية وحدها:

$$a (\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4}) = \frac{n}{n_0} - \frac{M_T}{n_0 M_A}.$$

مع الاحتفاظ بالقيم الوسيطة دون تقريب،

$$\frac{M_T}{n_0 M_A} = \frac{1.12}{(12.5)(28.9 \times 10^{-3})} = 3.100346\dots,$$

ولذلك

$$\lambda_f^2 - \lambda_f^{-4} = \frac{3.6 - 3.100346\dots}{0.109624\dots} = 4.557886\dots$$

الطرف الأيسر متزايد تمامًا عندما $\lambda_f \geq 1$ ، لأن مشتقته هي $2\lambda_f + 4\lambda_f^{-5} > 0$. لذا يوجد جذر فيزيائي وحيد:

$$\lambda_f = 2.145936\dots$$

تعطي المعادلة (2) الآن

$$t_f = \left(\frac{M_T}{n_0 M_A \lambda_f^3} \right)^{1/(\eta-1)} = 0.773571 \dots$$

وعليه،

$$z_f = z_0(1 - t_f) = (49 \text{ km})(1 - 0.773571 \dots) = 11.0950 \dots \text{ km}.$$

برقمين معنويين،

$$\boxed{\lambda_f = 2.1, \quad z_f = 11 \text{ km}}.$$

يقع الارتفاع النهائي ضمن المجال المحدد للغلاف الجوي. وللبالون أيضًا قوة رفع صافية ابتدائية موجبة: فعند مستوى سطح البحر، تبلغ كتلة الهواء الذي يزيحه

$$n_0 M_A (1.5)^3 = 1.2192 \dots \text{ kg} > M_T.$$

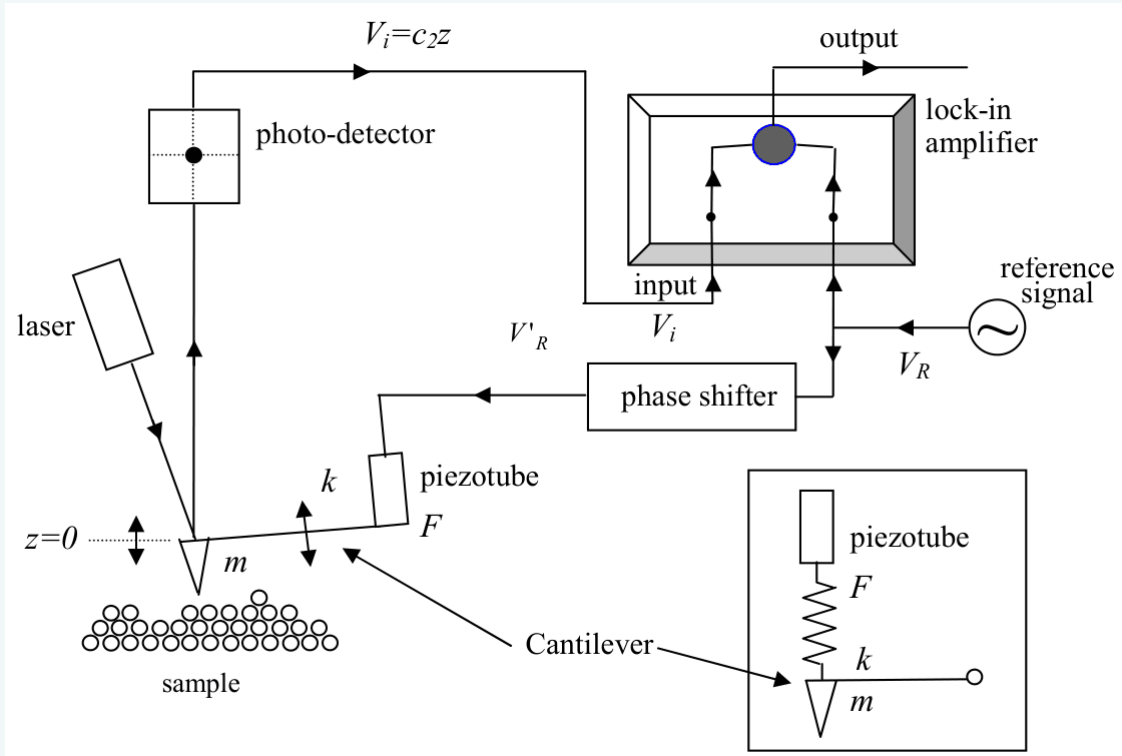
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مجهر المسبار الذري

تُعد مجاهر المسبار الذري (APMs) أدوات فعالة في مجال علوم النانو. ويمكن رصد حركة عارضة كابولية في مجهر المسبار الذري بواسطة كاشف ضوئي يراقب حزمة الليزر المنعكسة، كما هو مبين في الشكل 3.1. لا يمكن للعارضة الكابولية أن تتحرك إلا في الاتجاه الرأسي، ويمكن وصف إزاحتها z بدلالة الزمن t بالمعادلة

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F, \quad (3.1)$$

حيث m كتلة العارضة الكابولية، و $k = m\omega_0^2$ ثابت النابض للعارضة الكابولية، و b معامل تخميد صغير يحقق $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ ، وأخيرًا F قوة إثارة خارجية يولدها الأنبوب الكهروضغطي.



الشكل 3.1 رسم تخطيطي لمجهر المسبار الماسح (SPM). يمثل الرسم المصغر في الزاوية اليمنى السفلية نموذجًا ميكانيكيًا مبسطًا لوصف اقتران الأنبوب الكهروضغطي بالعارضة الكابولية.

[الجزء A]

(a) [1.5 درجة] عندما تكون $F = F_0 \sin \omega t$ ، يمكن كتابة $z(t)$ التي تحقق المعادلة (3.1) على الصورة $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ حيث $A > 0$ و $0 \leq \phi \leq \pi$. أوجد عبارتي السعة A و $\tan \phi$ بدلالة F_0 ، m ، ω ، و ω_0 ، و b . احسب A والطور ϕ عند تردد الرنين $\omega = \omega_0$.

(b) [1 درجة] يضرب المضخم المتزامن المبين في الشكل 3.1 إشارة الدخل في الإشارة المرجعية للمضخم المتزامن، $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ ، ثم يمرر المركبة المستمرة (dc، التيار المستمر) فقط من الإشارة الناتجة عن الضرب. افترض أن إشارة الدخل تُعطى بالعلاقة $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$. هنا V_{i0} ، ω_i ، و ϕ_i جميعها ثوابت موجبة معلومة. أوجد الشرط على ω ($0 < \omega$) للحصول على إشارة خرج غير منعدمة. ما عبارة مقدار إشارة الخرج المستمرة غير المنعدمة عند هذا التردد؟

(c) [1.5 درجة] عند مرور الجهد المرجعي للمضخم المتزامن $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ عبر مُزيج الطور، يتغير إلى $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$. ويُطبَّق V'_R على الأنبوب الكهروضغطي، فيثير العارضة الكابولية بقوة $F = c_1 V'_R$. ثم يحول الكاشف الضوئي إزاحة العارضة الكابولية، z ، إلى جهد $V_i = c_2 z$. هنا c_1 و c_2 ثابتان. أوجد عبارة مقدار إشارة الخرج المستمرة عند $\omega = \omega_0$.

(d) [2 درجة] يؤدي تغير صغير Δm في كتلة العارضة الكابولية إلى إزاحة تردد الرنين بمقدار $\Delta \omega_0$. ونتيجة لذلك، ينزاح الطور ϕ عند تردد الرنين الأصلي ω_0 بمقدار $\Delta \phi$. أوجد تغير الكتلة Δm الموافق لانزياح الطور $\Delta \phi = \pi/1800$ ، وهو قدرة تمييز نموذجية في قياسات الطور. تُعطى المعلمات الفيزيائية للعارضة الكابولية بالقيم $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg، و $k = 1.0$ N/m، و $(b/m) = 1.0 \times 10^3$ s⁻¹. استخدم التقريبات $(1+x)^a \approx 1+ax$ و $\tan(\pi/2 + x) \approx -1/x$ عندما يكون $|x| \ll 1$.

[الجزء B]

لننظر من الآن فصاعداً في الحالة التي تؤثر فيها بعض القوى الناتجة عن العينة على العارضة الكابولية، بالإضافة إلى قوة الإثارة التي نوقشت في الجزء A، كما هو مبين في الشكل 3.1.

(e) [1.5 درجة] بافتراض أن القوة الإضافية $f(h)$ تعتمد فقط على المسافة h بين العارضة الكابولية و سطح العينة، يمكن إيجاد موضع اتزان جديد h_0 . بالقرب من $h = h_0$ ، يمكننا كتابة $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ ، حيث c_3 ثابت بالنسبة إلى h . أوجد تردد الرنين الجديد ω'_0 بدلالة ω_0 ، m ، و c_3 .

(f) [2.5 درجة] أثناء مسح السطح بتحريك العينة أفقياً، يمر رأس العارضة الكابولية المشحون بشحنة $Q = 6e$ بالقرب من إلكترون شحنته $q = e$ محبوس (موضع مكانيًا) على مسافة ما تحت السطح. أثناء المسح حول الإلكترون، يُلاحظ أن أقصى انزياح في تردد الرنين $\Delta \omega_0 = (\omega'_0 - \omega_0)$ أصغر بكثير من ω_0 . عبّر عن المسافة d_0 من العارضة الكابولية إلى الإلكترون المحبوس عند أقصى انزياح بدلالة m ، و q ، و Q ، و ω_0 ، و $\Delta \omega_0$ ، وثابت كولوم k_e . احسب d_0 بوحدة nm ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) عندما يكون $\Delta \omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$. المعلمات الفيزيائية للعارضة الكابولية هي $m = 1.0 \times 10^{-12}$ kg و $k = 1.0$ N/m. أهمل أي تأثير للاستقطاب في كل من رأس العارضة الكابولية والسطح. لاحظ أن $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ و $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لنرمز إلى الخرج المستمر وفق قاعدة الضرب بالرمز $S_{dc} = \langle V_R V_i \rangle$.

• (a)

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

عند $\omega = \omega_0$,

$$A = \frac{F_0}{b\omega_0}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

• (b) يتطلب الحصول على خرج مستمر غير صفري

$$\omega = \omega_i, \quad \cos \phi_i \neq 0.$$

ومقداره هو

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0}V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

• (c)

$$|S_{dc}| = \frac{|c_1c_2|V_{R0}^2}{2b\omega_0}.$$

• (d)

$$\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta \phi \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

يقابل انزياح الطور الموجب المحدد زيادةً في الكتلة.

• (e)

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}},$$

بشرط أن يكون $m\omega_0^2 - c_3 > 0$.

• (f) يحدث أقصى انزياح للتردد نحو الأعلى مباشرةً فوق الإلكترون، ويكون

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m\omega_0 \Delta \omega_0} \right)^{1/3} \simeq 41 \text{ nm}.$$

الحل

ندرس الحركة الدورية المستقرة بعد اضمحلال الحركة العابرة المخدمة. ونستخدم في جميع ما يأتي الاصطلاح المعتمد في المسألة عند التخميد الضعيف، وهو أن تردد الرنين يساوي $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(a)

لتكن $\theta = \omega t - \phi$. بالتعويض عن $z = A \sin \theta$ في معادلة الحركة نحصل على

$$A(k - m\omega^2) \sin \theta + Ab\omega \cos \theta = F_0 \sin(\theta + \phi).$$

بتوسيع الطرف الأيمن ومساواة معاملي $\sin \theta$ و $\cos \theta$ ،

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos \phi, \quad Ab\omega = F_0 \sin \phi.$$

بتربيع هاتين المعادلتين وجمعهما نحصل على

$$A^2 [(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2] = F_0^2.$$

باستخدام $k = m\omega_0^2$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}.$$

بقسمة معادلتني المعاملات نحصل على

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

يتحدد الربع من معادلتني المعاملات: عند تردد إثارة موجب، يكون $\sin \phi > 0$ ، في حين تكون إشارة $\cos \phi$ هي إشارة $\omega_0^2 - \omega^2$. ومن ثم يكون تأخر الطور أقل من $\pi/2$ تحت الرنين وأكبر من $\pi/2$ فوق الرنين.

عند $\omega = \omega_0$ ، يُلغى الحد المرن وحد القصور الذاتي أحدهما الآخر. وبالتالي،

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{F_0}{b\omega_0}.$$

(b)

باستخدام مطابقة تحويل حاصل الضرب إلى مجموع،

$$\begin{aligned} V_R V_i &= V_{R0} V_{i0} \sin \omega t \sin(\omega_i t - \phi_i) \\ &= \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} [\cos((\omega - \omega_i)t + \phi_i) - \cos((\omega + \omega_i)t - \phi_i)]. \end{aligned}$$

لا يُبقي مرشح المركبة المستمرة المثالي إلا الحدود المستقلة عن الزمن. وبما أن كلا الترددين موجب، فإن متوسط الحد ذي التردد المساوي لمجموع الترددين يساوي صفرًا دائمًا. ولا يكون الحد ذو التردد المساوي لفرق الترددين ثابتًا إلا عندما

$$\omega = \omega_i.$$

عند هذا التردد،

$$S_{dc} = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} \cos \phi_i,$$

ومن ثم يكون المقدار

$$|S_{dc}| = \frac{V_{R0} V_{i0}}{2} |\cos \phi_i|.$$

تطابق الترددين شرط لازم، لكنه لا يضمن نتيجة غير صفرية: إذا كان $\phi_i = \pi/2 + n\pi$ ، تكون إشارة الدخل متعامدة في الطور مع الإشارة المرجعية وينعدم الخرج المستمر. ولذلك يتطلب الخرج غير المنعدم أيضًا $\cos \phi_i \neq 0$.

(c)

عند التردد المحدد، تثير الإشارة المرجعية المزاخة الطور العارضة الكابولية بالقوة

$$F = c_1 V_{R0} \sin(\omega_0 t + \pi/2) = c_1 V_{R0} \cos \omega_0 t.$$

تتأخر إزاحة العارضة الكابولية عن القوة بمقدار $\pi/2$. ولذلك يجعل مُزيج الطور الإزاحة متفقة في الطور مع الإشارة المرجعية الأصلية:

$$z(t) = \frac{c_1 V_{R0}}{b\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

يمكن الحصول على هذه العبارة أيضًا مباشرةً بالتعويض في معادلة الحركة. ويكون جهد الكاشف

$$V_i(t) = \frac{c_1 c_2 V_{R0}}{b \omega_0} \sin \omega_0 t.$$

بالضرب في الإشارة المرجعية الأصلية نحصل على

$$V_R V_i = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{b \omega_0} \sin^2 \omega_0 t.$$

بما أن $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = 1/2$ ،

$$S_{dc} = \frac{c_1 c_2 V_{R0}^2}{2b \omega_0}, \quad \boxed{|S_{dc}| = \frac{|c_1 c_2| V_{R0}^2}{2b \omega_0}}.$$

تسمح القيمة المطلقة بأن تكون إشارة ثوابت التحويل موجبة أو سالبة.

(d)

لا يتغير ثابت النابض عندما تتغير الكتلة. ولذلك يكون التردد الطبيعي الجديد

$$\omega_0 + \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}.$$

عندما يكون $|\Delta m| \ll m$ ، يعطي تقريب ذي الحدين المعطى

$$\boxed{\Delta\omega_0 \simeq -\frac{\omega_0}{2} \frac{\Delta m}{m}}.$$

يبقى تردد القياس عند القيمة الأصلية ω_0 . وبافتراض ثبات b ، يحقق الطور الجديد

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = \frac{b \omega_0}{k - (m + \Delta m) \omega_0^2}.$$

بما أن $k = m \omega_0^2$ ،

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\phi\right) = -\frac{b}{\omega_0 \Delta m}.$$

بتطبيق $\tan(\pi/2 + x) \simeq -1/x$ ،

$$-\frac{1}{\Delta\phi} \simeq -\frac{b}{\omega_0 \Delta m},$$

ومن ثم

$$\boxed{\Delta m \simeq \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi}.$$

تعطي المعلومات المعطاة

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1.0}{1.0 \times 10^{-12}}} = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

$$b = m \frac{b}{m} = (1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^3) = 1.0 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}.$$

إذن

$$\Delta m \simeq \frac{1.0 \times 10^{-9}}{1.0 \times 10^6} \frac{\pi}{1800} \text{ kg} = 1.7453 \times 10^{-18} \text{ kg},$$

أو، برقمين معنويين،

$$\boxed{\Delta m \simeq 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg}}.$$

هنا $\Delta m/m \simeq 1.7 \times 10^{-6}$ و $\Delta\phi \simeq 1.7 \times 10^{-3}$ ، بما يتوافق مع كلا تقريبي التغير الصغير. ويبلغ تغير التردد المصاحب نحو -0.87 s^{-1} .

(e)

لنأخذ الاتجاه الموجب للإزاحة ولقوة العينة بعيداً عن العينة. ولتكن z_{eq} الإزاحة السكونية الجديدة الموافقة للفجوة h_0 . يعطي اتزان القوى السكوني

$$kz_{\text{eq}} = f(h_0).$$

لإزاحة صغيرة عن موضع الاتزان هذا، نعرّف

$$x = z - z_{\text{eq}} = h - h_0.$$

بإدراج قوة العينة، تصبح معادلة الحركة

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F + f(h).$$

نعوّض بالقوة في التقريب الخطي $f(h) \simeq f(h_0) + c_3x$ ، ثم نطرح معادلة الاتزان السكوني:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F + c_3x.$$

وعليه،

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k - c_3)x = F.$$

يغيّر تدرج القوة ثابت النابض الفعال إلى $k - c_3$ ، في حين لا تفعل القوة الثابتة سوى إزاحة موضع الاتزان. ومن ثم

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c_3}{m}}.$$

يتطلب الاتزان المستقر الذي تحدث حوله اهتزازات أن يكون $k - c_3 > 0$ ؛ كما أن تفسير النتيجة بوصفها تردد رنين يُبقي على افتراض التخميد الضعيف.

(f)

بما أن $Q = 6e$ و $q = e$

$$qQ = 6e^2 > 0.$$

التأثر تنافري. ولتحديد الموضع الذي يكون فيه انزياح التردد أعظم ما يمكن، لتكن ρ المسافة الأفقية بين الرأس والإلكترون، ولتكن d المسافة الرأسية بينهما. يعطي قانون كولوم مركبة القوة المتجهة إلى الأعلى

$$f_z(\rho, d) = \frac{k_e qQ d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

تغيّر إزاحة رأسية للعارضة الكابولية المسافة d بالمقدار نفسه. ولذلك يكون تدرج القوة المعني

$$c_3 = \frac{\partial f_z}{\partial d} = k_e qQ \frac{\rho^2 - 2d^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

في حالة انزياح صغير في التردد، يعطي البند (e)

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} \simeq \omega_0 - \frac{c_3}{2m\omega_0},$$

ومن ثم

$$\Delta\omega_0(\rho) \simeq \frac{k_e qQ}{2m\omega_0} \frac{2d^2 - \rho^2}{(\rho^2 + d^2)^{5/2}}.$$

إلى الرتبة الأولى في التأثير الضعيف، يمكن اعتبار ارتفاع المسح ثابتاً. تبلغ هذه العبارة قيمتها العظمى الموجبة عند $\rho = 0$: ما دام البسط موجباً، فإنه يتناقص مع ρ ويزداد المقام؛ وبعد $\rho = \sqrt{2}d$ ، يكون الانزياح غير موجب.

إذن تحدث القيمة العظمى مباشرةً فوق الإلكترون، حيث تكون المسافة بين الرأس والإلكترون d_0 . عند تلك النقطة،

$$f_z = \frac{k_e q Q}{d_0^2}, \quad c_3 = -\frac{2k_e q Q}{d_0^3}.$$

بالتعويض في البند (e) نحصل على

$$(\omega_0 + \Delta\omega_0)^2 = \omega_0^2 + \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

وبالتالي،

$$2\omega_0 \Delta\omega_0 + (\Delta\omega_0)^2 = \frac{2k_e q Q}{m d_0^3}.$$

بما أن $\omega_0 \gg \Delta\omega_0$ ، نهمل مربع الانزياح:

$$d_0 \simeq \left(\frac{k_e q Q}{m \omega_0 \Delta\omega_0} \right)^{1/3}.$$

عدديًا،

$$\omega_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ s}^{-1},$$

و

$$k_e q Q = (9.0 \times 10^9) 6(1.6 \times 10^{-19})^2 = 1.3824 \times 10^{-27} \text{ N m}^2.$$

وعليه،

$$d_0^3 \simeq \frac{1.3824 \times 10^{-27}}{(1.0 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^6)(20)} \text{ m}^3 = 6.912 \times 10^{-23} \text{ m}^3,$$

مما يعطي

$$d_0 \simeq 4.1039 \times 10^{-8} \text{ m} \implies \boxed{d_0 \simeq 41 \text{ nm}}.$$

انزياح التردد النسبي هو $20/10^6 = 2.0 \times 10^{-5}$ ، مما يؤكد صلاحية تقريب الانزياح الصغير.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.