

IPhO 2003

理论题与解答 · 台湾台北 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2003/

题目 1: 带有下落重物的摆

一根半径为 R 的刚性圆柱杆水平固定在地面上方。如图 1a 所示，用一根质量可忽略、长度为 L ($L > 2\pi R$) 的细绳，将质量为 m 的摆球悬挂在圆柱杆顶部的 A 点。将摆球抬高至与 A 点等高的位置，在细绳绷直时由静止释放。忽略细绳的伸长。假设摆球可视为质点，且仅在垂直于圆柱杆轴线的平面内摆动。因此，摆球也称为质点。重力加速度为 $\vec{g}$ 。

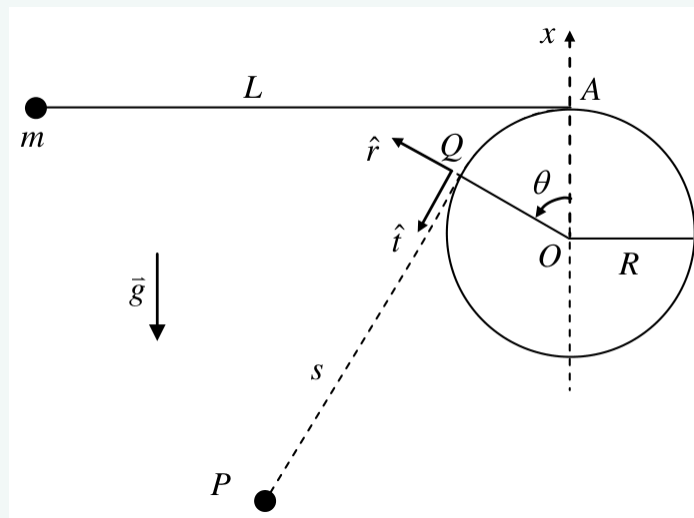


图 1a

取 O 为坐标系原点。当质点位于 P 点时，细绳在 Q 点与圆柱面相切。线段 QP 的长度记为 s 。 Q 点处的单位切向量和单位径向量分别记为 $\hat{t}$ 和 $\hat{r}$ 。半径 OQ 的角位移 θ 从沿 OA 方向的竖直 x 轴起算，规定逆时针方向为正。

当 $\theta = 0$ 时，长度 s 等于 L ，质点的重力势能 U 为零。质点运动时， θ 和 s 对时间的瞬时变化率分别记为 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{s}$ 。

除非另有说明，所有速率和速度均相对于固定点 O 而言。

部分 A

在部分 A 中，质点运动时细绳始终绷紧。用上述引入的量（即 $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, R, L, g, \hat{t}$ 和 $\hat{r}$ ）求：

- $\dot{\theta}$ 与 $\dot{s}$ 之间的关系。（0.5 分）
- 移动点 Q 相对于 O 的速度 $\vec{v}_Q$ 。（0.5 分）
- 质点位于 P 点时相对于移动点 Q 的速度 $\vec{v}'$ 。（0.7 分）
- 质点位于 P 点时相对于 O 的速度 $\vec{v}$ 。（0.7 分）
- 质点位于 P 点时相对于 O 的加速度的 $\hat{t}$ 分量。（0.7 分）

(f) 质点位于 P 点时的重力势能 U 。(0.5 分)

(g) 质点在其轨迹最低点处的速率 v_m 。(0.7 分)

部分 B

在部分 B 中, L 与 R 的比值如下:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

(h) 当从 Q 到 P 的绳段既保持笔直且长度最短时, 质点的速率 v_s 是多少? (用 g 和 R 表示) (2.4 分)

(i) 当质点摆到圆柱杆的另一侧并到达最高点 H 时, 其速率 v_H 是多少? (用 g 和 R 表示) (1.9 分)

部分 C

在部分 C 中, 质量为 m 的摆球不再悬挂于 A 点, 而是通过一根跨过圆柱杆顶部的细绳与质量为 M 的较重物体相连, 如图 1b 所示。该重物也可视为质点。

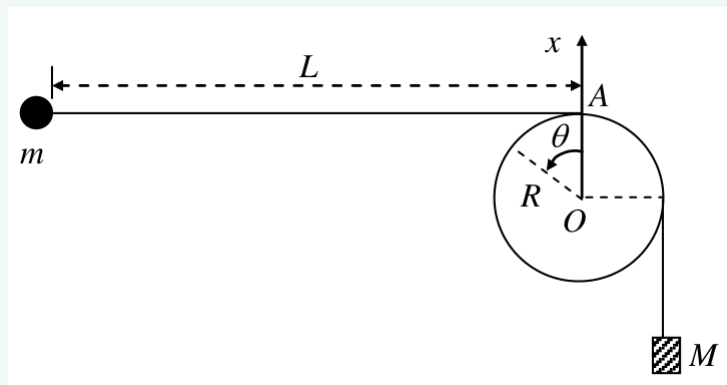


图 1b

初始时, 将摆球保持静止于与 A 点等高的位置, 使重物悬挂在 O 点下方, 细绳绷紧, 其水平段长度为 L 。随后将摆球由静止释放, 重物开始下落。假设摆球始终在竖直平面内运动, 且能够从下落的重物旁摆过而不受任何阻碍。

细绳与圆柱杆表面之间的滑动摩擦可忽略。但假设静摩擦足够大, 使重物一旦停止运动 (即速度为零) 便保持静止。

(j) 假设重物确实下落距离 D 后停止, 且 $(L - D) \gg R$ 。若此后质点能够绕圆柱杆摆动至 $\theta = 2\pi$, 同时细绳不与圆柱杆接触的两段均保持笔直, 则比值 $\alpha = D/L$ 必须不小于临界值 α_c 。忽略 R/L 阶及更高阶的项, 求 α_c 的估计值, 用 M/m 表示。(3.4 分)

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) $\dot{s} = -R\dot{\theta}$.
- (b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$.
- (c) $\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}$.

- (d) $\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (e) $a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2$.
- (f) $U = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta]$.
- (g) $v_m = \sqrt{2g\left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)R\right]}$.
- (h) $v_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sqrt{gR} \approx 1.133\sqrt{gR}$, 此时 $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$.
- (i) $v_H = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{gR} \approx 0.4334\sqrt{gR}$.
- (j) $\alpha \geq \alpha_c$, $\alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}$.

当 g 和 R 采用国际单位制单位表示时, 速率因子 $\sqrt{gR}$ 的单位为 m s^{-1} 。

解答

取 $\hat{x}$ 竖直向上, 并引入水平向左的 $\hat{y}$ 。于是, 图 1a 中所示的单位向量为

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}.$$

因此,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r},$$

而质点的位置为

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

(a) 绕在圆柱杆上的绳长为 $R\theta$ 。由绳长不变可得

$$s + R\theta = L.$$

求导得

$$\boxed{\dot{s} = -R\dot{\theta}}.$$

(b) 由于 $\vec{OQ} = R\hat{r}$,

$$\boxed{\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta}\hat{t}}.$$

这里 Q 表示不断变化的几何接触点; 它不必始终是静止圆柱杆上的同一个点。

(c) 质点相对于 Q 的位移为 $s\hat{t}$ 。在固定坐标系中对该向量求导, 得

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s}\hat{t} + s\frac{d\hat{t}}{dt}.$$

因此

$$\boxed{\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}}.$$

(d) 加上 Q 的速度, 得

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

利用 (a) 的结果, $\hat{t}$ 分量相互抵消:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}.$$

特别地，在最初 $\dot{\theta} > 0$ 的摆动过程中，

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) 对速度求导：

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}.$$

因此，

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

负号表示加速度的这一分量沿笔直的绳段指向 Q 。

(f) 由位置向量可知，质点的竖直坐标为

$$x = R\cos\theta - s\sin\theta.$$

初始时 $x = R$ ，该处的势能定义为零。因此

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta].$$

(g) 张力沿 $-\hat{t}$ 方向，而速度沿 $\hat{r}$ 方向，因此张力不做功。由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

即

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta].$$

为确定最低点，利用 $ds/d\theta = -R$ 对高度求导：

$$\frac{dx}{d\theta} = -R\sin\theta - \frac{ds}{d\theta}\sin\theta - s\cos\theta = -s\cos\theta.$$

在 $\theta = \pi/2$ 之前，高度减小；刚过此位置，高度便开始增大。因此，最低点对应于

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

从释放位置到此处的竖直下降距离为 $R + s_m$ ，因而

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g\left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)R\right]}.$$

(h) 用 T 表示张力。重力沿 $\hat{t}$ 方向的分量为 $mg\sin\theta$ ，因此，由牛顿第二定律和 (e) 的结果可得

$$mg\sin\theta - T = -m\frac{v^2}{s}.$$

因此，

$$T = m\left(\frac{v^2}{s} + g\sin\theta\right).$$

代入由能量关系得到的表达式，得

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos\theta)}{s} + 3\sin\theta.$$

随着摆球绕圆柱杆运动、细绳逐渐缠绕, $s = L - R\theta$ 减小。细绳不能产生负张力, 因此, 当 T 首次重新降为零时, 这种受约束的运动便结束。此时细绳仍然笔直, 且其长度在最初这次摆动中达到最短。

在 $0 < \theta \leq \pi$ 时, 张力为正。将此后张力第一次为零时的角度写为

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

条件 $T = 0$ 化为

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

从而

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

由于 $L = s_s + R\theta_s$,

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

与题目给定的 L/R 的精确值比较, 可得所需的第一个根

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

以及

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

张力为零时,

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

利用 $\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$, 得

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

因此

$$\boxed{v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}}.$$

(i) 在 (h) 中求得时刻,

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

由于 $\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$, 向上和水平方向的速度分量为

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

细绳变松, 质点做抛体运动。其水平速度保持不变, 而向上的速度在经过以下时间后降为零:

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

因此, 在最高点处, 其速率恰好等于水平速率:

$$\boxed{v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}}.$$

还可以从几何上检验细绳在这一上升过程中是否始终松弛。定义

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

抛体的坐标 $X = x/R$, $Y = y/R$ 为

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

对于该轨迹上的一点, 令

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \operatorname{atan} 2(Y, X).$$

细绳先沿圆弧缠绕、再沿切线笔直延伸至该点所需的长度为

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

代入并求导可知, 这一长度在整个上升过程中持续减小: 其初值为 $L/R = 6.88585$, 到达 H 点时降至 6.75065 。因此, 细绳在质点到达最高点之前始终松弛, 符合上述抛体运动计算的要求。

(j) 忽略题目指定的由圆柱杆半径引起的修正后, 重物停止时摆球到等效悬点的距离为

$$\ell = L - D.$$

缠绕部分的绳长以及与圆柱杆有关的竖直位置偏移均为 R 阶; 由于 $(L - D) \gg R$, 忽略这些量是合理的。

下落的重物损失的重力势能为 MgD 。滑动摩擦可忽略, 且重物停止时的动能为零。此后, 静止的细绳接触处不做功。因此, 以摆球初始所在的水平面为势能零面, 其守恒的机械能为 MgD 。

摆球在角度 θ 处的高度近似为 $-\ell \sin \theta$, 故

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

记 $\mu = M/m$, 则得

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

对于随后的圆周运动, 张力为

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

约束最严格的位置是圆周的最高点, 即 $\theta = 3\pi/2$, 此时 $\sin \theta = -1$ 。要使细绳保持笔直, 必须满足

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

即

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

等价地, 在最高点处, 摆球必须至少保持速率 $\sqrt{g\ell}$; 因此, 它在该处的能量必须至少为

$$mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell = \frac{3}{2}mg\ell.$$

利用 $\ell = L - D$ 和 $\alpha = D/L$, 得

$$\begin{aligned} 2\mu D &\geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha &\geq 3. \end{aligned}$$

因此,

$$\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.$$

等号对应于最高点处张力为零的临界情况。题目假设的静摩擦使较重的物体在随后的摆动过程中保持静止。

解答已与官方解答核对。

题目 2：交变电压作用下的压电晶体谐振器

考虑一根未受应力时长度为 ℓ 、横截面积为 A 的均匀杆 (图 2a)。当在两端面上沿法线方向施加大小均为 F 、方向相反的力时, 杆的长度变化为 $\Delta\ell$ 。端面上的应力 T 定义为 F/A 。长度的相对变化, 即 $\Delta\ell/\ell$, 称为杆的应变 S 。用应力和应变表示, 胡克定律可写为

$$T = YS \quad \text{或} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

其中, Y 称为杆材料的杨氏模量。注意, 压应力 T 对应于 $F < 0$ 和长度减小 (即 $\Delta\ell < 0$)。因此, 这种应力的值为负, 与压强 p 的关系为 $T = -p$ 。

对于密度为 ρ 的均匀杆, 纵波沿杆传播的速度 (即声速) 为

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

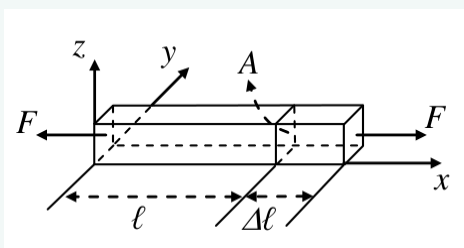


图 2a

回答以下问题时, 可以忽略阻尼和耗散的影响。

部分 A: 力学性质

一根从 $x = 0$ 延伸至 ∞ 的半无限长均匀杆 (见图 2b), 密度为 ρ 。初始时, 杆静止且未受应力。随后, 一个活塞在很短的时间 Δt 内, 持续向杆位于 $x = 0$ 处的左端面施加一个恒定的小压强 p , 使压强波以速度 u 向右传播。

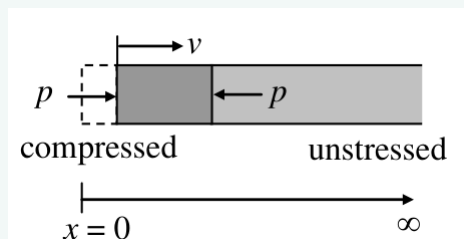


图 2b

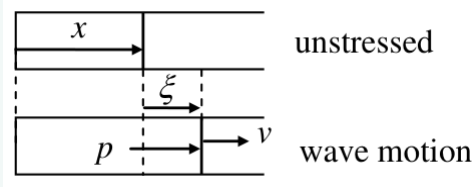


图 2c

(a) 如果活塞使杆的左端面以恒定速度 v 运动（图 2b），则在时间 Δt 内，左端面处的应变 S 和压强 p 是多少？答案必须仅用 ρ 、 u 和 v 表示。（1.6 分）

(b) 考虑沿杆的 x 方向传播的纵波。对于杆未受应力时位于 x 处的横截面（图 2c），令 $\xi(x, t)$ 为其在时刻 t 的位移，并假设

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

其中， ξ_0 和 k 为常量。求相应的速度 $v(x, t)$ 、应变 $S(x, t)$ 和压强 $p(x, t)$ 关于 x 和 t 的函数。（2.4 分）

部分 B: 机电性质（包括压电效应）

考虑一块长为 b 、厚为 h 、宽为 w 的石英晶片（图 2d）。其长度和厚度方向分别沿 x 轴和 z 轴。晶片的上、下表面镀有薄金属层，形成电极。兼作安装支架的电引线（图 2e）焊接在电极的中心处；对于沿 x 方向的纵向振动，可以认为这些中心保持静止。

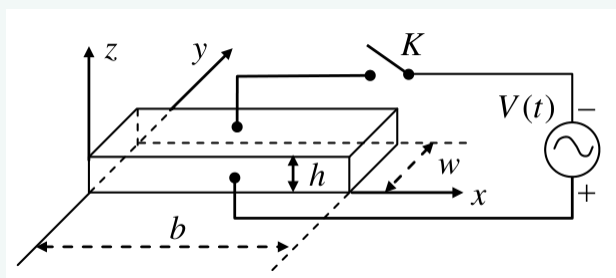


图 2d

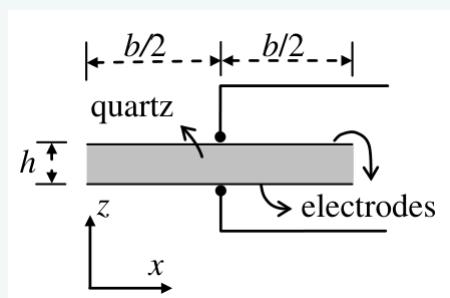


图 2e

所考虑的石英晶体的密度 ρ 为 $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 Y 为 $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 。晶片的长度 b 为 1.00 cm ，宽度 w 和高度 h 满足 $h \ll w$ 且 $w \ll b$ 。开关 K 保持断开时，假设石英晶片仅激发沿 x 方向的纵向驻波振动模式。

对于频率为 $f = \omega/2\pi$ 的驻波，晶片中心位置为 x 的横截面在时刻 t 的位移 $\xi(x, t)$ 可写为

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

其中， ξ_0 是正常量，空间函数 $g(x)$ 的形式为

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

$g(x)$ 的最大值为一，且 $k = \omega/u$ 。请注意，电极的中心保持静止，晶片的左、右端面是自由端面，其应力（或压强）必须为零。

(c) 对于石英晶片中的纵向驻波，确定式 (4b) 中 B_1 和 B_2 的值。（1.2 分）

(d) 石英晶片中能够激发的纵向驻波的两个最低频率是多少？（1.2 分）

压电效应是石英晶体的一种特殊性质。晶体受到压缩或膨胀时，会在晶体两侧产生电压；反过来，在晶体两侧施加外电压，会使晶体膨胀或收缩，具体取决于电压的极性。因此，通过石英晶体，可以使机械振动与电振荡相互耦合并发生谐振。

为考虑压电效应，设石英晶片处于沿 z 方向的电场 E 中时，上、下电极的面电荷密度分别为 $-\sigma$ 和 $+\sigma$ 。用 S 和 T 分别表示晶片沿 x 方向的应变和应力。于是，石英晶体的压电效应可由以下方程组描述：

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

其中， $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ 为恒定电场下的弹性柔量（即杨氏模量的倒数）， $\varepsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ 为恒定应力下的介电常数，而 $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ 为压电系数。

闭合图 2d 中的开关 K 。此时，交变电压 $V(t) = V_m \cos \omega t$ 施加在两电极之间，石英晶片中出现沿 z 方向的均匀电场 $E(t) = V(t)/h$ 。达到稳态后，晶片中沿 x 方向出现角频率为 ω 的纵向驻波振动。

由于 E 均匀，晶片中纵向驻波的波长 λ 和频率 f 仍满足 $\lambda = u/f$ ，其中 u 由式 (2) 给出。但是，如式 (5a) 所示， $T = YS$ 不再成立，尽管应变和应力的定义不变，且晶片的端面仍为应力为零的自由端面。

(e) 考虑式 (5a) 和式 (5b)，下电极的面电荷密度 σ 关于 x 和 t 的函数具有如下形式：

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

其中， $k = \omega/u$ 。求 D_1 和 D_2 的表达式。（2.2 分）

(f) 下电极上的总表面电荷 $Q(t)$ 与 $V(t)$ 的关系为

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (6)$$

求 C_0 的表达式，以及 α^2 的表达式和数值。（1.4 分）

题目译自官方英文原文。

答案

• (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

• (b)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

• (c)

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

整体符号对应于任意选取的振动相位；可选择 $B_1 = 1$ 。

• (d)

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

• (e)

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

• (f)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

这里， α^2 是无量纲量。

解答

采用题目所规定的一维小应变近似。由于 x 标记的是横截面未受应力时的位置，其速度和纵向应变为

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

对于纯力学模型， $T = YS$ 、 $p = -T$ ，且 $Y = \rho u^2$ 。

(a)

在时间 Δt 内，扰动传播的距离为 $u\Delta t$ 。因此，在小形变的一阶近似下，被带动而以速度 v 运动的质量为

$$m = \rho A u \Delta t.$$

杆所受外力的冲量等于其获得的动量：

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

因此

$$p = \rho u v.$$

所受应力为压应力，故 $T = -p$ 。由胡克定律得

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

从而

$$S = -\frac{v}{u}.$$

这个符号也可由几何关系得出：原本未受应力时长度为 $u\Delta t$ 的一段杆，缩短了活塞的位移 $v\Delta t$ 。

(b)

对位移关于时间求导，得到质点速度：

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = -ku\xi_0 \cos k(x - ut).$$

对位移关于未受应力时的坐标求导，得到应变：

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = k\xi_0 \cos k(x - ut).$$

最后，

$$p(x, t) = -YS(x, t),$$

所以

$$p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut).$$

特别地， $p(x, t) = \rho u v(x, t)$ ，这与 (a) 中向右传播的波的结果一致。

(c)

中点保持静止，因此

$$\xi(b/2, t) = 0 \implies g(b/2) = 0.$$

将 $x = b/2$ 代入式 (4b)，得

$$B_2 = 0.$$

因此，

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

在力学模型中，自由端的应力为零，因而应变也为零。因此，

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

由于

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

非平凡的振动模态要求

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

对于这些允许的 k 值，正弦函数在晶片内既能达到 $+1$ ，也能达到 -1 。因此，归一化条件 $\max g(x) = 1$ 意味着

$$|B_1| = 1.$$

正、负两种符号均可。将 B_1 改为 $-B_1$ ，等效于将振动相位平移 π ；可以选择 $B_1 = 1$ 。

(d)

上面得到的自由端条件给出

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

或

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

利用 $\omega = uk$ 和 $f = \omega/(2\pi)$, 得

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

因此, 允许的模态为奇次谐波。两个最低频率分别对应于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 。

声速为

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

取 $b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$, 得

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

以及

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

考虑压电效应后, 由式 (5a) 得

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

对晶片的一个微元应用牛顿第二定律, 得

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

由于 E 在空间上均匀,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

对于驱动频率下的简谐响应, 写成

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

由于 $\ddot{E} = -\omega^2 E$, 空间函数满足

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

中点固定要求 $H(b/2) = 0$, 因此

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

所以，应变为

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

此时，自由端条件为 $T = 0$ ，这意味着

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

由此可得

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

因此

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

应力变为

$$T(x, t) = Yd_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

代入式 (5b)，得

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Yd_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Yd_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}. \end{aligned}$$

与题目给定的形式比较，得

$$\boxed{D_1 = \frac{Yd_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Yd_p^2.}$$

这两个系数都具有介电常数的单位，即 F/m。

这些表达式描述的是不处于精确谐振条件时的简谐特解。当 $\cos(kb/2) = 0$ 时，在非零外加电压作用下，有限的简谐振幅无法满足边界条件。因此，这些极点表明，在无阻尼模型中，谐振时不存在有界的稳态响应。

(f)

在线性近似下，长度为 dx 的电极条带的面积为 $w dx$ 。因此，下电极上的总电荷为

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

所需的空间积分为

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

利用 (e) 中的结果，得

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Yd_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Yd_p^2) \right].$$

提取公因子 $\varepsilon_T bw/h$ ，得

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T b w}{h} \left[1 + \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{k b} \tan \frac{k b}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

与式 (6) 比较, 得

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}}, \quad \boxed{\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T}}.$$

利用给定的弹性柔量, 得

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}. \end{aligned}$$

代入给定的长度, 电容表达式也可写为

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

作为一致性检验, 在准静态极限 $k b \rightarrow 0$ 下,

$$\frac{2}{k b} \tan \frac{k b}{2} \rightarrow 1,$$

所以 $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$, 这与介电常数为 ε_T 的无应力晶片的预期结果一致。

解答已与官方解答核对。

题目 3: 中微子质量与中子衰变 (部分 A) ; 光悬浮 (部分 B)

部分 A

中微子质量与中子衰变

一个质量为 m_n 的自由中子在实验室参考系中静止, 衰变为三个彼此无相互作用的粒子: 一个质子、一个电子和一个反中微子。质子的静止质量为 m_p , 假设反中微子的静止质量 m_v 非零, 且远小于电子的静止质量 m_e 。用 c 表示真空中的光速。各质量的测量值如下:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

以下所有能量和速度均相对于实验室参考系而言。设衰变产生的电子的总能量为 E 。

(a) 求 E 的最大可能值 $E_{\max}$, 以及当 $E = E_{\max}$ 时反中微子的速率 v_m 。两个答案均须用各粒子的静止质量和光速表示。已知 $m_v < 7.3 \text{ eV}/c^2$, 计算 $E_{\max}$ 和比值 v_m/c , 结果保留 3 位有效数字。

(4.0 分)

部分 B

光悬浮

一个半径为 R 、质量为 m 的透明玻璃半球, 其折射率为 n 。半球外介质的折射率等于一。一束平行的单色激光均匀地垂直入射到半球平面的中央部分, 如图 3 所示。重力加速度 $\vec{g}$ 竖直向下。激光束的圆形横截面半径 δ 远小于 R 。玻璃半球和激光束均关于 z 轴轴对称。

玻璃半球不吸收任何激光。其表面镀有一层透明材料薄膜，使光进入和离开玻璃半球时的反射可以忽略不计。激光穿过这一无反射表面薄层时的光程也可以忽略不计。

(b) 忽略 $(\delta/R)^3$ 阶及更高阶的项，求平衡玻璃半球重力所需的激光功率 P 。

(4.0 分)

提示：当 θ 远小于一时， $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ 。

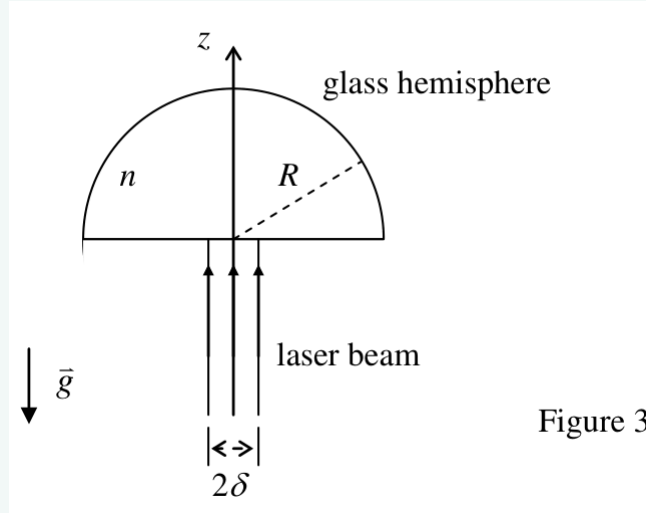


Figure 3

图 3

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 电子的最大总能量为

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n} c^2.$$

在这一端点处，反中微子与质子的速度相同，其速率为

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_\nu + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_\nu - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_\nu)^2 - m_e^2}.$$

保留三位有效数字，得到

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

- (b) 保留到题目要求的阶数，得到

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

解答

(a) 中微子质量与中子衰变

设电子的动量大小为 p_e 。由能量守恒和动量守恒得

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

用 $\mathcal{M}$ 表示质子与反中微子组成的二粒子系统的不变质量。利用电子的能量—动量关系

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

可得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

因此,

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

所以, 当 $\mathcal{M}$ 最小时, 电子的能量最大。

在该二粒子系统的动量中心系中, 质子与反中微子的动量大小相等、方向相反, 大小均为 q 。于是

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

当 $q = 0$ 时等号成立: 两个粒子在此参考系中均静止, 因此它们在实验室参考系中具有**相同的速度**。由于 $m_n > m_p + m_v + m_e$, 这一状态在运动学上是允许的。

记 $M = m_p + m_v$, 则端点能量为

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

在端点处, 该二粒子系统的能量为 $m_n c^2 - E_{\max}$, 动量大小为 p_e 。两个粒子的共同速率, 也就是反中微子的速率, 可由 $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E_{\text{总}}$ 求得:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

代入可得

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

进行数值计算时, 取极限 $m_v \rightarrow 0^+$, 得到

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

将 $m_v c^2$ 从零增大至其上限 7.3 eV, 这两个数值的减小量分别小于 7.30 eV 和 8.5×10^{-9} 。因此, 在整个允许的质量范围内, 保留三位有效数字均得到

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

这里的 $E_{\max}$ 是电子的**总能量**。尽管反中微子的质量极小, 它在这一端点处的速率却很低: 为了与质子具有相同的速度, 它的动量也必须极小。

(b) 光悬浮

考虑一条在距 z 轴为 r 处进入半球的光线，其中 $0 \leq r \leq \delta$ 。它垂直入射到平面上，因此在玻璃内部继续沿竖直方向传播。

在球面处，设入射光线与外法线之间的夹角为 θ 。由几何关系得

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

若出射光线与该法线之间的夹角为 θ' ，则由斯涅尔定律得

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

对于 $n > 1$ 的玻璃，出射光线向轴线方向偏折。它与竖直向上方向的夹角大小为

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

由于 $r/R \leq \delta/R \ll 1$ ，在 n 固定时展开，得到

$$\alpha = (n-1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

在进入半球之前和离开半球之后，光的动量均等于其能量除以 c 。吸收和反射可以忽略不计，因此，携带功率 dP 的一束光线，其入射竖直动量通量为 dP/c ，出射竖直动量通量为 $(dP/c) \cos \alpha$ 。

根据动量守恒，这束光线对半球施加的向上作用力为

$$dF_z = \frac{dP}{c} (1 - \cos \alpha).$$

利用题目给出的小角近似，

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n-1)^2 r^2}{2R^2}.$$

由于轴对称性，力的横向分量相互抵消。

入射光强均匀：

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

因此，半径为 r 、宽度为 dr 的圆环所携带的功率为

$$dP = I 2\pi r dr.$$

对整个光束的竖直作用力积分，得到

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n-1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n-1)^2}{c R^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P (n-1)^2 \delta^2}{4c R^2}. \end{aligned}$$

这里保留了 $(\delta/R)^2$ 阶的贡献； $F_z/(P/c)$ 的下一阶修正为 $(\delta/R)^4$ 阶。

令这一向上的作用力与重力平衡，

$$mg = \frac{P (n-1)^2 \delta^2}{4c R^2},$$

得到

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

解答已与官方解答核对。