

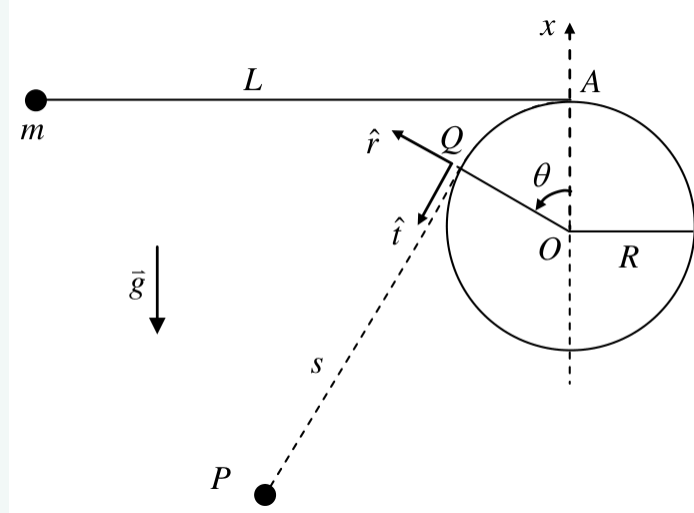
IPhO 2003

Teorik sorular ve çözümler · Taipei, Tayvan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2003/

Soru 1: Düşen Bir Ağırlıkla Salınım

Yarıçapı R olan rijit silindirik bir çubuk, yerden yüksekte yatay olarak tutulmaktadır. Kütlesi ihmal edilebilir, uzunluğu L ($L > 2\pi R$) olan bir ip, kütlesi m olan bir sarkaç cismi, Şekil 1a'da gösterildiği gibi çubuğun tepesindeki A noktasından asılmıştır. Cisim, A ile aynı yüksekliğe gelinceye kadar kaldırılır ve ardından ip gerginken durgun hâlden serbest bırakılır. İpin uzamasını ihmal ediniz. Sarkaç cisminin noktasal bir kütle olarak ele alınabileceğini ve yalnızca çubuğun eksenine dik bir düzlemde salındığını varsayınız. Bu nedenle sarkaç cismi *parçacık* olarak da adlandırılacaktır. Yerçekimi ivmesi $\vec{g}$ 'dir.



Şekil 1a

Koordinat sisteminin başlangıç noktası O olsun. Parçacık P noktasındayken ip, silindirik yüzeye Q noktasında teğettir. QP doğru parçasının uzunluğu s olarak adlandırılır. Q noktasındaki birim teğet vektörü ve birim radyal vektör sırasıyla $\hat{t}$ ve $\hat{r}$ ile gösterilir. OQ yarıçapının θ açısız yer değiştirmesi, OA doğrultusundaki düşey x ekseninden saat yönünün tersine ölçüldüğünde pozitif kabul edilir.

$\theta = 0$ iken s uzunluğu L 'ye eşittir ve parçacığın kütleçekim potansiyel enerjisi U sıfırdır. Parçacık hareket ederken θ ve s 'nin zamana göre anlık değişim hızları sırasıyla $\dot{\theta}$ ve $\dot{s}$ ile gösterilir.

Aksi belirtilmedikçe tüm süratler ve hızlar, sabit O noktasına göredir.

Bölüm A

Bölüm A'da parçacık hareket ederken ip gergindir. Yukarıda tanımlanan nicelikler (yani $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, R, L, g, \hat{t}$ ve $\hat{r}$) cinsinden aşağıdakileri bulunuz:

(a) $\dot{\theta}$ ile $\dot{s}$ arasındaki bağıntı. (0.5 puan)

- (b) Hareketli Q noktasının O 'ya göre $\vec{v}_Q$ hızı. (0.5 puan)
- (c) Parçacık P 'deyken hareketli Q noktasına göre $\vec{v}'$ hızı. (0.7 puan)
- (d) Parçacık P 'deyken O 'ya göre $\vec{v}$ hızı. (0.7 puan)
- (e) Parçacık P 'deyken O 'ya göre ivmesinin $\hat{t}$ bileşeni. (0.7 puan)
- (f) Parçacık P 'deyken kütleçekim potansiyel enerjisi U . (0.5 puan)
- (g) Parçacığın yörüngesinin en alçak noktasındaki v_m sürati. (0.7 puan)

Bölüm B

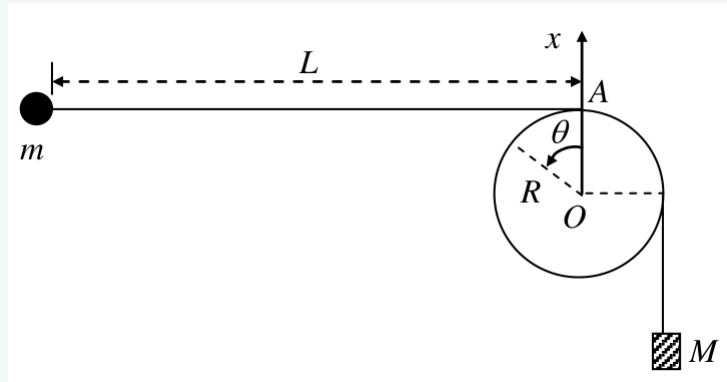
Bölüm B'de L 'nin R 'ye oranı aşağıdaki değere sahiptir:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

- (h) İpin Q 'dan P 'ye uzanan kısmı hem düz hem de en kısa uzunluktayken parçacığın v_s sürati nedir? (g ve R cinsinden) (2.4 puan)
- (i) Parçacık çubuğun diğer tarafına salındığında ulaştığı en yüksek H noktasındaki v_H sürati nedir? (g ve R cinsinden) (1.9 puan)

Bölüm C

Bölüm C'de, kütlesi m olan sarkaç cismi A 'dan asılmak yerine, Şekil 1b'de gösterildiği gibi çubuğun üstünden geçen bir ipe kütlesi M olan daha ağır bir ağırlığa bağlanmıştır. Ağırlık da bir parçacık olarak ele alınabilir.



Şekil 1b

Başlangıçta sarkaç cismi A ile aynı yükseklikte hareketsiz tutulur; bu durumda ağırlık O 'nun altında asılı dururken ip gergindir ve yatay kısmının uzunluğu L 'dir. Ardından sarkaç cismi durgun hâlden serbest bırakılır ve ağırlık düşmeye başlar. Sarkaç cisminin düşey bir düzlemde kaldığını ve düşen ağırlığın yanından hareketi kesintiye uğramadan salınarak geçebildiğini varsayınız.

İp ile çubuğun yüzeyi arasındaki kinetik sürtünme ihmal edilebilir. Ancak statik sürtünmenin, ağırlığın bir kez durduktan (yani hızı sıfır olduktan) sonra hareketsiz kalmasını sağlayacak kadar büyük olduğu varsayılmaktadır.

- (j) Ağırlığın gerçekten de D kadar düştükten sonra durduğunu ve $(L - D) \gg R$ olduğunu varsayınız. Parçacığın bundan sonra, ipin çubuğa temas etmeyen her iki kısmı da düz kalacak şekilde çubuğun çevresinde $\theta = 2\pi$ 'ye kadar salınabilmesi için $\alpha = D/L$ oranı, kritik bir α_c

değerinden küçük olmamalıdır. R/L mertebesindeki ve daha yüksek mertebedeki terimleri ihmal ederek α_c için M/m cinsinden bir tahmin elde ediniz. (3.4 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) $\dot{s} = -R\dot{\theta}$.
- (b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$.
- (c) $\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (d) $\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (e) $a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2$.
- (f) $U = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta]$.
- (g) $v_m = \sqrt{2g\left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)R\right]}$.
- (h) $v_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sqrt{gR} \approx 1.133\sqrt{gR}$, bu sırada $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$.
- (i) $v_H = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{gR} \approx 0.4334\sqrt{gR}$.
- (j) $\alpha \geq \alpha_c$, $\alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}$.

g ve R SI birimleriyle ifade edildiğinde, süratlerdeki $\sqrt{gR}$ çarpanlarının birimi m s^{-1} olur.

Çözüm

$\hat{x}$ 'i düşey yukarı yönde alalım ve $\hat{y}$ 'yi yatay sola doğru tanımlayalım. Bu durumda Şekil 1a'da gösterilen birim vektörler

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r},$$

ve parçacığın konumu

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

ile verilir.

(a) Çubuğa sarılı kısmın uzunluğu $R\theta$ 'dir. İpin uzunluğunun korunmasından

$$s + R\theta = L.$$

elde edilir. Türev alındığında,

$$\boxed{\dot{s} = -R\dot{\theta}}.$$

(b) $\vec{OQ} = R\hat{r}$ olduğundan,

$$\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta}\hat{t}.$$

Burada Q , yeri değişen geometrik temas noktasını belirtir; hareketsiz çubuk üzerindeki aynı nokta olarak kalması gerekmez.

(c) Parçacığın Q 'ya göre yer değiştirme vektörü $s\hat{t}$ 'dir. Bu vektörün sabit eksenlerde türevini almak

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s}\hat{t} + s\frac{d\hat{t}}{dt}.$$

sonucunu verir. Böylece

$$\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

(d) Q 'nun hızı eklendiğinde,

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

(a) kısmı kullanıldığında $\hat{t}$ bileşeni sıfırlanır:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}.$$

Özellikle, $\dot{\theta} > 0$ olan ilk salınım sırasında,

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) Hızın türevini alalım:

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}.$$

Dolayısıyla,

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

Eksi işareti, ivmenin düz ip boyunca Q 'ya doğru olduğunu gösterir.

(f) Konum vektöründen, parçacığın düşey koordinatı

$$x = R \cos \theta - s \sin \theta.$$

olarak bulunur. Başlangıçta $x = R$ 'dir ve bu konumda potansiyel enerji sıfır olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos \theta - 1) - s \sin \theta].$$

(g) İp gerilmesi $-\hat{t}$ yönünde, hız ise $\hat{r}$ doğrultusunda olduğundan gerilme iş yapmaz. Mekanik enerjinin korunumundan

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

ya da

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

elde edilir. En alçak noktayı bulmak için $ds/d\theta = -R$ kullanarak yüksekliğin türevini alalım:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta - s \cos \theta = -s \cos \theta.$$

Yükseklik $\theta = \pi/2$ 'den önce azalır ve hemen sonrasında artar. Dolayısıyla en alçak noktada

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

olur. Serbest bırakıldığı konuma göre düşey alçalma $R + s_m$ olduğundan,

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}.$$

(h) İp gerilmesini T ile gösterelim. Yerçekimi kuvvetinin $\hat{t}$ yönündeki bileşeni $mg \sin \theta$ olduğundan, Newton'ın ikinci yasası ve (e) kısmı

$$mg \sin \theta - T = -m \frac{v^2}{s}.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla,

$$T = m \left(\frac{v^2}{s} + g \sin \theta \right).$$

Enerji ifadesi yerine konulduğunda,

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos \theta)}{s} + 3 \sin \theta.$$

Sarkaç cismi çubuğun çevresinde dolandıkça $s = L - R\theta$ azalır. Bir ip negatif gerilme uygulayamayacağından, bu kısıtlı hareket T ilk kez yeniden sıfıra düştüğünde sona erer. O anda ip hâlâ düzdür ve ilk salınımdaki en kısa uzunluğuna sahiptir.

$0 < \theta \leq \pi$ için gerilme pozitifdir. Bundan sonraki ilk sıfırını

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

olarak yazalım. $T = 0$ koşulu

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

hâline gelir; buradan

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

$L = s_s + R\theta_s$ olduğundan,

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

L/R 'nin verilen tam değeriyle karşılaştırıldığında, ilgili ilk kök

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

ve

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

olarak bulunur. Gerilme sıfırken,

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

$\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$ kullanıldığında,

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

Böylece

$$v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}.$$

(i) (h) kısmında bulunan anda,

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

$\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$ olduğundan, hızın yukarı yönlü ve yatay bileşenleri

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

şeklinde. İp gevşer ve parçacık eğik atış yörüngesi izler. Yatay hızı sabit kalırken yukarı yönlü hızı

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

süresi sonunda sıfıra ulaşır. Bu nedenle en yüksek noktadaki sürati yalnızca yatay süratine eşittir:

$$v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}.$$

İpin bu yükseliş boyunca gevşek kalması geometrik olarak da kontrol edilebilir. Şu tanımları yapalım:

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Eğik atış hareketindeki $X = x/R$, $Y = y/R$ koordinatları

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

ile verilir. Bu yörünge üzerindeki bir nokta için

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \text{atan2}(Y, X).$$

olsun. Sarılı bir yayın ardından düz bir teğet parçası oluşturmak için gereken ip uzunluğu

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

ile verilir. Yerine koyma ve türev alma işlemleri, bu uzunluğun yükseliş boyunca azaldığını gösterir: başlangıçta $L/R = 6.88585$ olan değer, H' 'de 6.75065'e ulaşır. Dolayısıyla ip, eğik atış hesabının gerektirdiği gibi en yüksek noktaya kadar gevşek kalır.

(j) Çubuğun yarıçapından kaynaklanan ve ihmal edilmesi belirtilen düzeltmeler ihmal edildiğinde, ağırlık durduktan sonra sarkaç cisminin etkin askı noktasına uzaklığı

$$\ell = L - D.$$

olur. Sarılı kısımların uzunlukları ve çubukla ilişkili düşey seviye farkları R mertebesinde;

$(L - D) \gg R$ koşulu bunların ihmal edilmesini haklı kılar.

Düşen ağırlık MgD kadar kütleçekim potansiyel enerjisi kaybeder. Kinetik sürtünme ihmal edilebilir ve ağırlık durduğunda kinetik enerjisi sıfırdır. Bundan sonra, ipin hareketsiz temas noktası iş yapmaz. Dolayısıyla sarkaç cisminin başlangıçtaki yatay seviyesine göre ölçülen ve korunan mekanik enerjisi

MgD 'dir.

θ açısındaki yüksekliği yaklaşık olarak $-\ell \sin \theta$ olduğundan,

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

$\mu = M/m$ yazıldığında, buradan

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

elde edilir. Bundan sonraki çembersel hareket için gerilme

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

olur. En kısıtlayıcı konum, $\theta = 3\pi/2$ ve $\sin \theta = -1$ olan çemberin tepe noktasıdır. İpin düz kalması için

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

ya da

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

olmalıdır. Eşdeğer olarak, sarkaç cisminin tepe noktasında en az $\sqrt{g\ell}$ süratini koruması gerekir; dolayısıyla oradaki enerjisi en az

$$mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell = \frac{3}{2}mg\ell.$$

olmalıdır. $\ell = L - D$ ve $\alpha = D/L$ kullanıldığında,

$$\begin{aligned} 2\mu D &\geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha &\geq 3. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\boxed{\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.}$$

Eşitlik, tepe noktasında gerilmenin sıfır olduğu sınır durumudur. Varsayılan statik sürtünme, sonraki salınım boyunca daha ağır olan ağırlığı hareketsiz tutar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Alternatif Gerilim Altında Bir Piezoelektrik Kristal Rezonatör

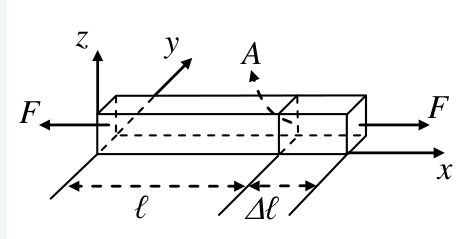
Gerilmesiz durumdaki uzunluğu ℓ , kesit alanı A olan düzgün bir çubuk ele alalım (Şekil 2a). Uç yüzeylerine dik olarak, büyüklükleri F olan eşit ve zıt yönlü kuvvetler uygulandığında uzunluğu $\Delta\ell$ kadar değişir. Uç yüzeylerindeki gerilme T , F/A olarak tanımlanır. Uzunluğundaki bağıl değişime, yani $\Delta\ell/\ell$ oranına, çubuğun birim şekil değiştirmesi S denir. Hooke yasası, gerilme ve birim şekil değiştirme cinsinden şöyle ifade edilebilir:

$$T = YS \quad \text{veya} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

Burada Y , çubuk malzemesinin Young modülü olarak adlandırılır. Bir basma gerilmesi T 'nin, $F < 0$ durumuna ve uzunlukta bir azalmaya (yani $\Delta\ell < 0$) karşılık geldiğine dikkat ediniz. Dolayısıyla böyle bir gerilmenin değeri negatiftir ve basınç p ile ilişkisi $T = -p$ şeklindedir.

Yoğunluğu ρ olan düzgün bir çubukta, boyuna dalgaların çubuk boyunca yayılma hızı (yani ses hızı) şu şekilde verilir:

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

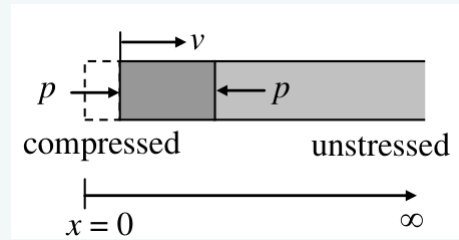


Şekil 2a

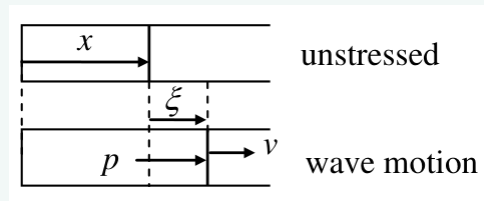
Aşağıdaki soruları yanıtlarken sönüm ve enerji kaybının etkileri ihmal edilebilir.

Bölüm A: mekanik özellikler

$x = 0$ 'dan ∞ 'a uzanan (bkz. Şekil 2b), yarı sonsuz uzunluktaki düzgün bir çubuğun yoğunluğu ρ 'dur. Çubuk başlangıçta durgun ve gerilmesizdir. Ardından bir piston, $x = 0$ 'daki sol yüzeye çok kısa bir Δt süresi boyunca sabit ve küçük bir p basıncı uygulayarak sağa doğru u hızıyla yayılan bir basınç dalgası oluşturur.



Şekil 2b



Şekil 2c

(a) Piston, çubuğun sol yüzeyinin sabit bir v hızıyla hareket etmesine neden oluyorsa (Şekil 2b), Δt süresi boyunca sol yüzeydeki birim şekil değiştirme S ve basınç p nedir? *Yanıtlar yalnızca ρ , u ve v cinsinden verilmelidir.* (1.6 puan)

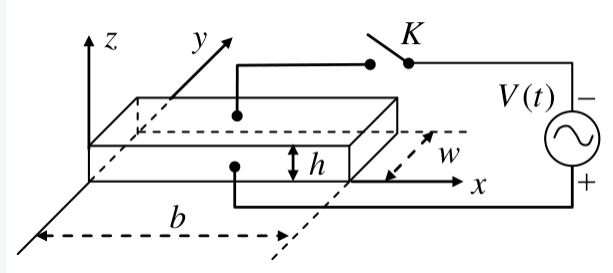
(b) Çubuk içinde x doğrultusunda ilerleyen bir boyuna dalga ele alalım. Çubuk gerilmesizken x konumunda bulunan bir kesitin (Şekil 2c) t anındaki yer değiştirmesi $\xi(x, t)$ olsun ve

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

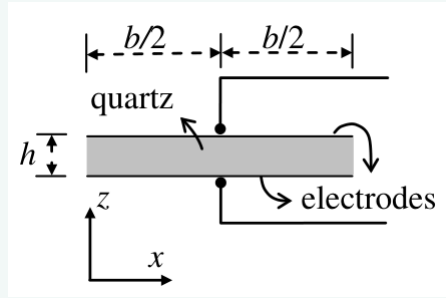
olduğunu varsayalım; burada ξ_0 ve k sabittir. Buna karşılık gelen hız $v(x, t)$, birim şekil değiştirme $S(x, t)$ ve basınç $p(x, t)$ ifadelerini x ve t 'nin fonksiyonu olarak belirleyiniz. (2.4 puan)

Bölüm B: elektromekanik özellikler (piezoelektrik etki dâhil)

Uzunluğu b , kalınlığı h ve genişliği w olan bir kuvars kristali levha ele alalım (Şekil 2d). Uzunluğu x eksenine, kalınlığı ise z eksenine doğrultusundadır. Üst ve alt yüzeylerindeki ince metal kaplamalar elektrotları oluşturur. Aynı zamanda levhayı taşıyan destekler olarak da işlev gören elektrik bağlantı telleri (Şekil 2e), elektrotların merkezlerine lehimlenmiştir; bu merkezlerin x doğrultusundaki boyuna salınımlar sırasında hareketsiz kaldığı varsayılabilir.



Şekil 2d



Şekil 2e

Ele alınan kuvars kristalinin yoğunluğu ρ , $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ve Young modülü Y , $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 'dir. Levhanın uzunluğu b , 1.00 cm 'dir; genişliği w ve yüksekliği h , $h \ll w$ ve $w \ll b$ koşullarını sağlar. K anahtarı açık bırakıldığında, kuvars levhada yalnızca x doğrultusundaki boyuna duran dalga salınım modlarının uyarıldığını varsayıyoruz.

Frekansı $f = \omega/2\pi$ olan bir duran dalga için, levhanın denge konumu x olan bir kesitin t anındaki yer değiştirmesi $\xi(x, t)$ şöyle yazılabilir:

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

Burada ξ_0 pozitif bir sabittir ve konuma bağlı $g(x)$ fonksiyonu şu biçimdedir:

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

$g(x)$ 'in maksimum değeri birdir ve $k = \omega/u$ 'dur. Elektrotların merkezlerinin hareketsiz olduğunu, levhanın sol ve sağ yüzeylerinin serbest olduğunu ve bu yüzeylerde gerilmenin (veya basıncın) sıfır olması gerektiğini unutmayınız.

(c) Kuvars levhadaki bir boyuna duran dalga için Denklem (4b)'deki B_1 ve B_2 değerlerini belirleyiniz. (1.2 puan)

(d) Kuvars levhada boyuna duran dalgaların uyarılabileceği en düşük iki frekans nedir? (1.2 puan)

Piezoelektrik etki, kuvars kristalinin özel bir özelliğidir. Kristalin sıkıştırılması veya genişmesi, kristalin iki yüzü arasında bir elektrik gerilimi oluşturur; tersine, kristalin iki yüzü arasına uygulanan dış gerilim, gerilimin kutupluluğuna bağlı olarak kristalin genişmesine veya büzülmesine neden olur. Dolayısıyla mekanik ve elektriksel salınımlar, bir kuvars kristali aracılığıyla birbirine bağlanabilir ve rezonansa getirilebilir.

Piezoelektrik etkiyi hesaba katmak için, kuvars levha z doğrultusunda bir E elektrik alanı altındayken üst ve alt elektrotlardaki yüzey yük yoğunlukları sırasıyla $-\sigma$ ve $+\sigma$ olsun. Levhanın x doğrultusundaki birim şekil değiştirmesini ve gerilmesini sırasıyla S ve T ile gösterelim. Bu durumda kuvars kristalinin piezoelektrik etkisi aşağıdaki denklem takımıyla betimlenebilir:

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

Burada $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$, sabit elektrik alan altındaki elastik uyumluluk (yani Young modülünün tersi); $\varepsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$, sabit gerilme altındaki elektriksel geçirgenlik; $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ise piezoelektrik katsayısıdır.

Şekil 2d'deki K anahtarı kapatılsın. Artık elektrotlar arasına $V(t) = V_m \cos \omega t$ alternatif gerilimi uygulanır ve kuvars levhada z doğrultusunda düzgün bir $E(t) = V(t)/h$ elektrik alanı oluşur. Kararlı duruma ulaşıldığında, levhada x doğrultusunda açısal frekansı ω olan bir boyuna duran dalga salınımı oluşur.

E düzgün olduğundan, levhadaki bir boyuna duran dalganın dalga boyu λ ile frekansı f arasındaki ilişki hâlâ $\lambda = u/f$ biçimindedir; burada u , Denklem (2) ile verilir. Ancak Denklem (5a)'nın gösterdiği gibi, birim şekil değiştirme ve gerilme tanımları değişmemesine ve levhanın uç yüzeyleri sıfır gerilmeli serbest yüzeyler olarak kalmasına rağmen, $T = YS$ artık geçerli değildir.

(e) Denklem (5a) ve (5b) hesaba katıldığında, alt elektrottaki yüzey yük yoğunluğu σ , x ve t 'nin fonksiyonu olarak şu biçimdedir:

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

Burada $k = \omega/u$ 'dur. D_1 ve D_2 için ifadeleri bulunuz. (2.2 puan)

(f) Alt elektrottaki toplam yüzey yükü $Q(t)$ ile $V(t)$ arasındaki ilişki şöyledir:

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (6)$$

C_0 için ifadeyi ve α^2 için hem ifadeyi hem de sayısal değeri bulunuz. (1.4 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

• (b)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

• (c)

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

Genel işaret, keyfî bir salınım fazına karşılık gelir; $B_1 = 1$ seçilebilir.

• (d)

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

• (e)

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

• (f)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

Burada α^2 boyutsuzdur.

Çözüm

Soruda belirtilen tek boyutlu, küçük birim şekil değiştirme yaklaşımını kullanıyoruz. x , bir kesitin gerilmesiz durumdaki konumunu belirttiğinden, bu kesitin hızı ve boyuna birim şekil değiştirmesi şöyledir:

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Yalnızca mekanik etkilerin yer aldığı model için $T = YS$, $p = -T$ ve $Y = \rho u^2$ 'dir.

(a)

Δt süresi boyunca, bozuntu $u\Delta t$ mesafesi kadar ilerler. Dolayısıyla küçük şekil değiştirmeye göre birinci mertebede, v hızıyla harekete geçirilen kütle şöyledir:

$$m = \rho A u \Delta t.$$

Çubuğa etki eden dış itme, çubuğun kazandığı momentuma eşittir:

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

Böylece

$$p = \rho u v.$$

Gerilme bir basma gerilmesidir; dolayısıyla $T = -p$ 'dir. Bu durumda Hooke yasası

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

sonucunu verir; dolayısıyla

$$S = -\frac{v}{u}.$$

İşaret, geometrik olarak da elde edilir: başlangıçta gerilmesiz durumdaki $u\Delta t$ uzunluğu, pistonun $v\Delta t$ yer değiştirmesi kadar kısalır.

(b)

Yer değiştirmenin zamana göre türevi, malzemenin hızını verir:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}[\xi_0 \sin k(x - ut)] = -ku\xi_0 \cos k(x - ut).$$

Gerilmesiz durumdaki koordinata göre türev almak, birim şekil değiştirmeyi verir:

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}[\xi_0 \sin k(x - ut)] = k\xi_0 \cos k(x - ut).$$

Son olarak,

$$p(x, t) = -YS(x, t),$$

olduğundan

$$p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut).$$

Özellikle, $p(x, t) = \rho u v(x, t)$ olur; bu, sağa doğru ilerleyen bir dalga için (a) kısmıyla tutarlıdır.

(c)

Orta nokta hareketsizdir; dolayısıyla

$$\xi(b/2, t) = 0 \implies g(b/2) = 0.$$

Denklem (4b)'de $x = b/2$ yerine konulduğunda

$$B_2 = 0.$$

Bunun sonucunda,

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Mekanik modelde serbest uçlarda gerilme ve dolayısıyla birim şekil değiştirme sıfırdır. Bu nedenle,

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

olduğundan, sıfırdan farklı bir salınım modu için

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

İzin verilen bu k değerleri için sinüs fonksiyonu, levha içinde hem $+1$ hem de -1 değerine ulaşır.

Dolayısıyla $\max g(x) = 1$ normalizasyonu

$$|B_1| = 1.$$

Her iki işaret de mümkündür. B_1 'i $-B_1$ ile değiştirmek, salınım fazını π kadar kaydırmaya eşdeğerdır; $B_1 = 1$ seçebiliriz.

(d)

Yukarıda elde edilen serbest uç koşulu şunu verir:

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

veya

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

$\omega = uk$ ve $f = \omega/(2\pi)$ kullanılarak,

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

Dolayısıyla izin verilen modlar tek harmoniklerdir. En düşük iki frekans, $n = 0$ ve $n = 1$ değerlerine karşılık gelir.

Ses hızı şöyledir:

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

$b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ ile,

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

ve

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

Piezoelektrik etki dâhil edildiğinde, Denklem (5a) şunu verir:

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

Levhanın bir elemanı için Newton'un ikinci yasası şöyledir:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

E konuma göre düzgün olduğundan,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Sürücü frekanstaki harmonik yanıt için şöyle yazalım:

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

$\ddot{E} = -\omega^2 E$ olduğundan, konuma bağlı fonksiyon şu denklemi sağlar:

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

Orta noktanın sabit olması $H(b/2) = 0$ koşulunu gerektirir; dolayısıyla

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Bu nedenle birim şekil değiştirme şöyledir:

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

Serbest uç koşulu artık $T = 0$ 'dır; bu da şu anlama gelir:

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

Buradan

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

ve dolayısıyla

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

Gerilme şu hâli alır:

$$T(x, t) = Yd_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

Denklem (5b)'de yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Yd_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Yd_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}. \end{aligned}$$

Verilen biçimle karşılaştırılarak,

$$\boxed{D_1 = \frac{Yd_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Yd_p^2.}$$

Her iki katsayının birimi de elektriksel geçirgenlik birimi olan F/m' 'dir.

Bu ifadeler, tam rezonans dışındaki harmonik özel çözümü betimler. $\cos(kb/2) = 0$ olduğunda, sıfırdan farklı bir gerilim uygulanırken sınır koşulu sonlu bir harmonik genlikle sağlanamaz. Dolayısıyla kutuplar, sönümsüz modelde rezonans sırasında sınırlı bir kararlı durum yanıtının bulunmadığını ifade eder.

(f)

Birinci mertebeye kadar, uzunluğu dx olan bir elektrot şeridinin alanı $w dx$ 'tir. Dolayısıyla alt elektrottaki toplam yük şöyledir:

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

Gerekli konum integrali şöyledir:

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

(e) kısmındaki sonuç kullanılarak,

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Yd_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Yd_p^2) \right].$$

$\varepsilon_T bw/h$ ortak çarpanı dışarı alındığında,

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T bw}{h} \left[1 + \frac{Yd_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

Denklem (6) ile karşılaştırma şu sonucu verir:

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_T bw}{h}}, \quad \boxed{\alpha^2 = \frac{Yd_p^2}{\varepsilon_T}}.$$

Verilen elastik uyumluluk kullanılarak,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T(1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}. \end{aligned}$$

Verilen uzunlukla, sığa ifadesi şu şekilde de yazılabilir:

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

Bir tutarlılık kontrolü olarak, $kb \rightarrow 0$ yarı statik limitinde,

$$\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \rightarrow 1,$$

dolayısıyla elektriksel geçirgenliği ε_T olan gerilmesiz bir levha için beklendiği gibi $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$ olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Nötrino Kütlesi ve Nötron Bozunması (Bölüm A); Işıkla Havada Tutma (Bölüm B)

Bölüm A

Nötrino Kütlesi ve Nötron Bozunması

Laboratuvar referans sisteminde durmakta olan, kütlesi m_n olan serbest bir nötron, birbiriyle etkileşmeyen üç parçacığa bozunur: bir proton, bir elektron ve bir antinötrino. Protonun durgun kütlesi m_p 'dir; antinötrinonun durgun kütlesi m_v 'nin ise sıfırdan farklı ve elektronun durgun kütlesi m_e 'den çok küçük olduğu varsayılmaktadır. Işığın boşluktaki hızını c ile gösterelim. Kütlelerin ölçülen değerleri şöyledir:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

Aşağıda tüm enerjiler ve hızlar laboratuvar referans sistemine göredir. Bozunmadan çıkan elektronun toplam enerjisi E olsun.

(a) E 'nin alabileceği en büyük değer olan $E_{\max}$ 'ı ve $E = E_{\max}$ olduğunda antinötrinin sürati v_m 'yi bulunuz. Her iki yanıt da parçacıkların durgun kütleleri ve ışık hızı cinsinden ifade edilmelidir. $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ olduğu verildiğine göre, $E_{\max}$ 'ı ve v_m/c oranını 3 anlamlı basamakla hesaplayınız.

(4.0 puan)

Bölüm B

Işıkla Havada Tutma

Yarıçapı R ve kütlesi m olan saydam bir cam yarımkürenin kırılma indisi n 'dir. Yarımkürenin dışındaki ortamın kırılma indisi bire eşittir. Tek renkli, paralel bir lazer ışık demeti, Şekil 3'te gösterildiği gibi yarımkürenin düz yüzeyinin merkezî bölümüne düzgün dağılımlı olarak ve dik gelir. Yerçekimi ivmesi $\vec{g}$ düşey olarak aşağı yönlüdür. Lazer demetinin dairesel kesitinin yarıçapı δ , R 'den çok küçüktür. Hem cam yarımküre hem de lazer demeti z eksenine göre aksel simetriye sahiptir.

Cam yarımküre lazer ışığını hiç soğurmaz. Yüzeyi, ışık cam yarımküreye girerken ve yarımküreden çıkarken yansımalar ihmal edilebilecek şekilde, saydam bir malzemeden oluşan ince bir tabakayla kaplanmıştır. Yansıtıcı olmayan bu yüzey tabakasından geçen lazer ışığının katettiği optik yol da ihmal edilebilir.

(b) $(\delta/R)^3$ ve daha yüksek mertebeli terimleri ihmal ederek, cam yarımkürenin ağırlığını dengelemek için gereken lazer gücü P 'yi bulunuz.

(4.0 puan)

İpucu: θ birden çok küçük olduğunda $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ olur.

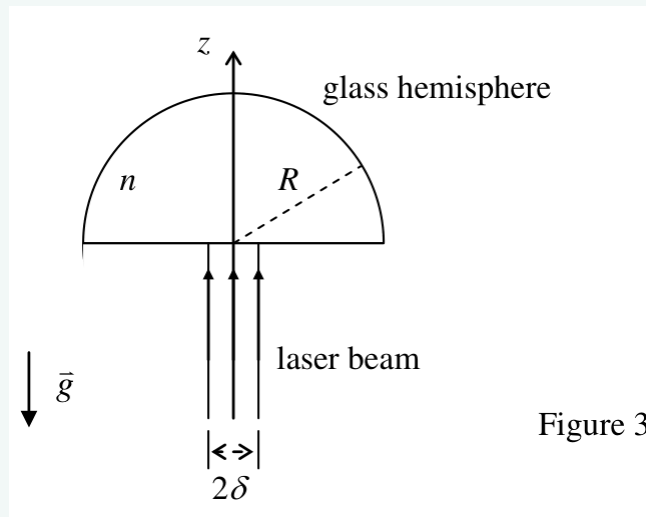


Figure 3

Şekil 3

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) Elektronun en büyük toplam enerjisi

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2}{2m_n} c^2.$$

Bu uç noktada antinötrino ve proton aynı hıza sahiptir; süratleri

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_v + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_v - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_v)^2 - m_e^2}.$$

Üç anlamlı basamakla,

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

- (b) İstenen mertebeye kadar,

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

Çözüm

(a) Nötrino Kütlesi ve Nötron Bozunması

Elektronun momentumunun büyüklüğü p_e olsun. Enerji ve momentumun korunumu şu bağıntıları verir:

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

Proton–antinötrino çiftinin değişmez kütlesini $\mathcal{M}$ ile gösterelim. Elektronun enerji–momentum bağıntısını,

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

kullanarak

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

Buna göre elektronun enerjisi, $\mathcal{M}$ en küçük olduğunda en büyüktür.

Çiftin toplam momentumunun sıfır olduğu referans sisteminde proton ve antinötrino, büyüklükleri q olan eşit ve zıt yönlü momentumlara sahiptir. Böylece

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

Eşitlik $q = 0$ olduğunda sağlanır: her iki parçacık da bu referans sisteminde durmaktadır; dolayısıyla laboratuvar referans sisteminde **aynı hıza** sahiptirler. $m_n > m_p + m_v + m_e$ olduğundan bu durum kinematik olarak mümkündür.

$M = m_p + m_v$ yazarsak, uç nokta enerjisi dolayısıyla

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

Uç noktada çiftin enerjisi $m_n c^2 - E_{\max}$, momentumunun büyüklüğü ise p_e 'dir. Antinötrinin süratine eşit olan ortak süratleri, $v = c^2 p / E_{\text{toplam}}$ bağıntısından bulunur:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

Yerine koyma işlemiyle

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

elde edilir.

Sayısal hesaplama için $m_v \rightarrow 0^+$ limiti şu değerleri verir:

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

$m_v c^2$ 'nin sıfırdan üst sınırı olan 7.3 eV'a artırılması, bu değerleri sırasıyla 7.30 eV'dan ve 8.5×10^{-9} 'dan daha az azaltır. Bu nedenle izin verilen tüm kütle aralığında, üç anlamlı basamakla,

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

Burada $E_{\max}$, elektronun **toplam** enerjisidir. Antinötrino, çok küçük kütesine rağmen bu uç noktada yavaştır: protonla aynı hıza sahip olması için gerektiği üzere, momentumu da çok küçüktür.

(b) Işıkla Havada Tutma

Yarımküreye z ekseninden r uzaklıkta giren bir ışın ele alalım; burada $0 \leq r \leq \delta$ 'dir. Işın düz yüzeye dik olarak girer ve bu nedenle camın içinde düşey doğrultuda ilerlemeye devam eder.

Küresel yüzeyde, gelen ışın ile dışa dönük normal arasındaki açı θ olsun. Geometriden

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

elde edilir. Çıkan ışının bu normale göre açısı θ' ise, Snell yasası

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

bağıntısını verir. $n > 1$ olan cam için çıkan ışın eksene doğru kırılır. Yukarı yönlü düşey doğrultuyla yaptığı açının büyüklüğü

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

olur. $r/R \leq \delta/R \ll 1$ olduğundan, sabit n için yapılan açılım

$$\alpha = (n - 1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

sonucunu verir.

Işığın momentumu, hem yarımküreye girmeden önce hem de yarımküreden çıktıktan sonra enerjisinin c 'ye bölümüne eşittir. Soğurma ve yansıma ihmal edilebilir olduğundan, dP gücü taşıyan bir ışın demetinin gelen düşey momentum akısı dP/c , çıkan düşey momentum akısı ise $(dP/c) \cos \alpha$ 'dır.

Momentumun korunumuna göre, bu demetin yarımküreye uyguladığı yukarı yönlü kuvvet

$$dF_z = \frac{dP}{c}(1 - \cos \alpha).$$

olur. Verilen küçük açı yaklaşımını kullanarak,

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n-1)^2 r^2}{2R^2}.$$

elde ederiz. Enine kuvvet bileşenleri eksenel simetri nedeniyle birbirini götürür.

Gelen ışığın şiddeti düzgün dağılımlıdır:

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

Bu nedenle yarıçapı r , genişliği dr olan bir halka şu gücü taşır:

$$dP = I 2\pi r dr.$$

Düşey kuvvetin demet boyunca integralini alarak,

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n-1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n-1)^2}{cR^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2}. \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $(\delta/R)^2$ mertebesindeki katkı korunmuştur; $F_z/(P/c)$ için bir sonraki düzeltme $(\delta/R)^4$ mertebesinde.

Bu yukarı yönlü kuvveti ağırlıkla dengeleyerek,

$$mg = \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2},$$

şu sonucu elde ederiz:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.