

IPhO 2003

Теоретические задачи и решения · Тайбэй, Тайвань · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2003/

Задача 1: Маятник с падающим грузом

Жёсткий цилиндрический стержень радиуса R закреплён горизонтально над землёй. На нити пренебрежимо малой массы и длины L ($L > 2\pi R$) к точке A на верхней поверхности стержня подвешен шарик маятника массой m , как показано на рисунке 1а. Шарик поднимают до уровня точки A , натягивая нить, а затем отпускают без начальной скорости. Растяжением нити пренебречь. Считайте, что шарик маятника можно рассматривать как материальную точку и что он движется только в плоскости, перпендикулярной оси стержня. Поэтому далее шарик маятника также называется *частицей*. Ускорение свободного падения равно $\vec{g}$.

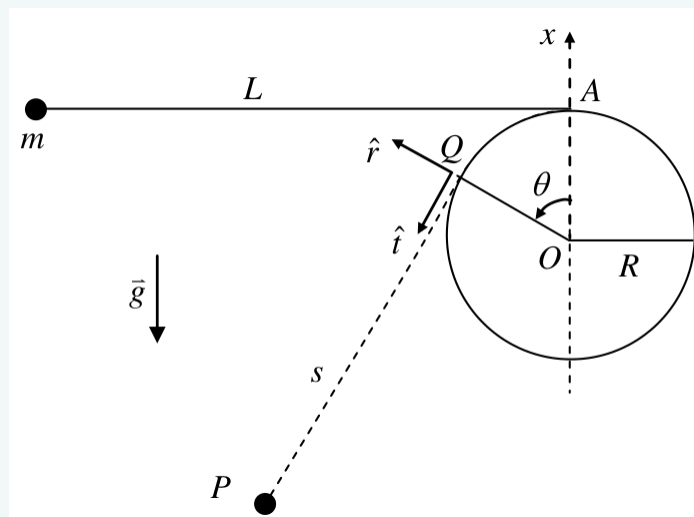


Рисунок 1а

Пусть O — начало системы координат. Когда частица находится в точке P , нить касается цилиндрической поверхности в точке Q . Длина отрезка QP обозначается через s . Единичный касательный вектор и единичный радиальный вектор в точке Q обозначаются соответственно через $\hat{t}$ и $\hat{r}$. Угол поворота θ радиуса OQ , отсчитываемый против часовой стрелки от вертикальной оси x , направленной вдоль OA , считается положительным.

При $\theta = 0$ длина s равна L , а гравитационная потенциальная энергия U частицы равна нулю. При движении частицы мгновенные скорости изменения θ и s со временем обозначаются соответственно через $\dot{\theta}$ и $\dot{s}$.

Если не оговорено иное, все скорости и их модули определяются относительно неподвижной точки O .

вертикальной плоскости и может беспрепятственно проходить мимо падающего груза.

Трением скольжения между нитью и поверхностью стержня можно пренебречь. Однако предполагается, что трение покоя достаточно велико, чтобы груз оставался неподвижным после остановки (т. е. после обращения его скорости в нуль).

(j) Предположим, что груз действительно останавливается, опустившись на расстояние D , и что $(L - D) \gg R$. Чтобы после этого частица могла обогнуть стержень до $\theta = 2\pi$, причём оба участка нити, не соприкасающиеся со стержнем, оставались прямолинейными, отношение $\alpha = D/L$ должно быть не меньше некоторого критического значения α_c . Пренебрегая членами порядка R/L и выше, получите оценку α_c через M/m . (3.4 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a) $\dot{s} = -R\dot{\theta}$.
- (b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$.
- (c) $\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (d) $\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (e) $a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2$.
- (f) $U = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta]$.
- (g) $v_m = \sqrt{2g\left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)R\right]}$.
- (h) $v_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sqrt{gR} \approx 1.133\sqrt{gR}$, при $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$.
- (i) $v_H = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{gR} \approx 0.4334\sqrt{gR}$.
- (j) $\alpha \geq \alpha_c$, $\alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}$.

Множители $\sqrt{gR}$ в выражениях для скорости имеют единицы m s^{-1} , если g и R выражены в единицах СИ.

Решение

Направим $\hat{x}$ вертикально вверх и введём $\hat{y}$, направленный горизонтально влево. Тогда единичные векторы, показанные на рисунке 1a, имеют вид

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r},$$

а радиус-вектор частицы равен

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

(a) Длина участка нити, намотанного на стержень, равна $R\theta$. Из постоянства длины нити следует

$$s + R\theta = L.$$

Дифференцируя, получаем

$$\dot{s} = -R\dot{\theta}.$$

(b) Поскольку $\vec{OQ} = R\hat{r}$,

$$\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta}\hat{t}.$$

Здесь Q обозначает перемещающуюся геометрическую точку касания; она не обязана совпадать с одной и той же точкой неподвижного стержня.

(c) Радиус-вектор частицы относительно Q равен $s\hat{t}$. Дифференцируя этот вектор в неподвижных осях, получаем

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s}\hat{t} + s\frac{d\hat{t}}{dt}.$$

Таким образом,

$$\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

(d) Прибавляя скорость точки Q , получаем

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

Согласно пункту (a), компонента вдоль $\hat{t}$ обращается в нуль:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}.$$

В частности, на начальном участке движения, когда $\dot{\theta} > 0$,

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) Продифференцируем скорость:

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}.$$

Следовательно,

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

Знак минус указывает, что ускорение направлено к Q вдоль прямолинейного участка нити.

(f) Из выражения для радиус-вектора следует, что вертикальная координата частицы равна

$$x = R\cos\theta - s\sin\theta.$$

В начальный момент $x = R$, и на этом уровне потенциальная энергия по определению равна нулю. Поэтому

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta].$$

(g) Сила натяжения направлена вдоль $-\hat{t}$, а скорость — вдоль $\hat{r}$, поэтому сила натяжения не совершает работы. Закон сохранения механической энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

или

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

Чтобы найти нижнюю точку, продифференцируем высоту, используя $ds/d\theta = -R$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta - s \cos \theta = -s \cos \theta.$$

Высота убывает до $\theta = \pi/2$ и начинает возрастать сразу после этого. Следовательно, нижняя точка достигается при

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

Снижение по вертикали от точки отпуска составляет $R + s_m$, откуда

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}.$$

(h) Обозначим силу натяжения через T . Компонента силы тяжести вдоль $\hat{t}$ равна $mg \sin \theta$, поэтому из второго закона Ньютона и результата пункта (e) следует

$$mg \sin \theta - T = -m \frac{v^2}{s}.$$

Следовательно,

$$T = m \left(\frac{v^2}{s} + g \sin \theta \right).$$

Подставляя выражение, полученное из закона сохранения энергии, находим

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos \theta)}{s} + 3 \sin \theta.$$

По мере наматывания нити на стержень длина $s = L - R\theta$ уменьшается. Натяжение нити не может быть отрицательным, поэтому движение с натянутой нитью заканчивается, когда T впервые вновь обращается в нуль. В этот момент нить ещё прямолинейна и имеет наименьшую длину на начальном участке движения.

Натяжение положительно при $0 < \theta \leq \pi$. Запишем угол, при котором оно впервые после этого обращается в нуль, в виде

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

Условие $T = 0$ принимает вид

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

откуда

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

Поскольку $L = s_s + R\theta_s$,

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

Сравнение с заданным точным значением L/R даёт искомый первый корень

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

и

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

При нулевом натяжении

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

Используя $\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$, получаем

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

Таким образом,

$$\boxed{v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}}.$$

(i) В момент, найденный в пункте (h),

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

Поскольку $\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$, вертикальная, направленная вверх, и горизонтальная компоненты скорости равны

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

Нить провисает, и частица движется по баллистической траектории. Её горизонтальная скорость остаётся постоянной, а направленная вверх вертикальная скорость обращается в нуль через время

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, в наивысшей точке модуль её скорости равен модулю горизонтальной скорости:

$$\boxed{v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}}.$$

То, что нить остаётся провисшей на протяжении этого подъёма, можно также проверить геометрически. Введём обозначения

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Координаты частицы при баллистическом движении $X = x/R$, $Y = y/R$ равны

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

Для точки на этой траектории положим

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \text{atan2}(Y, X).$$

Длина нити, необходимая для участка, огибающего стержень по дуге, и следующего за ним прямолинейного касательного участка, равна

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

Подстановка и дифференцирование показывают, что эта длина уменьшается на протяжении всего подъёма: начиная со значения $L/R = 6.88585$, она достигает 6.75065 в точке H . Следовательно, нить остаётся провисшей вплоть до наивысшей точки, как и требуется для расчёта баллистического движения.

(j) Пренебрегая указанными поправками, связанными с радиусом стержня, получаем, что после остановки груза расстояние от шарика до эффективной точки подвеса равно

$$\ell = L - D.$$

Длины участков нити, огибающих стержень, и связанные со стержнем смещения по вертикали имеют порядок R ; пренебрежение ими оправдано условием $(L - D) \gg R$.

При падении груз теряет гравитационную потенциальную энергию MgD . Трением скольжения можно пренебречь, а в момент остановки кинетическая энергия груза равна нулю. После этого неподвижный контакт нити со стержнем не совершает работы. Поэтому сохраняющаяся механическая энергия шарика, отсчитываемая относительно его начального горизонтального уровня, равна MgD .

Его высота при угле θ приближённо равна $-\ell \sin \theta$, так что

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

Обозначая $\mu = M/m$, получаем

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

При последующем движении по окружности натяжение равно

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

Наиболее жёсткое ограничение возникает в верхней точке окружности, при $\theta = 3\pi/2$, где $\sin \theta = -1$. Чтобы нить оставалась прямолинейной, необходимо

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

или

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

Эквивалентно, в верхней точке шарик должен сохранять скорость не меньше $\sqrt{g\ell}$; следовательно, его энергия там должна быть не меньше

$$mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell = \frac{3}{2}mg\ell.$$

Используя $\ell = L - D$ и $\alpha = D/L$, получаем

$$\begin{aligned} 2\mu D &\geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha &\geq 3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.$$

Равенство соответствует предельному случаю нулевого натяжения в верхней точке.

Предполагаемое трение покоя удерживает более тяжёлый груз неподвижным при последующем движении шарика.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Пьезоэлектрический кристаллический резонатор под действием переменного напряжения

Рассмотрим однородный стержень длиной ℓ в ненапряжённом состоянии и площадью поперечного сечения A (рисунок 2а). Его длина изменяется на $\Delta\ell$, когда к его торцам перпендикулярно им прикладывают равные по модулю и противоположно направленные силы величиной F . Механическое напряжение T на торцах определяется как F/A . Относительное изменение длины стержня, то есть $\Delta\ell/\ell$, называется относительной деформацией S стержня. Через механическое напряжение и относительную деформацию закон Гука можно записать в виде

$$T = YS \quad \text{или} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

где Y называется модулем Юнга материала стержня. Обратите внимание, что сжимающему механическому напряжению T соответствуют $F < 0$ и уменьшение длины (то есть $\Delta\ell < 0$). Поэтому такое напряжение отрицательно и связано с давлением p соотношением $T = -p$.

Для однородного стержня плотностью ρ скорость распространения продольных волн (то есть скорость звука) вдоль стержня определяется выражением

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

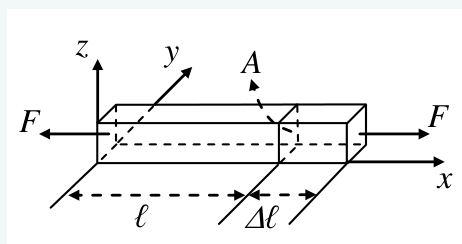


Рисунок 2а

При ответе на следующие вопросы влиянием затухания и диссипации можно пренебречь.

Часть А: механические свойства

Однородный полубесконечный стержень, простирающийся от $x = 0$ до ∞ (см. рисунок 2b), имеет плотность ρ . Первоначально он неподвижен и не напряжён. Затем поршень в течение очень короткого времени Δt оказывает постоянное небольшое давление p на его левый торец при $x = 0$, вызывая волну давления, распространяющуюся вправо со скоростью u .

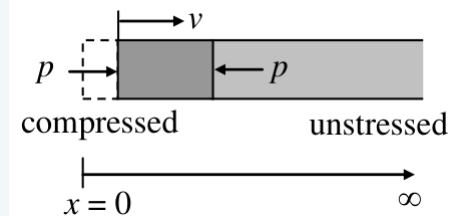


Рисунок 2b

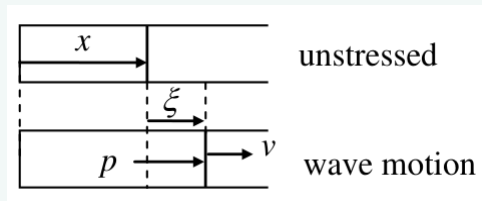


Рисунок 2с

(а) Если под действием поршня левый торец стержня движется с постоянной скоростью v (рисунок 2b), каковы относительная деформация S и давление p у левого торца в течение времени Δt ? Ответы должны быть выражены только через ρ , u и v . (1.6 балла)

(б) Рассмотрим продольную волну, распространяющуюся в стержне вдоль направления x . Пусть $\xi(x, t)$ — смещение в момент времени t поперечного сечения, которое в ненапряжённом состоянии стержня находится в точке x (рисунок 2с), и предположим, что

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

где ξ_0 и k — постоянные. Определите соответствующие скорость $v(x, t)$, относительную деформацию $S(x, t)$ и давление $p(x, t)$ как функции x и t . (2.4 балла)

Часть В: электромеханические свойства (с учётом пьезоэлектрического эффекта)

Рассмотрим пластину из кристалла кварца длиной b , толщиной h и шириной w (рисунок 2d). Её длина и толщина направлены вдоль осей x и z соответственно. Electroдами служат тонкие металлические покрытия на верхней и нижней поверхностях пластины. Электрические выводы, которые также служат опорами для крепления (рисунок 2е), припаяны к центрам электродов; эти центры можно считать неподвижными при продольных колебаниях вдоль направления x .

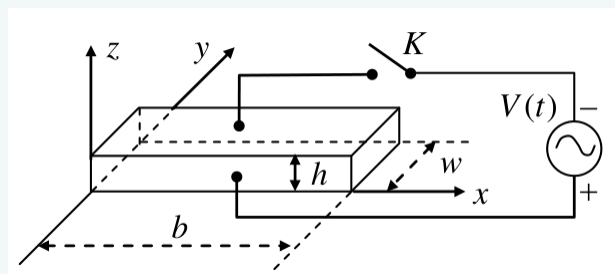


Рисунок 2d

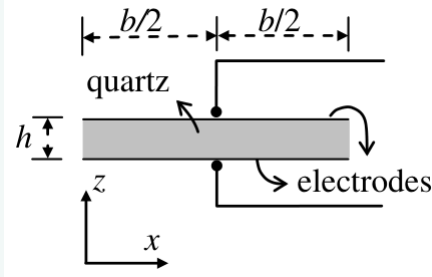


Рисунок 2е

Рассматриваемый кристалл кварца имеет плотность ρ , равную $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, и модуль Юнга Y , равный $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Длина b пластины равна 1.00 cm , а её ширина w и высота h таковы, что $h \ll w$ и $w \ll b$. При разомкнутом ключе K будем считать, что в кварцевой пластине возбуждаются только продольные моды стоячих волн в направлении x .

Для стоячей волны частотой $f = \omega/2\pi$ смещение $\xi(x, t)$ в момент времени t поперечного сечения пластины, положение равновесия которого имеет координату x , можно записать в виде

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

где ξ_0 — положительная постоянная, а пространственная функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

Максимальное значение $g(x)$ равно единице, а $k = \omega/u$. Помните, что центры электродов неподвижны, а левый и правый торцы пластины свободны, поэтому механическое напряжение (или давление) на них должно быть равно нулю.

(с) Определите значения B_1 и B_2 в уравнении (4b) для продольной стоячей волны в кварцевой пластине. (1.2 балла)

(д) Каковы две наименьшие частоты, на которых в кварцевой пластине могут возбуждаться продольные стоячие волны? (1.2 балла)

Пьезоэлектрический эффект — особое свойство кристалла кварца. Сжатие или растяжение кристалла создаёт электрическое напряжение между его гранями, и, наоборот, внешнее электрическое напряжение, приложенное к кристаллу, вызывает его расширение или сжатие в зависимости от полярности напряжения. Поэтому с помощью кристалла кварца можно связать механические и электрические колебания и добиться резонанса.

Для учёта пьезоэлектрического эффекта обозначим поверхностные плотности заряда на верхнем и нижнем электродах через $-\sigma$ и $+\sigma$ соответственно, когда кварцевая пластина находится в электрическом поле E , направленном вдоль оси z . Обозначим относительную деформацию и механическое напряжение в пластине в направлении x через S и T соответственно. Тогда пьезоэлектрический эффект в кристалле кварца можно описать следующей системой уравнений:

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

где $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ — упругая податливость (то есть величина, обратная модулю Юнга) при постоянном электрическом поле, $\epsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ Ф/м}$ — диэлектрическая проницаемость при постоянном механическом напряжении, а $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ м/В}$ — пьезоэлектрический коэффициент.

Пусть ключ K на рисунке 2d замкнут. Теперь к электродам приложено переменное напряжение $V(t) = V_m \cos \omega t$, и в кварцевой пластине возникает однородное электрическое поле $E(t) = V(t)/h$, направленное вдоль оси z . После установления стационарного режима в пластине возникает продольная стоячая волна с угловой частотой ω в направлении x .

При однородном поле E длина волны λ и частота f продольной стоячей волны в пластине по-прежнему связаны соотношением $\lambda = u/f$, где u задаётся уравнением (2). Однако, как следует из уравнения (5a), соотношение $T = YS$ уже не выполняется, хотя определения относительной деформации и механического напряжения остаются прежними, а торцы пластины остаются свободными с нулевым механическим напряжением.

(e) С учётом уравнений (5a) и (5b) поверхностная плотность заряда σ на нижнем электроде как функция x и t имеет вид

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

где $k = \omega/u$. Найдите выражения для D_1 и D_2 . (2.2 балла)

(f) Полный поверхностный заряд $Q(t)$ на нижнем электроде связан с $V(t)$ соотношением

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (6)$$

Найдите выражение для C_0 , а также выражение и численное значение α^2 . (1.4 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

- (b)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

- (c)

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

Общий знак соответствует произвольному выбору фазы колебаний; можно выбрать $B_1 = 1$.

• (d)

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

• (e)

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

• (f)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

Здесь α^2 — безразмерная величина.

Решение

Используем указанное в условии одномерное приближение малых деформаций. Поскольку x обозначает положение поперечного сечения в ненапряжённом состоянии, его скорость и продольная относительная деформация равны

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

В чисто механической модели $T = YS$, $p = -T$ и $Y = \rho u^2$.

(a)

За время Δt возмущение проходит расстояние $u\Delta t$. Поэтому в первом порядке по малой деформации масса, приведённая в движение со скоростью v , равна

$$m = \rho A u \Delta t.$$

Импульс внешней силы, действующей на стержень, равен приобретённому им импульсу:

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

Таким образом,

$$p = \rho u v.$$

Механическое напряжение является сжимающим, поэтому $T = -p$. Тогда закон Гука даёт

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

и, следовательно,

$$S = -\frac{v}{u}.$$

Знак можно установить и из геометрических соображений: первоначально ненапряжённый участок длиной $u\Delta t$ укорачивается на величину перемещения поршня $v\Delta t$.

(b)

Дифференцируя смещение по времени, получаем скорость частиц материала:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{-ku\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Дифференцируя по координате в ненапряжённом состоянии, получаем относительную деформацию:

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{k\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Наконец,

$$p(x, t) = -YS(x, t),$$

поэтому

$$\boxed{p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

В частности, $p(x, t) = \rho u v(x, t)$, что согласуется с пунктом (а) для волны, распространяющейся вправо.

(с)

Середина пластины неподвижна, поэтому

$$\xi(b/2, t) = 0 \implies g(b/2) = 0.$$

Подстановка $x = b/2$ в уравнение (4b) даёт

$$\boxed{B_2 = 0}.$$

Следовательно,

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

В механической модели на свободных торцах механическое напряжение, а значит, и относительная деформация равны нулю. Поэтому

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

Поскольку

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

для существования нетривиальной колебательной моды необходимо

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

При этих допустимых значениях k функция синуса достигает внутри пластины как $+1$, так и -1 . Поэтому из условия нормировки $\max g(x) = 1$ следует

$$\boxed{|B_1| = 1}.$$

Возможен любой из двух знаков. Замена B_1 на $-B_1$ эквивалентна сдвигу фазы колебаний на π ; можно выбрать $B_1 = 1$.

(d)

Полученное выше условие на свободных торцах даёт

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

Используя $\omega = uk$ и $f = \omega/(2\pi)$, получаем

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

Таким образом, допустимыми модами являются нечётные гармоники. Двум наименьшим частотам соответствуют $n = 0$ и $n = 1$.

Скорость звука равна

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

При $b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

а

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

С учётом пьезоэлектрического эффекта из уравнения (5a) следует

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

Второй закон Ньютона для элемента пластины имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Поскольку поле E однородно в пространстве,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Для гармонического отклика на частоте внешнего воздействия запишем

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

Поскольку $\ddot{E} = -\omega^2 E$, пространственная функция удовлетворяет уравнению

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

Неподвижность середины пластины требует $H(b/2) = 0$, поэтому

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Следовательно, относительная деформация равна

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

Условие на свободных торцах теперь имеет вид $T = 0$, что означает

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

Отсюда следует

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

и, таким образом,

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

Механическое напряжение принимает вид

$$T(x, t) = Y d_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

Подстановка в уравнение (5b) даёт

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Y d_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}. \end{aligned}$$

Сравнивая с заданным видом выражения, получаем

$$\boxed{D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.}$$

Оба коэффициента имеют единицы измерения диэлектрической проницаемости, F/m.

Эти выражения описывают гармоническое частное решение вне точного резонанса. При $\cos(kb/2) = 0$ граничное условие невозможно выполнить при конечной амплитуде гармонических колебаний и ненулевом приложенном напряжении. Таким образом, полюсы выражают отсутствие ограниченного установившегося отклика при резонансе в модели без затухания.

(f)

В линейном приближении полоска электрода длиной dx имеет площадь $w dx$. Поэтому полный заряд на нижнем электроде равен

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

Необходимый пространственный интеграл равен

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

Используя результат пункта (e), получаем

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Y d_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Y d_p^2) \right].$$

Вынося множитель $\varepsilon_T bw/h$, получаем

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T bw}{h} \left[1 + \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

Сравнение с уравнением (6) даёт

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T bw}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T}.$$

Используя указанную упругую податливость, получаем

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}. \end{aligned}$$

При заданной длине выражение для ёмкости также можно записать в виде

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

Для проверки согласованности рассмотрим квазистатический предел $kb \rightarrow 0$:

$$\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \rightarrow 1,$$

поэтому $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$, как и следует ожидать для пластины без механического напряжения с диэлектрической проницаемостью ε_T .

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Масса нейтрино и распад нейтрона (Часть А); Световая левитация (Часть В)

Часть А

Масса нейтрино и распад нейтрона

Свободный нейтрон массой m_n , покоящийся в лабораторной системе отсчёта, распадается на три невзаимодействующие частицы: протон, электрон и антинейтрино. Масса покоя протона равна m_p , а масса покоя антинейтрино m_ν предполагается ненулевой и много меньшей массы покоя электрона m_e . Обозначим скорость света в вакууме через c .

Измеренные значения масс таковы:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

Далее все энергии и скорости относятся к лабораторной системе отсчёта. Пусть E — полная энергия электрона, образовавшегося при распаде.

(a) Найдите максимально возможное значение $E_{\max}$ энергии E и скорость v_m антинейтрино при $E = E_{\max}$. Оба ответа должны быть выражены через массы покоя частиц и скорость света. Учтя, что $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$, вычислите $E_{\max}$ и отношение v_m/c с точностью до 3 значащих цифр.

(4.0 балла)

Часть B

Световая левитация

Прозрачная стеклянная полусфера радиусом R и массой m имеет показатель преломления n . В среде вне полусферы показатель преломления равен единице. Параллельный пучок монохроматического лазерного излучения равномерно освещает центральную часть её плоской поверхности, падая на неё перпендикулярно, как показано на рисунке 3. Ускорение свободного падения $\vec{g}$ направлено вертикально вниз. Радиус δ круглого поперечного сечения лазерного пучка много меньше R . Стеклянная полусфера и лазерный пучок обладают осевой симметрией относительно оси z .

Стеклянная полусфера не поглощает лазерное излучение. Её поверхность покрыта тонким слоем прозрачного материала, так что отражением света при входе в стеклянную полусферу и выходе из неё можно пренебречь. Оптической длиной пути лазерного излучения при прохождении через этот неотражающий поверхностный слой также можно пренебречь.

(b) Пренебрегая членами порядка $(\delta/R)^3$ и выше, найдите мощность лазера P , необходимую для уравнивания силы тяжести, действующей на стеклянную полусферу.

(4.0 балла)

Указание: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, когда θ много меньше единицы.

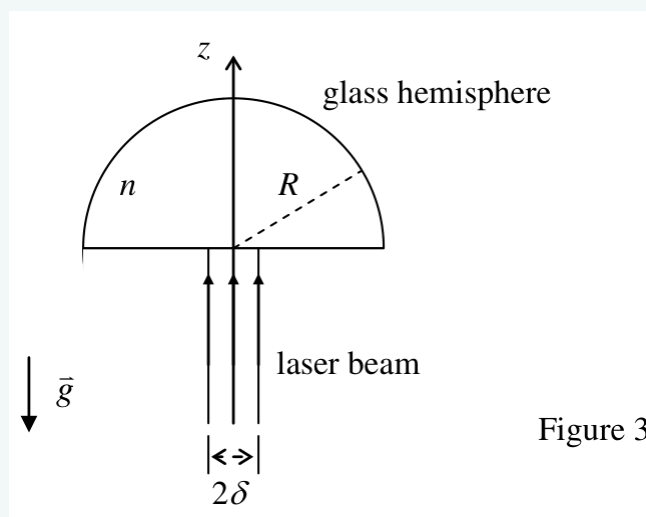


Рисунок 3

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **(a)** Максимальная полная энергия электрона равна

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2}{2m_n} c^2.$$

При этом предельном значении энергии антинейтрино и протон имеют одинаковую скорость, модуль которой равен

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_v + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_v - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_v)^2 - m_e^2}.$$

С точностью до трёх значащих цифр,

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

- **(b)** С учётом членов требуемого порядка,

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

Решение

(a) Масса нейтрино и распад нейтрона

Пусть модуль импульса электрона равен p_e . Законы сохранения энергии и импульса дают

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

Обозначим инвариантную массу пары протон–антинейтрино через $\mathcal{M}$. Используя связь между энергией и импульсом электрона,

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

Таким образом, энергия электрона максимальна, когда $\mathcal{M}$ минимальна.

В системе центра импульса пары протон и антинейтрино имеют равные по модулю и противоположно направленные импульсы с модулем q . Поэтому

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

Равенство достигается при $q = 0$: обе частицы покоятся в этой системе отсчёта, поэтому в лабораторной системе они имеют **одинаковую скорость**. Такая конфигурация кинематически допустима, поскольку $m_n > m_p + m_v + m_e$.

Обозначая $M = m_p + m_v$, получаем предельную энергию

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

При предельной энергии электрона энергия пары равна $m_n c^2 - E_{\max}$, а модуль её импульса равен p_e . Общий модуль скорости частиц пары, равный скорости антинейтрино, находится из соотношения $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E_{\text{полная}}$:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

Подстановка даёт

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

Для численного расчёта переход к пределу $m_v \rightarrow 0^+$ даёт

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

При увеличении $m_v c^2$ от нуля до верхней границы 7.3 эВ эти значения уменьшаются менее чем на 7.30 эВ и 8.5×10^{-9} соответственно. Поэтому во всём допустимом диапазоне масс с точностью до трёх значащих цифр получаем

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

Здесь $E_{\max}$ — **полная** энергия электрона. При этом предельном значении энергии антинейтрино движется медленно, несмотря на свою чрезвычайно малую массу: его импульс также чрезвычайно мал, что необходимо, чтобы его скорость совпадала со скоростью протона.

(b) Световая левитация

Рассмотрим луч, входящий в полусферу на расстоянии r от оси z , где $0 \leq r \leq \delta$. Он падает на плоскую поверхность перпендикулярно и потому продолжает распространяться вертикально внутри стекла.

Пусть θ — угол между падающим лучом и внешней нормалью к сферической поверхности. Из геометрии следует

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

Если θ' — угол выходящего луча относительно этой нормали, то закон Снеллиуса даёт

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

Для стекла с $n > 1$ выходящий луч отклоняется к оси. Угол между ним и направленной вверх вертикалью равен

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

Поскольку $r/R \leq \delta/R \ll 1$, разложение при фиксированном n даёт

$$\alpha = (n - 1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Как до входа в полусферу, так и после выхода из неё импульс света равен его энергии, делённой на c . Поглощением и отражением можно пренебречь, поэтому для пучка лучей мощностью dP входящий поток вертикальной составляющей импульса равен dP/c , а выходящий — $(dP/c) \cos \alpha$.

По закону сохранения импульса направленная вверх сила, с которой этот пучок действует на полусферу, равна

$$dF_z = \frac{dP}{c}(1 - \cos \alpha).$$

Используя данное приближение для малых углов, получаем

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2}.$$

Поперечные составляющие силы взаимно компенсируются в силу осевой симметрии.

Интенсивность падающего излучения однородна:

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

Поэтому через кольцо радиусом r и шириной dr проходит излучение мощностью

$$dP = I 2\pi r dr.$$

Интегрируя вертикальную силу по сечению пучка, получаем

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n - 1)^2}{cR^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P(n - 1)^2 \delta^2}{4cR^2}. \end{aligned}$$

Здесь сохранён вклад порядка $(\delta/R)^2$; следующая поправка к $F_z/(P/c)$ имеет порядок $(\delta/R)^4$.

Приравнявая эту направленную вверх силу к силе тяжести,

$$mg = \frac{P(n - 1)^2 \delta^2}{4cR^2},$$

получаем

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n - 1)^2 \delta^2}.$$

Решение проверено по официальному решению.