

IPhO 2003

Problemas teóricos y soluciones · Taipéi, Taiwán · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2003/

Problema 1: Un péndulo con una pesa en caída

Una barra cilíndrica rígida de radio R se mantiene horizontal por encima del suelo. Mediante una cuerda de masa despreciable y longitud L ($L > 2\pi R$), se suspende una masa pendular m del punto A , situado en la parte superior de la barra, como se muestra en la Figura 1a. Se eleva la masa pendular hasta que queda a la misma altura que A y, con la cuerda tensa, se la suelta desde el reposo. Desprecie cualquier estiramiento de la cuerda. Suponga que la masa pendular puede tratarse como una masa puntual y que oscila únicamente en un plano perpendicular al eje de la barra. Por ello, también se denomina *partícula* a la masa pendular. La aceleración de la gravedad es $\vec{g}$.

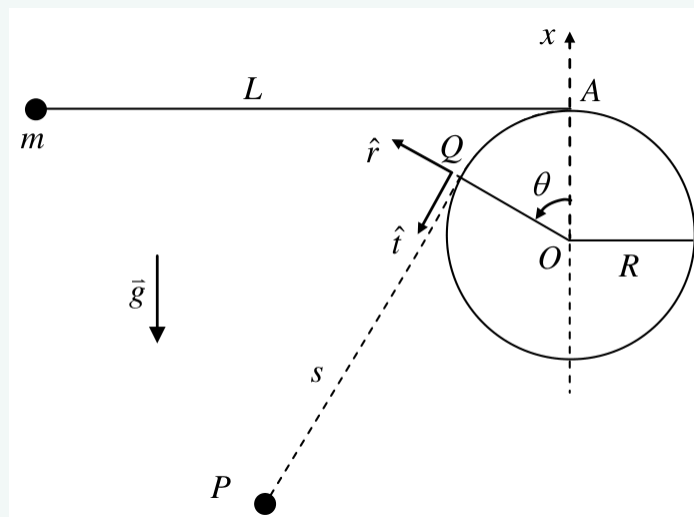


Figura 1a

Sea O el origen del sistema de coordenadas. Cuando la partícula se encuentra en el punto P , la cuerda es tangente a la superficie cilíndrica en Q . La longitud del segmento QP se denomina s . El vector unitario tangente y el vector unitario radial en Q se denotan por $\hat{t}$ y $\hat{r}$, respectivamente. El desplazamiento angular θ del radio OQ , medido en sentido antihorario desde el eje vertical x , orientado según OA , se toma como positivo.

Cuando $\theta = 0$, la longitud s es igual a L y la energía potencial gravitatoria U de la partícula es cero. A medida que la partícula se mueve, las tasas instantáneas de variación temporal de θ y s se denotan por $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$, respectivamente.

Salvo que se indique lo contrario, todas las rapidezces y velocidades se refieren al punto fijo O .

Parte A

En la Parte A, la cuerda permanece tensa mientras la partícula se mueve. En función de las magnitudes introducidas anteriormente (es decir, $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, R, L, g, \hat{t}$ y $\hat{r}$), determine:

- (a) La relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$. (0.5 puntos)
- (b) La velocidad $\vec{v}_Q$ del punto móvil Q respecto a O . (0.5 puntos)
- (c) La velocidad $\vec{v}'$ de la partícula respecto al punto móvil Q cuando se encuentra en P . (0.7 puntos)
- (d) La velocidad $\vec{v}$ de la partícula respecto a O cuando se encuentra en P . (0.7 puntos)
- (e) La componente según $\hat{t}$ de la aceleración de la partícula respecto a O cuando se encuentra en P . (0.7 puntos)
- (f) La energía potencial gravitatoria U de la partícula cuando se encuentra en P . (0.5 puntos)
- (g) La rapidez v_m de la partícula en el punto más bajo de su trayectoria. (0.7 puntos)

Parte B

En la Parte B, el cociente entre L y R tiene el siguiente valor:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

- (h) ¿Cuál es la rapidez v_s de la partícula cuando el tramo de cuerda que va de Q a P es recto y tiene su longitud mínima? (en función de g y R) (2.4 puntos)
- (i) ¿Cuál es la rapidez v_H de la partícula en su punto más alto H , cuando ha pasado al otro lado de la barra? (en función de g y R) (1.9 puntos)

Parte C

En la Parte C, en lugar de estar suspendida de A , la masa pendular m está unida mediante una cuerda que pasa por encima de la barra a una pesa de mayor masa M , como se muestra en la Figura 1b. La pesa también puede tratarse como una partícula.

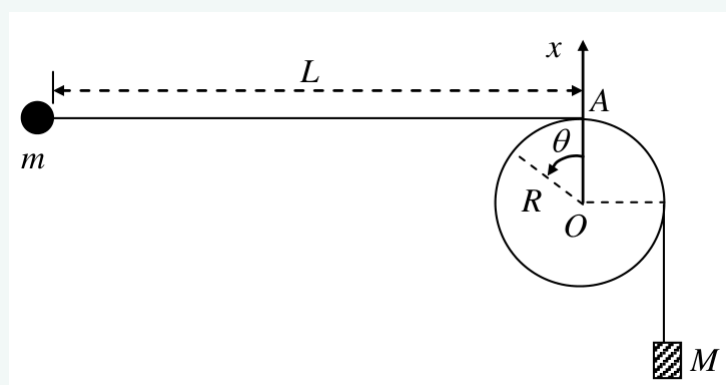


Figura 1b

Inicialmente, la masa pendular se mantiene en reposo a la misma altura que A , de modo que, con la pesa colgando por debajo de O , la cuerda está tensa y tiene un tramo horizontal de longitud L . A continuación, se suelta la masa pendular desde el reposo y la pesa comienza a caer. Suponga que la masa pendular permanece en un plano vertical y puede pasar junto a la pesa en caída sin que se interrumpa su movimiento.

El rozamiento cinético entre la cuerda y la superficie de la barra es despreciable. Sin embargo, se supone que el rozamiento estático es lo suficientemente grande como para que la pesa permanezca en reposo una vez que se haya detenido (es decir, cuando su velocidad sea cero).

(j) Suponga que la pesa efectivamente se detiene tras caer una distancia D y que $(L - D) \gg R$. Si la partícula puede entonces girar alrededor de la barra hasta $\theta = 2\pi$ mientras ambos tramos de cuerda que no están en contacto con la barra permanecen rectos, el cociente $\alpha = D/L$ no debe ser menor que un valor crítico α_c . Despreciando los términos de orden R/L o superior, obtenga una estimación de α_c en función de M/m . (3.4 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) $\dot{s} = -R\dot{\theta}$.
- (b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$.
- (c) $\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (d) $\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}$.
- (e) $a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2$.
- (f) $U = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta]$.
- (g) $v_m = \sqrt{2g\left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)R\right]}$.
- (h) $v_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sqrt{gR} \approx 1.133\sqrt{gR}$, en $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$.
- (i) $v_H = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{gR} \approx 0.4334\sqrt{gR}$.
- (j) $\alpha \geq \alpha_c$, $\alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}$.

Los factores de rapidez $\sqrt{gR}$ tienen unidades de m s^{-1} cuando g y R se expresan en unidades del SI.

Solución

Tomemos $\hat{x}$ vertical hacia arriba e introduzcamos $\hat{y}$ horizontal hacia la izquierda. Los vectores unitarios mostrados en la Figura 1a son entonces

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r},$$

y la posición de la partícula es

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

(a) La longitud enrollada alrededor de la barra es $R\theta$. La conservación de la longitud de la cuerda da

$$s + R\theta = L.$$

Derivando,

$$\dot{s} = -R\dot{\theta}.$$

(b) Puesto que $\vec{OQ} = R\hat{r}$,

$$\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta}\hat{t}.$$

Aquí Q denota el punto geométrico de contacto, que va cambiando; no tiene por qué seguir siendo el mismo punto de la barra inmóvil.

(c) El desplazamiento de la partícula respecto a Q es $s\hat{t}$. Derivando este vector en ejes fijos se obtiene

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s}\hat{t} + s\frac{d\hat{t}}{dt}.$$

Así,

$$\vec{v}' = \dot{s}\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

(d) Sumando la velocidad de Q ,

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta}\hat{r}.$$

Usando el apartado (a), la componente según $\hat{t}$ se anula:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}.$$

En particular, durante el movimiento inicial con $\dot{\theta} > 0$,

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) Derivamos la velocidad:

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}.$$

Por tanto,

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

El signo negativo indica que la aceleración está dirigida hacia Q a lo largo de la cuerda recta.

(f) A partir del vector de posición, la coordenada vertical de la partícula es

$$x = R\cos\theta - s\sin\theta.$$

Inicialmente $x = R$, donde se define como cero la energía potencial. Por ello,

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos\theta - 1) - s\sin\theta].$$

(g) La tensión tiene la dirección de $-\hat{t}$, mientras que la velocidad tiene la dirección de $\hat{r}$, por lo que la tensión no realiza trabajo. La conservación de la energía mecánica da

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

o bien

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos\theta) + s\sin\theta].$$

Para localizar el punto más bajo, derivamos la altura usando $ds/d\theta = -R$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta - s \cos \theta = -s \cos \theta.$$

La altura disminuye antes de $\theta = \pi/2$ y aumenta inmediatamente después. Por tanto, el punto más bajo se alcanza en

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

El descenso vertical desde el punto en que se suelta la partícula es $R + s_m$, lo que da

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}.$$

(h) Sea T la tensión. La fuerza de la gravedad tiene una componente $mg \sin \theta$ según $\hat{t}$, de modo que la segunda ley de Newton y el apartado (e) dan

$$mg \sin \theta - T = -m \frac{v^2}{s}.$$

Por tanto,

$$T = m \left(\frac{v^2}{s} + g \sin \theta \right).$$

Sustituyendo la expresión obtenida a partir de la energía,

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos \theta)}{s} + 3 \sin \theta.$$

A medida que la masa pendular gira alrededor de la barra y la cuerda se enrolla en ella, $s = L - R\theta$ disminuye. Una cuerda no puede ejercer una tensión negativa, por lo que este movimiento sujeto a la restricción termina cuando T vuelve a anularse por primera vez. En ese instante, la cuerda sigue recta y tiene su longitud mínima durante el movimiento inicial.

La tensión es positiva para $0 < \theta \leq \pi$. Escribimos su primer cero posterior como

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

La condición $T = 0$ se convierte en

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

de donde

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

Puesto que $L = s_s + R\theta_s$,

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

La comparación con el valor exacto especificado de L/R da la primera raíz pertinente

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

y

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

Cuando la tensión es nula,

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

Usando $\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$,

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

Así,

$$v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}.$$

(i) En el instante determinado en el apartado (h),

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

Puesto que $\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$, las componentes de la velocidad hacia arriba y horizontal son

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

La cuerda se destensa y la partícula sigue una trayectoria de proyectil. Su velocidad horizontal permanece constante, mientras que su velocidad hacia arriba se anula al cabo de

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

En el punto más alto, su rapidez es, por tanto, simplemente su rapidez horizontal:

$$v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}.$$

También puede comprobarse geoméricamente que la cuerda permanece destensada durante este ascenso. Definimos

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Las coordenadas del proyectil $X = x/R$, $Y = y/R$ son

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

Para un punto de esta trayectoria, sean

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \operatorname{atan} 2(Y, X).$$

La longitud de cuerda necesaria para un arco enrollado seguido de un tramo recto tangente es

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

La sustitución y la derivación muestran que esta longitud disminuye durante todo el ascenso: parte de $L/R = 6.88585$ y alcanza 6.75065 en H . Por tanto, la cuerda permanece destensada hasta el punto más alto, tal como requiere el cálculo del movimiento de proyectil.

(j) Despreciando las correcciones especificadas debidas al radio de la barra, la distancia de la masa pendular al punto de suspensión efectivo una vez que la pesa se detiene es

$$\ell = L - D.$$

Las longitudes enrolladas y los desniveles asociados a la barra son de orden R ; está justificado despreciarlos porque $(L - D) \gg R$.

La pesa en caída pierde una energía potencial gravitatoria MgD . El rozamiento cinético es despreciable y la pesa tiene energía cinética nula cuando se detiene. A partir de ese momento, el contacto estático de la cuerda no realiza trabajo. Por tanto, la energía mecánica conservada de la masa pendular, medida respecto a su nivel horizontal inicial, es MgD .

Su altura para un ángulo θ es aproximadamente $-\ell \sin \theta$, de modo que

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

Escribiendo $\mu = M/m$, esto da

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

Para el movimiento circular posterior, la tensión es

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

La posición que impone la condición más restrictiva es el punto superior de la trayectoria circular, en $\theta = 3\pi/2$, donde $\sin \theta = -1$. Para mantener la cuerda recta se requiere

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

o bien

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

Equivalentemente, en el punto superior la masa pendular debe conservar al menos la rapidez $\sqrt{g\ell}$; por tanto, su energía allí debe ser como mínimo

$$mg\ell + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mg\ell.$$

Usando $\ell = L - D$ y $\alpha = D/L$,

$$\begin{aligned} 2\mu D &\geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha &\geq 3. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.}$$

La igualdad corresponde al caso límite de tensión nula en el punto superior. El rozamiento estático supuesto mantiene en reposo la pesa de mayor masa durante el movimiento posterior de la masa pendular.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Un resonador de cristal piezoeléctrico sometido a una tensión alterna

Considere una barra uniforme de longitud sin esfuerzo aplicado ℓ y área de sección transversal A (Figura 2a). Su longitud cambia en $\Delta\ell$ cuando se aplican a sus caras extremas fuerzas iguales y opuestas de magnitud F , perpendiculares a ellas. El esfuerzo T sobre las caras extremas se define como F/A . El cambio relativo de su longitud, es decir, $\Delta\ell/\ell$, se denomina deformación unitaria S de la barra. En términos del esfuerzo y la deformación unitaria, la ley de Hooke puede expresarse como

$$T = YS \quad \text{o} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

donde Y se denomina módulo de Young del material de la barra. Observe que un esfuerzo de compresión T corresponde a $F < 0$ y a una disminución de la longitud (es decir, $\Delta\ell < 0$). Por tanto, dicho esfuerzo es negativo y está relacionado con la presión p mediante $T = -p$.

Para una barra uniforme de densidad ρ , la velocidad de propagación de las ondas longitudinales (es decir, la velocidad del sonido) a lo largo de la barra viene dada por

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

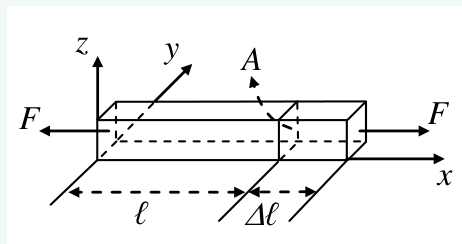


Figura 2a

Se pueden despreciar los efectos del amortiguamiento y de la disipación al responder a las siguientes preguntas.

Parte A: propiedades mecánicas

Una barra uniforme de longitud semiinfinita, que se extiende desde $x = 0$ hasta ∞ (véase la Figura 2b), tiene una densidad ρ . Inicialmente está en reposo y sin esfuerzo aplicado. A continuación, un pistón ejerce de manera constante una pequeña presión p sobre su cara izquierda en $x = 0$ durante un tiempo muy breve Δt , lo que hace que una onda de presión se propague hacia la derecha con velocidad u .

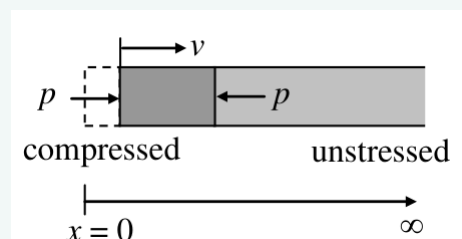


Figura 2b

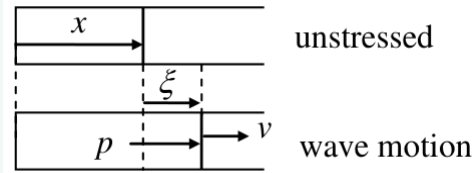


Figura 2c

(a) Si el pistón hace que la cara izquierda de la barra se mueva con una velocidad constante v (Figura 2b), ¿cuáles son la deformación unitaria S y la presión p en la cara izquierda durante el tiempo Δt ? Las respuestas deben expresarse únicamente en términos de ρ , u y v . (1.6 puntos)

(b) Considere una onda longitudinal que se propaga a lo largo de la dirección x en la barra. Para una sección transversal situada en x cuando la barra no está sometida a esfuerzo (Figura 2c), sea $\xi(x, t)$ su desplazamiento en el instante t y suponga que

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

donde ξ_0 y k son constantes. Determine la velocidad $v(x, t)$, la deformación unitaria $S(x, t)$ y la presión $p(x, t)$ correspondientes en función de x y t . (2.4 puntos)

Parte B: propiedades electromecánicas (incluido el efecto piezoeléctrico)

Considere una lámina de cristal de cuarzo de longitud b , espesor h y anchura w (Figura 2d). Su longitud y su espesor se orientan a lo largo de los ejes x y z , respectivamente. Los electrodos están formados por finos recubrimientos metálicos en sus superficies superior e inferior. Unos conductores eléctricos que también sirven como soportes de montaje (Figura 2e) están soldados a los centros de los electrodos, que pueden suponerse inmóviles para las oscilaciones longitudinales en la dirección x .

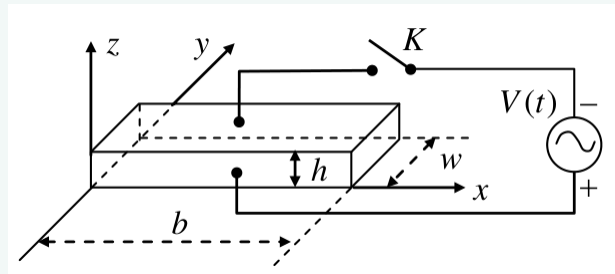


Figura 2d

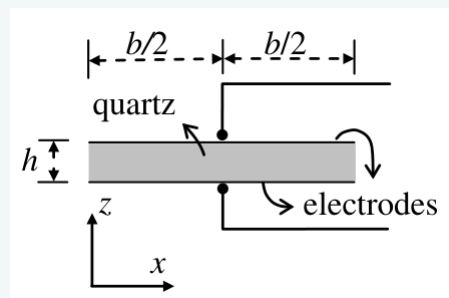


Figura 2e

El cristal de cuarzo considerado tiene una densidad ρ de $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y un módulo de Young Y de $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. La longitud b de la lámina es 1.00 cm , y su anchura w y altura h son tales que $h \ll w$ y $w \ll b$. Con el interruptor K abierto, suponemos que en la lámina de

cuarzo solo se excitan modos longitudinales de oscilación de ondas estacionarias en la dirección x .

Para una onda estacionaria de frecuencia $f = \omega/2\pi$, el desplazamiento $\xi(x, t)$ en el instante t de una sección transversal de la lámina cuya posición de equilibrio es x puede escribirse como

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

donde ξ_0 es una constante positiva y la función espacial $g(x)$ tiene la forma

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

$g(x)$ tiene un valor máximo de uno y $k = \omega/u$. Tenga en cuenta que los centros de los electrodos están inmóviles y que las caras izquierda y derecha de la lámina están libres y deben tener un esfuerzo (o una presión) nulo.

(c) Determine los valores de B_1 y B_2 en la Ec. (4b) para una onda estacionaria longitudinal en la lámina de cuarzo. (1.2 puntos)

(d) ¿Cuáles son las dos frecuencias más bajas a las que pueden excitarse ondas estacionarias longitudinales en la lámina de cuarzo? (1.2 puntos)

El efecto piezoeléctrico es una propiedad especial del cristal de cuarzo. La compresión o dilatación del cristal genera una tensión eléctrica entre sus caras y, a la inversa, una tensión externa aplicada entre las caras del cristal hace que este se expanda o se contraiga según la polaridad de la tensión. Por tanto, las oscilaciones mecánicas y eléctricas pueden acoplarse y entrar en resonancia mediante un cristal de cuarzo.

Para tener en cuenta el efecto piezoeléctrico, sean $-\sigma$ y $+\sigma$ las densidades superficiales de carga de los electrodos superior e inferior, respectivamente, cuando la lámina de cuarzo está sometida a un campo eléctrico E en la dirección z . Denotemos por S y T la deformación unitaria y el esfuerzo de la lámina en la dirección x , respectivamente. Entonces, el efecto piezoeléctrico del cristal de cuarzo puede describirse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

donde $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ es la compliancia elástica (es decir, la inversa del módulo de Young) a campo eléctrico constante y $\varepsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ es la permitividad a esfuerzo constante, mientras que $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ es el coeficiente piezoeléctrico.

Suponga que se cierra el interruptor K de la Fig. 2d. La tensión alterna $V(t) = V_m \cos \omega t$ actúa ahora entre los electrodos y aparece en la lámina de cuarzo un campo eléctrico uniforme $E(t) = V(t)/h$ en la dirección z . Cuando se alcanza el régimen estacionario, aparece en la lámina una oscilación de onda estacionaria longitudinal de frecuencia angular ω en la dirección x .

Como E es uniforme, la longitud de onda λ y la frecuencia f de una onda estacionaria longitudinal en la lámina siguen estando relacionadas mediante $\lambda = u/f$, con u dada por la Ec. (2). Sin embargo, como muestra la Ec. (5a), $T = YS$ ya no es válida, aunque las definiciones de deformación unitaria y esfuerzo no cambian y las caras extremas de la lámina siguen estando libres, con esfuerzo nulo.

(e) Teniendo en cuenta las Ecs. (5a) y (5b), la densidad superficial de carga σ en el electrodo inferior, en función de x y t , tiene la forma

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

donde $k = \omega/u$. Halle las expresiones de D_1 y D_2 . (2.2 puntos)

(f) La carga superficial total $Q(t)$ en el electrodo inferior está relacionada con $V(t)$ mediante

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (6)$$

Halle la expresión de C_0 y la expresión y el valor numérico de α^2 . (1.4 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

• (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

• (b)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

• (c)

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

El signo global corresponde a una fase de oscilación arbitraria; se puede elegir $B_1 = 1$.

• (d)

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

• (e)

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

• (f)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

Aquí, α^2 es adimensional.

Solución

Utilizamos la aproximación unidimensional de pequeñas deformaciones especificada en el problema. Puesto que x identifica una sección transversal en su posición sin esfuerzo aplicado, su velocidad y su deformación unitaria longitudinal son

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Para el modelo puramente mecánico, $T = YS$, $p = -T$ y $Y = \rho u^2$.

(a)

Durante el tiempo Δt , la perturbación recorre una distancia $u\Delta t$. Por tanto, a primer orden en la pequeña deformación, la masa puesta en movimiento con velocidad v es

$$m = \rho A u \Delta t.$$

El impulso externo sobre la barra es igual a la cantidad de movimiento que adquiere:

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

Así,

$$\boxed{p = \rho u v.}$$

El esfuerzo es de compresión, por lo que $T = -p$. Entonces, la ley de Hooke da

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

y, por tanto,

$$\boxed{S = -\frac{v}{u}.}$$

El signo también se deduce geométricamente: la longitud inicialmente sin esfuerzo aplicado $u\Delta t$ se acorta en una cantidad igual al desplazamiento del pistón $v\Delta t$.

(b)

Al derivar el desplazamiento respecto al tiempo se obtiene la velocidad de las partículas del material:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{-k u \xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Al derivar respecto a la coordenada en ausencia de esfuerzo se obtiene la deformación unitaria:

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{k \xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Finalmente,

$$p(x, t) = -Y S(x, t),$$

de modo que

$$\boxed{p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut).}$$

En particular, $p(x, t) = \rho u v(x, t)$, en concordancia con la parte (a) para una onda que se propaga hacia la derecha.

(c)

El punto medio está inmóvil, por lo que

$$\xi(b/2, t) = 0 \implies g(b/2) = 0.$$

Al sustituir $x = b/2$ en la Ec. (4b) se obtiene

$$\boxed{B_2 = 0}.$$

En consecuencia,

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

En el modelo mecánico, los extremos libres tienen esfuerzo nulo y, por tanto, deformación unitaria nula. Así pues,

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

Puesto que

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

un modo oscilatorio no trivial requiere

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

Para estos valores permitidos de k , la función seno alcanza tanto $+1$ como -1 dentro de la lámina. Por tanto, la normalización $\max g(x) = 1$ implica

$$\boxed{|B_1| = 1}.$$

Ambos signos son posibles. Cambiar B_1 por $-B_1$ equivale a desplazar la fase de la oscilación en π ; podemos elegir $B_1 = 1$.

(d)

La condición de extremos libres obtenida anteriormente da

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

o bien

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

Utilizando $\omega = uk$ y $f = \omega/(2\pi)$,

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

Por tanto, los modos permitidos son los armónicos impares. Las dos frecuencias más bajas corresponden a $n = 0$ y $n = 1$.

La velocidad del sonido es

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

Con $b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$,

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

y

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

Al incluir el efecto piezoeléctrico, la Ec. (5a) da

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

La segunda ley de Newton para un elemento de la lámina es

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Como E es espacialmente uniforme,

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Para la respuesta armónica a la frecuencia de excitación, escribimos

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

Puesto que $\ddot{E} = -\omega^2 E$, la función espacial satisface

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

El punto medio fijo exige que $H(b/2) = 0$, de modo que

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Por tanto, la deformación unitaria es

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

La condición de extremos libres es ahora $T = 0$, lo que significa que

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

Se deduce que

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

y, por tanto,

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

El esfuerzo pasa a ser

$$T(x, t) = Yd_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

Al sustituir en la Ec. (5b) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Y d_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}.\end{aligned}$$

Comparando con la forma indicada,

$$\boxed{D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.}$$

Ambos coeficientes tienen unidades de permitividad, F/m.

Estas expresiones describen la solución particular armónica fuera de la resonancia exacta. Cuando $\cos(kb/2) = 0$, la condición de contorno no puede satisfacerse con una amplitud armónica finita bajo una tensión aplicada no nula. Por tanto, los polos expresan la ausencia de una respuesta acotada en régimen estacionario en la resonancia dentro del modelo sin amortiguamiento.

(f)

A primer orden, una franja del electrodo de longitud dx tiene un área $w dx$. Por tanto, la carga total en el electrodo inferior es

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

La integral espacial necesaria es

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

Utilizando el resultado de la parte (e),

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Y d_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Y d_p^2) \right].$$

Sacando $\varepsilon_T b w / h$ como factor común,

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T b w}{h} \left[1 + \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

La comparación con la Ec. (6) da

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}}, \quad \boxed{\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T}}.$$

Utilizando la compliancia elástica indicada,

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}.\end{aligned}$$

Con la longitud dada, la expresión de la capacidad también puede escribirse como

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

Como comprobación de coherencia, en el límite cuasiestático $kb \rightarrow 0$,

$$\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \rightarrow 1,$$

de modo que $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$, como cabe esperar para una lámina sin esfuerzo aplicado con permitividad ε_T .

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Masa del neutrino y desintegración del neutrón (Parte A); Levitación mediante luz (Parte B)

Parte A

Masa del neutrino y desintegración del neutrón

Un neutrón libre de masa m_n , en reposo en el sistema de referencia del laboratorio, se desintegra en tres partículas que no interaccionan entre sí: un protón, un electrón y un antineutrino. La masa en reposo del protón es m_p , mientras que se supone que la masa en reposo del antineutrino m_v es distinta de cero y mucho menor que la masa en reposo del electrón m_e . Denotemos por c la velocidad de la luz en el vacío. Los valores medidos de las masas son los siguientes:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

En lo que sigue, todas las energías y velocidades están referidas al sistema del laboratorio. Sea E la energía total del electrón emitido en la desintegración.

(a) Halle el valor máximo posible $E_{\max}$ de E y la rapidez v_m del antineutrino cuando $E = E_{\max}$. Ambas respuestas deben expresarse en función de las masas en reposo de las partículas y de la velocidad de la luz. Sabiendo que $m_v < 7.3 \text{ eV}/c^2$, calcule $E_{\max}$ y el cociente v_m/c con 3 cifras significativas.

(4.0 puntos)

Parte B

Levitación mediante luz

Una semiesfera de vidrio transparente de radio R y masa m tiene un índice de refracción n . En el medio exterior a la semiesfera, el índice de refracción es igual a uno. Un haz paralelo de luz láser monocromática incide de manera uniforme y perpendicular sobre la porción central de su superficie plana, como se muestra en la Figura 3. La aceleración de la gravedad $\vec{g}$ está dirigida verticalmente hacia abajo. El radio δ de la sección transversal circular del haz láser es mucho menor que R . Tanto la semiesfera de vidrio como el haz láser presentan simetría axial respecto al eje z .

La semiesfera de vidrio no absorbe nada de la luz láser. Su superficie está recubierta con una capa delgada de material transparente, de modo que las reflexiones son despreciables cuando la luz entra en la semiesfera de vidrio y sale de ella. El camino óptico recorrido por la luz láser al

atravesar la capa superficial antirreflectante también es despreciable.

(b) Despreciando los términos de orden $(\delta/R)^3$ o superior, halle la potencia láser P necesaria para equilibrar el peso de la semiesfera de vidrio.

(4.0 puntos)

Indicación: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ cuando θ es mucho menor que uno.

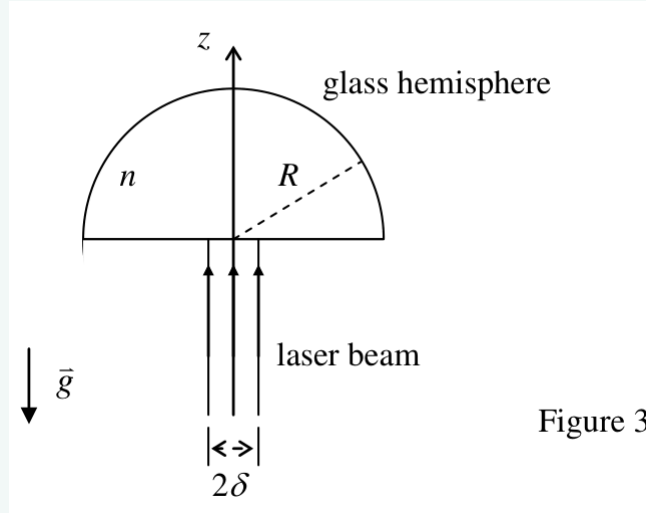


Figure 3

Figura 3

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) La energía total máxima del electrón es

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n} c^2.$$

En este extremo del espectro, el antineutrino y el protón tienen la misma velocidad, cuya magnitud es

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_\nu + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_\nu - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_\nu)^2 - m_e^2}.$$

Con tres cifras significativas,

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

- (b) Hasta el orden solicitado,

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

Solución

(a) Masa del neutrino y desintegración del neutrón

Sea p_e la magnitud del momento lineal del electrón. La conservación de la energía y del momento lineal da

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

Denotemos por $\mathcal{M}$ la masa invariante del par protón–antineutrino. Utilizando la relación entre la energía y el momento lineal del electrón,

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

Por tanto, la energía del electrón es máxima cuando $\mathcal{M}$ es mínima.

En el sistema de referencia del centro de momentos del par, el protón y el antineutrino tienen momentos lineales de igual magnitud q y sentidos opuestos. Así,

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

La igualdad se cumple cuando $q = 0$: ambas partículas están en reposo en este sistema, por lo que tienen la **misma velocidad** en el sistema del laboratorio. Esta configuración está permitida cinemáticamente porque $m_n > m_p + m_v + m_e$.

Escribiendo $M = m_p + m_v$, la energía en el extremo del espectro es, por tanto,

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

En el extremo del espectro, el par tiene una energía $m_n c^2 - E_{\max}$ y un momento lineal de magnitud p_e . La rapidez común de sus partículas, que es la rapidez del antineutrino, se obtiene de $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E_{\text{total}}$:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

Al sustituir se obtiene

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

Para la evaluación numérica, el límite $m_v \rightarrow 0^+$ da

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

Al aumentar $m_\nu c^2$ desde cero hasta su cota superior de 7.3 eV, estos valores disminuyen en menos de 7.30 eV y 8.5×10^{-9} , respectivamente. Por ello, todo el intervalo de masas permitido da, con tres cifras significativas,

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

Aquí $E_{\max}$ es la energía **total** del electrón. El antineutrino es lento en este extremo del espectro a pesar de su masa diminuta: su momento lineal también es diminuto, como se requiere para que tenga la misma velocidad que el protón.

(b) Levitación mediante luz

Consideremos un rayo que entra en la semiesfera a una distancia r del eje z , donde $0 \leq r \leq \delta$. Incide perpendicularmente sobre la superficie plana y, por tanto, continúa verticalmente dentro del vidrio.

En la superficie esférica, sea θ el ángulo entre el rayo incidente y la normal hacia el exterior. Por geometría,

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

Si θ' es el ángulo del rayo emergente respecto a esa normal, la ley de Snell da

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

Para un vidrio con $n > 1$, el rayo emergente se desvía hacia el eje. El ángulo que forma con la vertical ascendente tiene magnitud

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

Puesto que $r/R \leq \delta/R \ll 1$, un desarrollo con n fijo da

$$\alpha = (n - 1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Tanto antes de entrar como después de salir de la semiesfera, la luz tiene un momento lineal igual a su energía dividida por c . La absorción y la reflexión son despreciables, por lo que un haz de rayos que transporta una potencia dP tiene un flujo entrante de momento lineal vertical dP/c y un flujo saliente de momento lineal vertical $(dP/c) \cos \alpha$.

Por conservación del momento lineal, la fuerza ascendente que ejerce sobre la semiesfera es

$$dF_z = \frac{dP}{c}(1 - \cos \alpha).$$

Utilizando la aproximación dada para ángulos pequeños,

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2}.$$

Las componentes transversales de la fuerza se cancelan por simetría axial.

La intensidad incidente es uniforme:

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

Por tanto, una corona circular de radio r y anchura dr transporta una potencia

$$dP = I 2\pi r dr.$$

Integrando la fuerza vertical sobre el haz,

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n-1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n-1)^2}{cR^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2}. \end{aligned}$$

En esta expresión se conserva la contribución de orden $(\delta/R)^2$; la siguiente corrección a $F_z/(P/c)$ es de orden $(\delta/R)^4$.

Al equilibrar esta fuerza ascendente con el peso,

$$mg = \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2},$$

se obtiene

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.