

IPhO 2003

Theorieaufgaben und Lösungen · Taipeh, Taiwan · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/2003/

Aufgabe 1: Eine Schaukel mit einem fallenden Gewicht

Ein starrer zylindrischer Stab mit dem Radius R wird waagrecht über dem Boden gehalten. An einem Faden mit vernachlässigbarer Masse und der Länge L ($L > 2\pi R$) hängt ein Pendelkörper der Masse m vom Punkt A an der Oberseite des Stabs, wie in Abbildung 1a gezeigt. Der Pendelkörper wird angehoben, bis er sich auf gleicher Höhe mit A befindet, und dann bei gespanntem Faden aus der Ruhe losgelassen. Jegliche Dehnung des Fadens ist zu vernachlässigen. Es wird angenommen, dass der Pendelkörper als Massenpunkt behandelt werden kann und nur in einer Ebene senkrecht zur Achse des Stabs schwingt. Dementsprechend wird der Pendelkörper auch als *Teilchen* bezeichnet. Die Erdbeschleunigung ist $\vec{g}$.

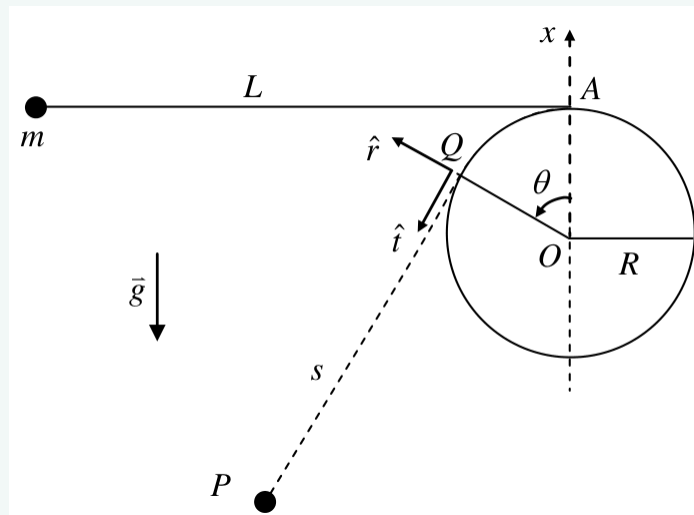


Abbildung 1a

Der Ursprung des Koordinatensystems sei O . Wenn sich das Teilchen im Punkt P befindet, berührt der Faden die Zylinderoberfläche im Punkt Q tangential. Die Länge der Strecke QP wird mit s bezeichnet. Der tangentielle Einheitsvektor und der radiale Einheitsvektor bei Q werden mit $\hat{t}$ beziehungsweise $\hat{r}$ bezeichnet. Die Winkelauslenkung θ des Radius OQ , die von der vertikalen x -Achse entlang OA aus gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird, wird als positiv definiert.

Für $\theta = 0$ ist die Länge s gleich L , und die potenzielle Energie U des Teilchens im Schwerfeld ist null. Während sich das Teilchen bewegt, werden die momentanen zeitlichen Änderungsraten von θ und s mit $\dot{\theta}$ beziehungsweise $\dot{s}$ bezeichnet.

Sofern nicht anders angegeben, beziehen sich alle Geschwindigkeitsbeträge und Geschwindigkeitsvektoren auf den festen Punkt O .

Teil A

In Teil A ist der Faden während der Bewegung des Teilchens gespannt. Bestimmen Sie mithilfe der oben eingeführten Größen (d. h. s , θ , $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R , L , g , $\hat{t}$ und $\hat{r}$):

- (a) Die Beziehung zwischen $\dot{\theta}$ und $\dot{s}$. (0.5 Punkte)
- (b) Die Geschwindigkeit $\vec{v}_Q$ des bewegten Punkts Q relativ zu O . (0.5 Punkte)
- (c) Die Geschwindigkeit $\vec{v}'$ des Teilchens relativ zum bewegten Punkt Q , wenn es sich in P befindet. (0.7 Punkte)
- (d) Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens relativ zu O , wenn es sich in P befindet. (0.7 Punkte)
- (e) Die $\hat{t}$ -Komponente der Beschleunigung des Teilchens relativ zu O , wenn es sich in P befindet. (0.7 Punkte)
- (f) Die potenzielle Energie U des Teilchens im Schwerfeld, wenn es sich in P befindet. (0.5 Punkte)
- (g) Den Geschwindigkeitsbetrag v_m des Teilchens am tiefsten Punkt seiner Bahn. (0.7 Punkte)

Teil B

In Teil B hat das Verhältnis von L zu R den folgenden Wert:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

- (h) Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag v_s des Teilchens, wenn der Fadenabschnitt von Q bis P sowohl gerade ist als auch seine kürzeste Länge hat? (Ausgedrückt durch g und R) (2.4 Punkte)
- (i) Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag v_H des Teilchens an seinem höchsten Punkt H , nachdem es auf die andere Seite des Stabs geschwungen ist? (Ausgedrückt durch g und R) (1.9 Punkte)

Teil C

In Teil C hängt der Pendelkörper der Masse m nicht von A , sondern ist durch einen über die Oberseite des Stabs geführten Faden mit einem schwereren Gewicht der Masse M verbunden, wie in Abbildung 1b gezeigt. Das Gewicht kann ebenfalls als Teilchen behandelt werden.

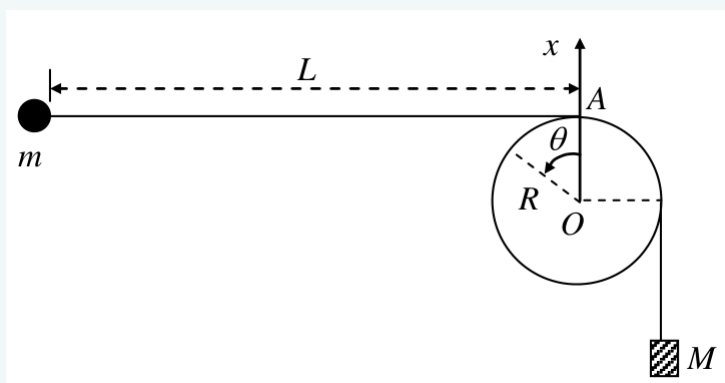


Abbildung 1b

Anfangs wird der Pendelkörper auf gleicher Höhe mit A in Ruhe gehalten, sodass der Faden bei unterhalb von O hängendem Gewicht gespannt ist und einen waagerechten Abschnitt der Länge L aufweist. Dann wird der Pendelkörper aus der Ruhe losgelassen, und das Gewicht beginnt zu fallen. Es wird angenommen, dass der Pendelkörper in einer vertikalen Ebene bleibt und ungehindert am fallenden Gewicht vorbeischwingen kann.

Die Gleitreibung zwischen dem Faden und der Oberfläche des Stabs ist vernachlässigbar. Es wird jedoch angenommen, dass die Haftreibung groß genug ist, damit das Gewicht in Ruhe bleibt, sobald es zum Stillstand gekommen ist (d. h. die Geschwindigkeit null erreicht hat).

(j) Nehmen Sie an, dass das Gewicht tatsächlich zum Stillstand kommt, nachdem es eine Strecke D gefallen ist, und dass $(L - D) \gg R$ gilt. Wenn das Teilchen anschließend bis $\theta = 2\pi$ um den Stab schwingen kann, während beide nicht am Stab anliegenden Fadenabschnitte gerade bleiben, darf das Verhältnis $\alpha = D/L$ nicht kleiner als ein kritischer Wert α_c sein. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung R/L oder höher und bestimmen Sie eine Näherung für α_c in Abhängigkeit von M/m . (3.4 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) $\dot{s} = -R\dot{\theta}$.
- (b) $\vec{v}_Q = R\dot{\theta} \hat{t}$.
- (c) $\vec{v}' = \dot{s} \hat{t} - s\dot{\theta} \hat{r}$.
- (d) $\vec{v} = -s\dot{\theta} \hat{r}$.
- (e) $a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2$.
- (f) $U = mg[R(\cos \theta - 1) - s \sin \theta]$.
- (g) $v_m = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) R \right]}$.
- (h) $v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}$, bei $\theta_s = \frac{9\pi}{8}$.
- (i) $v_H = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}$.
- (j) $\alpha \geq \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}$.

Die Geschwindigkeitsfaktoren $\sqrt{gR}$ haben die Einheit m s^{-1} , wenn g und R in SI-Einheiten angegeben werden.

Lösung

Wir wählen $\hat{x}$ senkrecht nach oben und führen $\hat{y}$ waagerecht nach links ein. Die in Abbildung 1a gezeigten Einheitsvektoren lauten dann

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}.$$

Folglich gilt

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r},$$

und der Ortsvektor des Teilchens ist

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

(a) Die um den Stab gewickelte Länge beträgt $R\theta$. Aus der Konstanz der Fadenlänge folgt

$$s + R\theta = L.$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\dot{s} = -R\dot{\theta}.$$

(b) Da $\vec{OQ} = R\hat{r}$, gilt

$$\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta} \hat{t}.$$

Dabei bezeichnet Q den sich verändernden geometrischen Berührungspunkt; er muss nicht derselbe Punkt auf dem ruhenden Stab bleiben.

(c) Der Ortsvektor des Teilchens relativ zu Q ist $s\hat{t}$. Differenziert man diesen Vektor bezüglich fester Achsen, so ergibt sich

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s} \hat{t} + s \frac{d\hat{t}}{dt}.$$

Somit gilt

$$\vec{v}' = \dot{s} \hat{t} - s\dot{\theta} \hat{r}.$$

(d) Durch Addition der Geschwindigkeit von Q erhält man

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta} \hat{r}.$$

Mit Teil (a) fällt die $\hat{t}$ -Komponente weg:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta} \hat{r}.$$

Insbesondere gilt während der anfänglichen Schwingbewegung mit $\dot{\theta} > 0$

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) Wir differenzieren die Geschwindigkeit:

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2 \hat{t}.$$

Daher gilt

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Beschleunigung entlang des geraden Fadens auf Q gerichtet ist.

(f) Aus dem Ortsvektor ergibt sich für die vertikale Koordinate des Teilchens

$$x = R \cos \theta - s \sin \theta.$$

Anfangs gilt $x = R$; dort ist die potenzielle Energie als null definiert. Somit gilt

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos \theta - 1) - s \sin \theta].$$

(g) Die Fadenspannung wirkt in Richtung $-\hat{t}$, während die Geschwindigkeit in Richtung von $\hat{r}$ liegt; daher verrichtet die Fadenspannung keine Arbeit. Die Erhaltung der mechanischen Energie liefert

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

oder

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

Um den tiefsten Punkt zu bestimmen, differenzieren wir die Höhe unter Verwendung von $ds/d\theta = -R$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta - s \cos \theta = -s \cos \theta.$$

Die Höhe nimmt vor $\theta = \pi/2$ ab und unmittelbar danach zu. Der tiefste Punkt wird somit erreicht bei

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

Der Höhenverlust seit dem Loslassen beträgt $R + s_m$, woraus folgt

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}.$$

(h) Die Fadenspannung sei T . Die Gewichtskraft hat in Richtung $\hat{t}$ die Komponente $mg \sin \theta$, sodass das zweite Newtonsche Gesetz und Teil (e) ergeben

$$mg \sin \theta - T = -m \frac{v^2}{s}.$$

Daher gilt

$$T = m \left(\frac{v^2}{s} + g \sin \theta \right).$$

Durch Einsetzen des aus der Energieerhaltung gewonnenen Ausdrucks erhält man

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos \theta)}{s} + 3 \sin \theta.$$

Während sich der Faden bei der Bewegung des Pendelkörpers um den Stab wickelt, nimmt $s = L - R\theta$ ab. Ein Faden kann keine negative Spannung ausüben, daher endet diese durch den Faden geführte Bewegung, sobald T zum ersten Mal wieder null wird. In diesem Augenblick ist der Faden noch gerade und hat seine kürzeste Länge während der anfänglichen Schwingbewegung.

Die Fadenspannung ist für $0 < \theta \leq \pi$ positiv. Wir schreiben ihre erste darauffolgende Nullstelle als

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

Die Bedingung $T = 0$ wird zu

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

also

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

Da $L = s_s + R\theta_s$, gilt

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

Der Vergleich mit dem vorgegebenen exakten Wert von L/R liefert die maßgebliche erste Nullstelle

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

und

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

Bei verschwindender Fadenspannung gilt

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

Mit $\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$ erhält man

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

Somit gilt

$$\boxed{v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}}.$$

(i) Zu dem in Teil (h) bestimmten Zeitpunkt gilt

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

Da $\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$, lauten die nach oben gerichtete und die horizontale Geschwindigkeitskomponente

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

Der Faden wird schlaff, und das Teilchen folgt einer Wurfparabel. Seine horizontale Geschwindigkeit bleibt konstant, während seine nach oben gerichtete Geschwindigkeit nach folgender Zeit null erreicht:

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

Am höchsten Punkt ist sein Geschwindigkeitsbetrag daher gleich dem Betrag seiner horizontalen Geschwindigkeit:

$$\boxed{v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}}.$$

Dass der Faden während dieses Aufstiegs schlaff bleibt, lässt sich auch geometrisch überprüfen. Wir definieren

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Die Koordinaten $X = x/R$, $Y = y/R$ der Wurfbewegung lauten

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

Für einen Punkt auf dieser Bahn sei

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \operatorname{atan} 2(Y, X).$$

Die Fadenlänge, die für einen am Stab anliegenden Kreisbogen mit anschließendem geradem tangentialem Abschnitt erforderlich ist, beträgt

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

Einsetzen und Differenzieren zeigen, dass diese Länge während des gesamten Aufstiegs abnimmt: Sie beginnt bei $L/R = 6.88585$ und erreicht bei H den Wert 6.75065 . Somit bleibt der Faden bis zum höchsten Punkt schlaff, wie es die Berechnung der Wurfbewegung voraussetzt.

(j) Vernachlässigt man die angegebenen Korrekturen aufgrund des Stabradius, so beträgt der Abstand des Pendelkörpers vom effektiven Aufhängepunkt nach dem Anhalten des Gewichts

$$\ell = L - D.$$

Die um den Stab gewickelten Längen und die mit dem Stab verbundenen vertikalen Versätze sind von der Ordnung R ; ihre Vernachlässigung ist durch $(L - D) \gg R$ gerechtfertigt.

Das fallende Gewicht verliert die potenzielle Energie MgD . Die Gleitreibung ist vernachlässigbar, und die kinetische Energie des Gewichts ist null, wenn es zum Stillstand kommt. Danach verrichtet der ruhende Berührungspunkt des Fadens keine Arbeit. Somit beträgt die erhaltene mechanische Energie des Pendelkörpers, bezogen auf seine anfängliche horizontale Höhe, MgD .

Seine Höhe beim Winkel θ beträgt näherungsweise $-\ell \sin \theta$, sodass gilt

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

Mit der Bezeichnung $\mu = M/m$ ergibt sich daraus

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

Für die anschließende Kreisbewegung beträgt die Fadenspannung

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

Die maßgebliche Position ist der höchste Punkt der Kreisbahn bei $\theta = 3\pi/2$, wo $\sin \theta = -1$ gilt. Damit der Faden gerade bleibt, muss gelten

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

oder

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

Gleichbedeutend damit muss der Pendelkörper am höchsten Punkt mindestens den Geschwindigkeitsbetrag $\sqrt{g\ell}$ behalten; seine Energie muss dort daher mindestens den folgenden Wert haben:

$$mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell = \frac{3}{2}mg\ell.$$

Mit $\ell = L - D$ und $\alpha = D/L$ folgt

$$\begin{aligned} 2\mu D &\geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha &\geq 3. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.$$

Gleichheit entspricht dem Grenzfall verschwindender Fadenspannung am höchsten Punkt. Die vorausgesetzte Haftreibung hält das schwerere Gewicht während der anschließenden Schwingbewegung in Ruhe.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Ein piezoelektrischer Kristallresonator unter Wechselspannung

Betrachten Sie einen homogenen Stab mit der unbelasteten Länge ℓ und der Querschnittsfläche A (Abbildung 2a). Seine Länge ändert sich um $\Delta\ell$, wenn an seinen Stirnflächen senkrecht zu diesen gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte vom Betrag F angreifen. Die mechanische Spannung T an den Stirnflächen ist als F/A definiert. Die relative Längenänderung, also $\Delta\ell/\ell$, wird als Dehnung S des Stabes bezeichnet. Mithilfe von Spannung und Dehnung lässt sich das Hooke'sche Gesetz schreiben als

$$T = YS \quad \text{oder} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

Dabei wird Y als Elastizitätsmodul des Stabmaterials bezeichnet. Beachten Sie, dass eine Druckspannung T einer Kraft $F < 0$ und einer Längenabnahme (also $\Delta\ell < 0$) entspricht. Eine solche Spannung ist somit negativ und hängt mit dem Druck p über $T = -p$ zusammen.

Für einen homogenen Stab der Dichte ρ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen (also die Schallgeschwindigkeit) entlang des Stabes gegeben durch

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

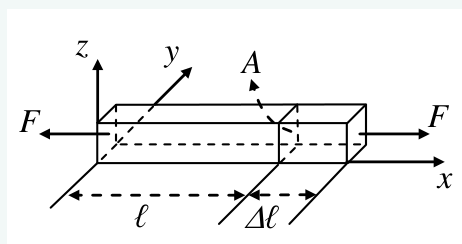


Abbildung 2a

Der Einfluss von Dämpfung und Dissipation kann bei der Beantwortung der folgenden Fragen vernachlässigt werden.

Teil A: mechanische Eigenschaften

Ein homogener, halbunendlich langer Stab, der sich von $x = 0$ bis ∞ erstreckt (siehe Abbildung 2b), hat die Dichte ρ . Er ruht zunächst und ist unbelastet. Ein Kolben übt dann während einer sehr kurzen Zeit Δt einen konstanten, kleinen Druck p auf seine linke Stirnfläche bei $x = 0$ aus, wodurch sich eine Druckwelle mit der Geschwindigkeit u nach rechts ausbreitet.

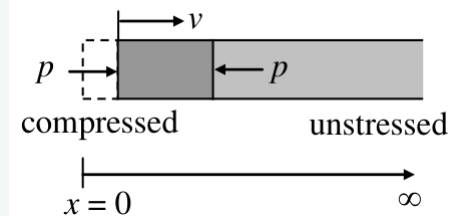


Abbildung 2b

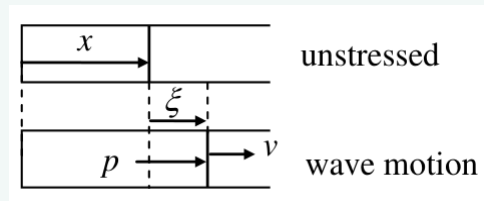


Abbildung 2c

(a) Wenn der Kolben bewirkt, dass sich die linke Stirnfläche des Stabes mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegt (Abbildung 2b), wie groß sind dann die Dehnung S und der Druck p an der linken Stirnfläche während der Zeit Δt ? Die Antworten dürfen nur durch ρ , u und v ausgedrückt werden. (1.6 Punkte)

(b) Betrachten Sie eine Longitudinalwelle, die sich im Stab in x -Richtung ausbreitet. Für einen Querschnitt, der sich im unbelasteten Stab bei x befindet (Abbildung 2c), sei $\xi(x, t)$ seine Verschiebung zum Zeitpunkt t , und es gelte

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

Dabei sind ξ_0 und k Konstanten. Bestimmen Sie die zugehörige Geschwindigkeit $v(x, t)$, Dehnung $S(x, t)$ und den Druck $p(x, t)$ als Funktionen von x und t . (2.4 Punkte)

Teil B: elektromechanische Eigenschaften (einschließlich des piezoelektrischen Effekts)

Betrachten Sie eine Quarzkristallplatte der Länge b , der Dicke h und der Breite w (Abbildung 2d). Ihre Länge und Dicke verlaufen entlang der x - bzw. z -Achse. Dünne metallische Beschichtungen auf ihrer Ober- und Unterseite bilden Elektroden. Elektrische Zuleitungen, die zugleich als Halterung dienen (Abbildung 2e), sind an die Mittelpunkte der Elektroden gelötet; diese Mittelpunkte können bei longitudinalen Schwingungen in x -Richtung als ruhend angenommen werden.

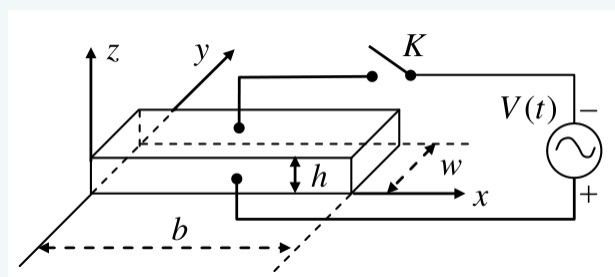


Abbildung 2d

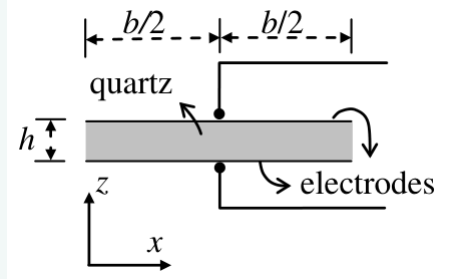


Abbildung 2e

Der betrachtete Quarzkristall hat eine Dichte ρ von $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ und einen Elastizitätsmodul Y von $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Die Länge b der Platte beträgt 1.00 cm , und die Breite w und Höhe h der Platte sind so gewählt, dass $h \ll w$ und $w \ll b$ gelten. Bei geöffnetem Schalter K nehmen wir an, dass in der Quarzplatte nur longitudinale Moden stehender Wellen in x -Richtung angeregt werden.

Für eine stehende Welle der Frequenz $f = \omega/2\pi$ lässt sich die Verschiebung $\xi(x, t)$ eines Querschnitts der Platte mit der Gleichgewichtslage x zum Zeitpunkt t schreiben als

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

Dabei ist ξ_0 eine positive Konstante, und die Ortsfunktion $g(x)$ hat die Form

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

$g(x)$ hat den Maximalwert eins, und es gilt $k = \omega/u$. Beachten Sie, dass die Mittelpunkte der Elektroden ruhen und die linke und rechte Stirnfläche der Platte frei sind, sodass dort die mechanische Spannung (bzw. der Druck) null sein muss.

(c) Bestimmen Sie die Werte von B_1 und B_2 in Gl. (4b) für eine longitudinale stehende Welle in der Quarzplatte. (1.2 Punkte)

(d) Welches sind die beiden niedrigsten Frequenzen, bei denen longitudinale stehende Wellen in der Quarzplatte angeregt werden können? (1.2 Punkte)

Der piezoelektrische Effekt ist eine besondere Eigenschaft eines Quarzkristalls. Eine Kompression oder Dehnung des Kristalls erzeugt eine elektrische Spannung am Kristall; umgekehrt bewirkt eine von außen an den Kristall angelegte Spannung je nach ihrer Polarität eine Ausdehnung oder Kontraktion des Kristalls. Daher können mechanische und elektrische Schwingungen durch einen Quarzkristall gekoppelt und in Resonanz gebracht werden.

Um den piezoelektrischen Effekt zu berücksichtigen, seien die Flächenladungsdichten auf der oberen und unteren Elektrode $-\sigma$ bzw. $+\sigma$, wenn die Quarzplatte einem elektrischen Feld E in z -Richtung ausgesetzt ist. Die Dehnung und die mechanische Spannung der Platte in x -Richtung seien mit S bzw. T bezeichnet. Dann lässt sich der piezoelektrische Effekt des Quarzkristalls durch das folgende Gleichungssystem beschreiben:

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

Dabei ist $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ die elastische Nachgiebigkeit (also der Kehrwert des Elastizitätsmoduls) bei konstantem elektrischem Feld, $\epsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ die Permittivität bei konstanter mechanischer Spannung und $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ der piezoelektrische Koeffizient.

Nun werde der Schalter K in Abb. 2d geschlossen. Die Wechselspannung $V(t) = V_m \cos \omega t$ liegt jetzt zwischen den Elektroden an, und in der Quarzplatte entsteht ein homogenes elektrisches Feld $E(t) = V(t)/h$ in z -Richtung. Nach Erreichen des eingeschwungenen Zustands schwingt die Platte in x -Richtung in Form einer longitudinalen stehenden Welle mit der Kreisfrequenz ω .

Da E homogen ist, hängen die Wellenlänge λ und die Frequenz f einer longitudinalen stehenden Welle in der Platte weiterhin über $\lambda = u/f$ zusammen, wobei u durch Gl. (2) gegeben ist. Wie Gl. (5a) zeigt, gilt jedoch $T = YS$ nicht mehr, obwohl die Definitionen von Dehnung und mechanischer Spannung unverändert bleiben und die Stirnflächen der Platte weiterhin frei und spannungsfrei sind.

(e) Unter Berücksichtigung der Gln. (5a) und (5b) hat die Flächenladungsdichte σ auf der unteren Elektrode als Funktion von x und t die Form

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

Dabei ist $k = \omega/u$. Bestimmen Sie die Ausdrücke für D_1 und D_2 . (2.2 Punkte)

(f) Die gesamte Oberflächenladung $Q(t)$ auf der unteren Elektrode hängt mit $V(t)$ über

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t) \quad (6)$$

zusammen. Bestimmen Sie den Ausdruck für C_0 sowie den Ausdruck und den Zahlenwert von α^2 . (1.4 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

- (b)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

- (c)

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

Das Gesamtvorzeichen entspricht einer beliebigen Schwingungsphase; man kann $B_1 = 1$ wählen.

• (d)

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

• (e)

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

• (f)

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

Hier ist α^2 dimensionslos.

Lösung

Wir verwenden die in der Aufgabenstellung vorgegebene eindimensionale Näherung für kleine Dehnungen. Da x einen Querschnitt in seiner unbelasteten Lage bezeichnet, sind seine Geschwindigkeit und seine Längsdehnung

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Für das rein mechanische Modell gelten $T = YS$, $p = -T$ und $Y = \rho u^2$.

(a)

Während der Zeit Δt legt die Störung die Strecke $u \Delta t$ zurück. In erster Ordnung der kleinen Verformung beträgt die Masse, die mit der Geschwindigkeit v in Bewegung gesetzt wird, daher

$$m = \rho A u \Delta t.$$

Der äußere Kraftstoß auf den Stab ist gleich seinem aufgenommenen Impuls:

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

Somit gilt

$$p = \rho u v.$$

Es liegt eine Druckspannung vor, also gilt $T = -p$. Das Hooke'sche Gesetz liefert dann

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

und damit

$$S = -\frac{v}{u}.$$

Das Vorzeichen folgt auch geometrisch: Die ursprünglich unbelastete Länge $u \Delta t$ wird um den Kolbenweg $v \Delta t$ verkürzt.

(b)

Die Ableitung der Verschiebung nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit der Materialteilchen:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{-ku\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Die Ableitung nach der Koordinate im unbelasteten Zustand ergibt die Dehnung:

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{k\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Schließlich gilt

$$p(x, t) = -YS(x, t),$$

also

$$\boxed{p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

Insbesondere gilt $p(x, t) = \rho u v(x, t)$, in Übereinstimmung mit Teil (a) für eine nach rechts laufende Welle.

(c)

Der Mittelpunkt ruht, daher gilt

$$\xi(b/2, t) = 0 \quad \implies \quad g(b/2) = 0.$$

Einsetzen von $x = b/2$ in Gl. (4b) ergibt

$$\boxed{B_2 = 0}.$$

Folglich ist

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Im mechanischen Modell sind die freien Enden spannungsfrei und haben daher die Dehnung null. Somit gilt

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

Da

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

erfordert eine nichttriviale Schwingungsmode

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

Für diese zulässigen Werte von k nimmt die Sinusfunktion innerhalb der Platte sowohl $+1$ als auch -1 an. Aus der Normierung $\max g(x) = 1$ folgt somit

$$\boxed{|B_1| = 1}.$$

Beide Vorzeichen sind möglich. Ein Wechsel von B_1 zu $-B_1$ entspricht einer Verschiebung der Schwingungsphase um π ; wir können $B_1 = 1$ wählen.

(d)

Die oben erhaltene Randbedingung für die freien Enden ergibt

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

oder

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

Mit $\omega = uk$ und $f = \omega/(2\pi)$ gilt

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

Die zulässigen Moden sind somit die ungeraden Harmonischen. Die beiden niedrigsten Frequenzen entsprechen $n = 0$ und $n = 1$.

Die Schallgeschwindigkeit beträgt

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

Mit $b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ gilt

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

und

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

Unter Berücksichtigung des piezoelektrischen Effekts ergibt Gl. (5a)

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

Das zweite Newton'sche Gesetz für ein Element der Platte lautet

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Da E räumlich homogen ist, gilt

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Für die harmonische Antwort bei der Anregungsfrequenz setzen wir

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

Wegen $\ddot{E} = -\omega^2 E$ erfüllt die Ortsfunktion

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

Der feste Mittelpunkt erfordert $H(b/2) = 0$, also gilt

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

Die Dehnung ist daher

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

Die Randbedingung an den freien Enden lautet nun $T = 0$, was bedeutet, dass

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

Daraus folgt

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

und somit

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

Die mechanische Spannung wird zu

$$T(x, t) = Y d_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

Einsetzen in Gl. (5b) ergibt

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Y d_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der vorgegebenen Form liefert

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

Beide Koeffizienten haben die Einheit der Permittivität, F/m.

Diese Ausdrücke beschreiben die harmonische partikuläre Lösung außerhalb der exakten Resonanz. Wenn $\cos(kb/2) = 0$ gilt, kann die Randbedingung bei einer angelegten Spannung ungleich null nicht mit einer endlichen harmonischen Amplitude erfüllt werden. Die Polstellen bringen daher zum Ausdruck, dass es im ungedämpften Modell bei Resonanz keine beschränkte Antwort im eingeschwungenen Zustand gibt.

(f)

In linearer Ordnung hat ein Elektrodenstreifen der Länge dx die Fläche $w dx$. Daher beträgt die Gesamtladung auf der unteren Elektrode

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

Das benötigte räumliche Integral ist

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

Mit dem Ergebnis aus Teil (e) folgt

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Y d_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Y d_p^2) \right].$$

Ausklammern von $\varepsilon_T b w / h$ ergibt

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T b w}{h} \left[1 + \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

Der Vergleich mit Gl. (6) liefert

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T}.$$

Mit der angegebenen elastischen Nachgiebigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}. \end{aligned}$$

Mit der gegebenen Länge lässt sich der Ausdruck für die Kapazität auch schreiben als

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

Zur Konsistenzprüfung gilt im quasistatischen Grenzfall $kb \rightarrow 0$

$$\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \rightarrow 1,$$

sodass $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$, wie für eine spannungsfreie Platte mit der Permittivität ε_T zu erwarten ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Neutrinomasse und Neutronenzerfall (Teil A); Schweben durch Licht (Teil B)

Teil A

Neutrinomasse und Neutronenzerfall

Ein freies Neutron der Masse m_n zerfällt im Laborsystem aus der Ruhe in drei nicht miteinander wechselwirkende Teilchen: ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino. Die Ruhemasse des Protons ist m_p , während angenommen wird, dass die Ruhemasse des Antineutrinos m_ν von null verschieden und viel kleiner als die Ruhemasse des Elektrons m_e ist. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wird mit c bezeichnet. Die gemessenen Massenwerte lauten:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

Im Folgenden beziehen sich alle Energien und Geschwindigkeiten auf das Laborsystem. Sei E die Gesamtenergie des beim Zerfall entstehenden Elektrons.

(a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert $E_{\max}$ von E und die Geschwindigkeit v_m des Antineutrinos für $E = E_{\max}$. Beide Antworten müssen durch die Ruhemassen der Teilchen und die Lichtgeschwindigkeit ausgedrückt werden. Berechnen Sie unter der Voraussetzung $m_\nu < 7.3 \text{ eV}/c^2$ die Werte von $E_{\max}$ und des Verhältnisses v_m/c auf 3 signifikante Stellen.

(4.0 Punkte)

Teil B

Schweben durch Licht

Eine transparente Glashalbkugel mit dem Radius R und der Masse m hat den Brechungsindex n . Im Medium außerhalb der Halbkugel ist der Brechungsindex gleich eins. Ein paralleles Bündel monochromatischen Laserlichts fällt gleichmäßig und senkrecht auf den mittleren Bereich ihrer ebenen Oberfläche, wie in Abbildung 3 dargestellt. Die Erdbeschleunigung $\vec{g}$ ist senkrecht nach unten gerichtet. Der Radius δ des kreisförmigen Querschnitts des Laserstrahls ist viel kleiner als R . Sowohl die Glashalbkugel als auch der Laserstrahl sind rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse.

Die Glashalbkugel absorbiert kein Laserlicht. Ihre Oberfläche ist mit einer dünnen Schicht aus transparentem Material beschichtet, sodass Reflexionen beim Eintritt des Lichts in die Glashalbkugel und beim Austritt aus ihr vernachlässigbar sind. Auch die optische Weglänge, die das Laserlicht beim Durchgang durch die reflexionsfreie Oberflächenschicht zurücklegt, ist vernachlässigbar.

(b) Bestimmen Sie unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $(\delta/R)^3$ oder höher die Laserleistung P , die erforderlich ist, um die Gewichtskraft der Glashalbkugel auszugleichen.

(4.0 Punkte)

Hinweis: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, wenn θ viel kleiner als eins ist.

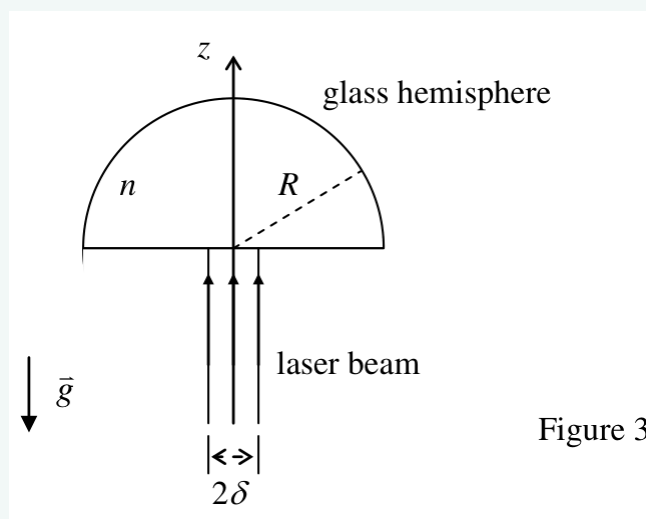


Figure 3

Abbildung 3

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **(a)** Die maximale Gesamtenergie des Elektrons ist

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2}{2m_n} c^2.$$

Bei diesem Endpunkt haben das Antineutrino und das Proton dieselbe Geschwindigkeit mit dem Betrag

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_v + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_v - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_v)^2 - m_e^2}.$$

Auf drei signifikante Stellen ergibt sich

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

- **(b)** Bis zur geforderten Ordnung gilt

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

Lösung

(a) Neutrinomasse und Neutronenzerfall

Der Betrag des Elektronenimpulses sei p_e . Aus der Energie- und Impulserhaltung folgt

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

Die invariante Masse des Proton-Antineutrino-Paars sei $\mathcal{M}$. Mit der Energie-Impuls-Beziehung des Elektrons,

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

Die Elektronenenergie ist somit am größten, wenn $\mathcal{M}$ am kleinsten ist.

Im Schwerpunktsystem des Paares haben das Proton und das Antineutrino entgegengesetzt gerichtete Impulse mit demselben Betrag q . Daher gilt

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

Gleichheit gilt für $q = 0$: Beide Teilchen ruhen in diesem Bezugssystem, sodass sie im Laborsystem **dieselbe Geschwindigkeit** haben. Diese Konfiguration ist kinematisch möglich, weil $m_n > m_p + m_v + m_e$.

Mit $M = m_p + m_v$ ist die Endpunktsenergie somit

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

Am Endpunkt hat das Paar die Energie $m_n c^2 - E_{\max}$ und den Impulsbetrag p_e . Der Betrag seiner gemeinsamen Geschwindigkeit, der zugleich der Geschwindigkeit des Antineutrinos entspricht, folgt aus $v = c^2 \mathbf{p} / E_{\text{gesamt}}$:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

Einsetzen ergibt

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

Für die numerische Auswertung ergibt der Grenzübergang $m_v \rightarrow 0^+$

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

Eine Erhöhung von $m_v c^2$ von null bis zu seiner oberen Schranke von 7.3 eV verringert diese Werte um weniger als 7.30 eV beziehungsweise 8.5×10^{-9} . Daher ergibt sich im gesamten zulässigen Massenbereich auf drei signifikante Stellen

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

Dabei ist $E_{\max}$ die **Gesamtenergie** des Elektrons. Das Antineutrino ist an diesem Endpunkt trotz seiner winzigen Masse langsam: Sein Impuls ist ebenfalls winzig, wie es erforderlich ist, damit es dieselbe Geschwindigkeit wie das Proton hat.

(b) Schweben durch Licht

Betrachten wir einen Lichtstrahl, der im Abstand r von der z -Achse in die Halbkugel eintritt, wobei $0 \leq r \leq \delta$. Er trifft senkrecht auf die ebene Oberfläche und verläuft daher im Glas weiterhin vertikal.

An der kugelförmigen Oberfläche sei θ der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der nach außen gerichteten Flächennormalen. Aus der Geometrie folgt

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

Ist θ' der Winkel des austretenden Strahls zu dieser Normalen, so liefert das snelliussche Brechungsgesetz

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

Bei Glas mit $n > 1$ wird der austretende Strahl zur Achse hin gebrochen. Sein Winkel zur nach oben gerichteten Vertikalen hat den Betrag

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

Da $r/R \leq \delta/R \ll 1$, ergibt eine Entwicklung bei festem n

$$\alpha = (n - 1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Sowohl vor dem Eintritt in die Halbkugel als auch nach dem Austritt aus ihr hat das Licht einen Impuls, der gleich seiner Energie geteilt durch c ist. Absorption und Reflexion sind vernachlässigbar, sodass ein Strahlenbündel mit der Leistung dP einen einfallenden vertikalen Impulsstrom von dP/c und einen austretenden vertikalen Impulsstrom von $(dP/c) \cos \alpha$ hat.

Aus der Impulserhaltung folgt für seine nach oben gerichtete Kraft auf die Halbkugel

$$dF_z = \frac{dP}{c} (1 - \cos \alpha).$$

Mit der angegebenen Kleinwinkelnäherung gilt

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2}.$$

Die transversalen Kraftkomponenten heben sich aufgrund der Rotationssymmetrie auf.

Die Intensität des einfallenden Lichts ist gleichmäßig:

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

Durch einen Kreisring mit dem Radius r und der Breite dr tritt daher die Leistung

$$dP = I 2\pi r dr.$$

Die Integration der vertikalen Kraft über den Strahlquerschnitt ergibt

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n - 1)^2}{c R^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P (n - 1)^2 \delta^2}{4c R^2}. \end{aligned}$$

Hierbei wird der Beitrag der Ordnung $(\delta/R)^2$ berücksichtigt; die nächste Korrektur zu $F_z/(P/c)$ ist von der Ordnung $(\delta/R)^4$.

Das Gleichsetzen dieser nach oben gerichteten Kraft mit der Gewichtskraft,

$$mg = \frac{P (n - 1)^2 \delta^2}{4c R^2},$$

liefert

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n - 1)^2 \delta^2}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.