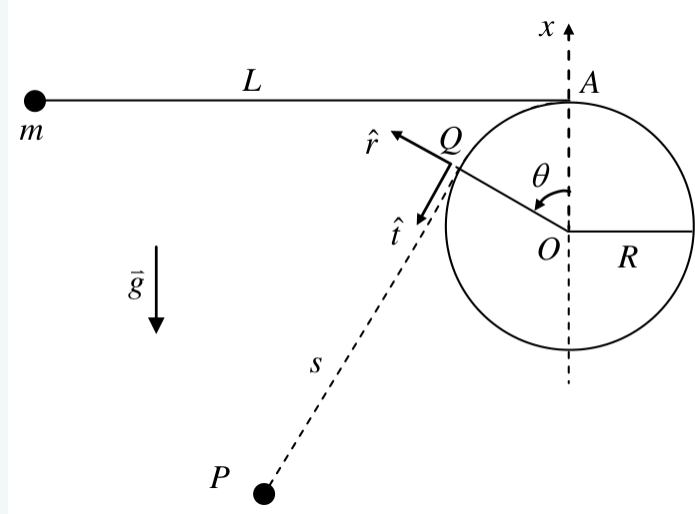


المسألة 1: تأرجح مع ثقل ساقط

يُنْبَت قضيبي أسطواناني صلب نصف قطره R أفقيًا فوق سطح الأرض. وتُعلّق كرة بندول كتلتها m من النقطة A الواقعة أعلى القضيب، بواسطة خيط مهمل الكتلة طوله L ($L > 2\pi R$)، كما هو موضح في الشكل 1a. تُرفع الكرة حتى تصبح في مستوى A ، ثم تُترك من السكون والخيط مشدود. أهمل أي استطالة للخيط. افترض أن كرة البندول يمكن معاملتها بوصفها كتلة نقطية، وأنها تتأرجح فقط في مستوى عمودي على محور القضيب. وبناءً على ذلك، يُشار إلى كرة البندول أيضًا باسم *الجسيم*. تسارع الجاذبية هو $\vec{g}$.



الشكل 1a

لتكن O مبدأ نظام الإحداثيات. عندما يكون الجسيم عند النقطة P ، يكون الخيط مماسًا للسطح الأسطواناني عند Q . يُرمز إلى طول القطعة المستقيمة QP بالرمز s . ويُرمز إلى متجه الوحدة المماسي ومتجه الوحدة الشعاعي عند Q بالرمزين $\hat{t}$ و $\hat{r}$ ، على الترتيب. تُعد الإزاحة الزاوية θ لنصف القطر OQ موجبة عندما تُقاس عكس اتجاه عقارب الساعة انطلاقًا من المحور الرأسي x الممتد على طول OA .

عندما $\theta = 0$ ، يكون الطول s مساويًا لـ L ، وتكون طاقة وضع الجاذبية U للجسيم صفرًا. وأثناء حركة الجسيم، يُرمز إلى معدل التغير اللحظي مع الزمن لكل من θ و s بالرمزين $\dot{\theta}$ و $\dot{s}$ ، على الترتيب.

ما لم يُذكر خلاف ذلك، تُقاس جميع السرعات القياسية والمتجهة بالنسبة إلى النقطة الثابتة O .

الجزء A

في الجزء A، يكون الخيط مشدودًا أثناء حركة الجسيم. بدلالة الكميات المعروفة أعلاه (أي $\hat{r}$ و s ، θ ، $\dot{\theta}$ ، $\dot{s}$ ، R ، L ، g ، $\hat{t}$)، أوجد:

(a) العلاقة بين $\dot{\theta}$ و $\dot{s}$. (0.5 نقطة)

(b) السرعة المتجهة $\vec{v}_Q$ للنقطة المتحركة Q بالنسبة إلى O . (0.5 نقطة)

(c) السرعة المتجهة $\vec{v}'$ للجسيم بالنسبة إلى النقطة المتحركة Q عندما يكون عند P . (0.7 نقطة)

(d) السرعة المتجهة $\vec{v}$ للجسيم بالنسبة إلى O عندما يكون عند P . (0.7 نقطة)

(e) مركبة تسارع الجسيم في اتجاه $\hat{t}$ بالنسبة إلى O عندما يكون عند P . (0.7 نقطة)

(f) طاقة وضع الجاذبية U للجسيم عندما يكون عند P . (0.5 نقطة)

(g) سرعة الجسيم v_m عند أدنى نقطة في مساره. (0.7 نقطة)

الجزء B

في الجزء B، تكون لنسبة L إلى R القيمة الآتية:

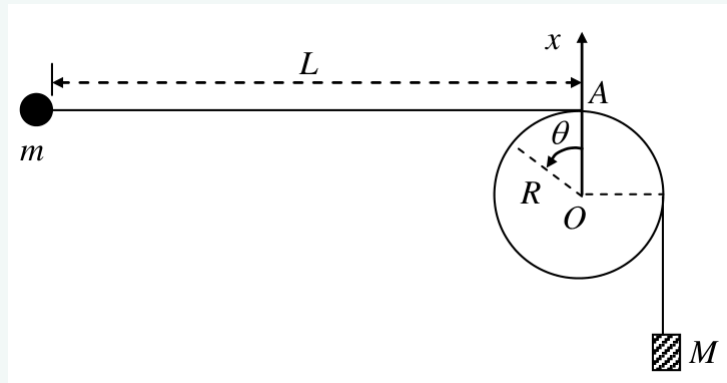
$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

(h) ما سرعة الجسيم v_s عندما يكون جزء الخيط الممتد من Q إلى P مستقيماً وفي أقصر طول له في آن واحد؟ (بدلالة g و R) (2.4 نقطة)

(i) ما سرعة الجسيم v_H عند أعلى نقطة H يصل إليها بعد تأرجحه إلى الجانب الآخر من القضيب؟ (بدلالة g و R) (1.9 نقطة)

الجزء C

في الجزء C، بدلاً من تعليق كرة البندول ذات الكتلة m من A ، تُوصَل بواسطة خيط يمر فوق أعلى القضيب بثقل أكبر كتلة، كتلته M ، كما هو موضح في الشكل 1b. ويمكن أيضاً معاملة الثقل بوصفه جسيماً.



الشكل 1b

في البداية، تُمسك الكرة ساكنة في مستوى A نفسه، بحيث يكون الخيط مشدوداً وله جزء أفقي طوله L ، بينما يتدلى الثقل أسفل O . ثم تُترك الكرة من السكون، ويبدأ الثقل بالسقوط. افترض أن الكرة تبقى في مستوى رأسي، وأنها تستطيع التأرجح متجاوزة الثقل الساقط دون أي إعاقة.

الاحتكاك الحركي بين الخيط وسطح القضيب مهمل. لكن يُفترض أن الاحتكاك السكوني كبير بما يكفي ليبقى الثقل ساكناً بمجرد أن يتوقف (أي عندما تصبح سرعته صفراً).

(j) افترض أن الثقل يتوقف بالفعل بعد سقوطه مسافة D ، وأن $(L - D) \gg R$. إذا استطاع الجسيم بعد ذلك أن يتأرجح حول القضيب حتى $\theta = 2\pi$ ، مع بقاء جزأي الخيط غير الملامسين للقضيب مستقيمين، فلا بد ألا تقل النسبة $\alpha = D/L$ عن قيمة حرجة α_c . بإهمال الحدود من رتبة R/L أو أعلى، أوجد تقديراً لـ α_c بدلالة M/m . (3.4 نقطة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a). $\dot{s} = -R\dot{\theta}$

• (b). $\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$

$$\vec{v}' = \dot{s} \hat{t} - s \dot{\theta} \hat{r}. \text{ (c) } \bullet$$

$$\vec{v} = -s \dot{\theta} \hat{r}. \text{ (d) } \bullet$$

$$a_{\hat{t}} = -s \dot{\theta}^2. \text{ (e) } \bullet$$

$$U = mg[R(\cos \theta - 1) - s \sin \theta]. \text{ (f) } \bullet$$

$$v_m = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}. \text{ (g) } \bullet$$

$$\theta_s = \frac{9\pi}{8}. \text{ عند } v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}, \text{ (h) } \bullet$$

$$v_H = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}. \text{ (i) } \bullet$$

$$\alpha \geq \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq \frac{3}{2M/m + 3}. \text{ (j) } \bullet$$

تكون وحدات عوامل السرعة $\sqrt{gR}$ هي m s^{-1} عندما يُعبّر عن g و R بوحدات النظام الدولي للوحدات.

الحل

لنأخذ $\hat{x}$ رأسياً نحو الأعلى، ولنعرف $\hat{y}$ أفقياً نحو اليسار. عندئذ تكون متجهات الوحدة الموضحة في الشكل 1a كما يأتي:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}, \quad \hat{t} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}.$$

وبالتالي،

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{t}, \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r},$$

ويكون متجه موضع الجسيم

$$\vec{OP} = R\hat{r} + s\hat{t}.$$

(a) طول الجزء الملف حول القضيب هو $R\theta$. ومن ثبات طول الخيط نحصل على

$$s + R\theta = L.$$

وبالاشتقاق،

$$\dot{s} = -R\dot{\theta}.$$

(b) بما أن $\vec{OQ} = R\hat{r}$ ، فإن

$$\vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) = R\dot{\theta} \hat{t}.$$

يرمز Q هنا إلى نقطة التماس الهندسية المتغيرة؛ وليس من الضروري أن تبقى النقطة نفسها على القضيب الساكن.

(c) إزاحة الجسيم بالنسبة إلى Q هي $s\hat{t}$. وباشتقاق هذا المنتج بالنسبة إلى محاور ثابتة نحصل على

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(s\hat{t}) = \dot{s} \hat{t} + s \frac{d\hat{t}}{dt}.$$

إن

$$\vec{v}' = \dot{s} \hat{t} - s \dot{\theta} \hat{r}.$$

(d) بإضافة السرعة المتجهة للنقطة Q ،

$$\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}' = (R\dot{\theta} + \dot{s})\hat{t} - s\dot{\theta} \hat{r}.$$

باستخدام نتيجة البند (a)، تنعدم المركبة في اتجاه $\hat{t}$:

$$\vec{v} = -s\dot{\theta}\hat{r}.$$

وعلى وجه الخصوص، أثناء التآرجح الأولي حيث $\dot{\theta} > 0$.

$$v = s\dot{\theta}.$$

(e) نشتق السرعة المتجهة:

$$\vec{a} = -(\dot{s}\dot{\theta} + s\ddot{\theta})\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}.$$

وعليه،

$$a_{\hat{t}} = -s\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{s}.$$

تشير الإشارة السالبة إلى أن التسارع يتجه نحو Q على امتداد الخيط المستقيم.

(f) من متجه الموضع، يكون الإحداثي الرأسي للجسيم

$$x = R \cos \theta - s \sin \theta.$$

في البداية $x = R$ ، حيث عُرِّفت طاقة الوضع بأنها تساوي صفراً. ومن ثم

$$U = mg(x - R) = mg[R(\cos \theta - 1) - s \sin \theta].$$

(g) يتجه الشد على امتداد $-\hat{t}$ ، بينما تكون السرعة المتجهة على امتداد $\hat{r}$ ، ولذلك لا يبذل الشد شغلاً. ومن حفظ الطاقة الميكانيكية نحصل على

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = 0,$$

أو

$$v^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta].$$

لتحديد أدنى نقطة، نشتق الارتفاع باستخدام $ds/d\theta = -R$:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta - s \cos \theta = -s \cos \theta.$$

يتناقص الارتفاع قبل $\theta = \pi/2$ ، ويزداد بعدها مباشرة. لذا تقع أدنى نقطة عند

$$\theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad s_m = L - \frac{\pi R}{2}, \quad x_m = -s_m.$$

مقدار الهبوط الرأسي منذ لحظة الإفلات هو $R + s_m$ ، مما يعطي

$$v_m = \sqrt{2g(R + s_m)} = \sqrt{2g \left[L + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) R \right]}.$$

(h) لنرمز إلى الشد بالرمز T . لقوة الجاذبية مركبة مقدارها $mg \sin \theta$ في اتجاه $\hat{t}$ ، ولذلك يعطينا قانون نيوتن الثاني ونتيجة البند (e)

$$mg \sin \theta - T = -m \frac{v^2}{s}.$$

وعليه،

$$T = m \left(\frac{v^2}{s} + g \sin \theta \right).$$

بالتعويض بتعبير الطاقة،

$$\frac{T}{mg} = \frac{2R(1 - \cos \theta)}{s} + 3 \sin \theta.$$

بينما تتحرك الكرة ويلتف الخيط حول القضيب، يتناقص $s = L - R\theta$. لا يستطيع الخيط أن يؤثر بشد سالب، لذا تنتهي هذه الحركة المفيدة عندما يعود T إلى الصفر لأول مرة. وفي تلك اللحظة يظل الخيط مستقيماً ويبلغ أقصر طول له أثناء التآرجح الأولي.

يكون الشد موجباً عندما $0 < \theta \leq \pi$. لنكتب أول زاوية ينعدم عندها بعد ذلك على الصورة

$$\theta_s = \pi + \delta.$$

يصبح الشرط $T = 0$

$$2R(1 + \cos \delta) - 3s_s \sin \delta = 0,$$

ومن ثم

$$\frac{s_s}{R} = \frac{2}{3} \frac{1 + \cos \delta}{\sin \delta} = \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

وبما أن $L = s_s + R\theta_s$ ، فإن

$$\frac{L}{R} = \pi + \delta + \frac{2}{3} \cot \frac{\delta}{2}.$$

بالمقارنة مع القيمة الدقيقة المعطاة لـ L/R ، نحصل على الجذر الأول المعني:

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{8}}, \quad \boxed{\theta_s = \frac{9\pi}{8}},$$

وكذلك

$$s_s = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} \approx 3.352R.$$

عند انعدام الشد،

$$v_s^2 = -gs_s \sin \theta_s = gs_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

باستخدام $\sin(2a) \cot a = 2 \cos^2 a$ ،

$$v_s^2 = \frac{4gR}{3} \cos^2 \frac{\pi}{16}.$$

إن

$$\boxed{v_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sqrt{gR} \approx 1.133 \sqrt{gR}}.$$

(i) عند اللحظة التي حُدَّت في البند (h)،

$$\hat{r}_s = -\cos \frac{\pi}{8} \hat{x} - \sin \frac{\pi}{8} \hat{y}.$$

بما أن $\vec{v}_s = -v_s \hat{r}_s$ ، فإن مركبتي السرعة نحو الأعلى وفي الاتجاه الأفقي هما

$$v_{x,s} = v_s \cos \frac{\pi}{8}, \quad v_{y,s} = v_s \sin \frac{\pi}{8}.$$

يرتخي الخيط، ويتبع الجسم مسار مقذوف. وتبقى سرعته الأفقية ثابتة، بينما تصبح سرعته نحو الأعلى صفراً بعد زمن

$$t_H = \frac{v_s}{g} \cos \frac{\pi}{8}.$$

وعند أعلى نقطة، تكون سرعته مساوية لسرعته الأفقية وحدها:

$$\boxed{v_H = v_s \sin \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{gR} \approx 0.4334 \sqrt{gR}}.$$

يمكن أيضًا التحقق هندسيًا من استمرار ارتخاء الخيط أثناء هذا الصعود. نُعرّف

$$k = \frac{s_s}{R}, \quad u = \frac{v_s}{\sqrt{gR}}, \quad c = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

إحداثيا المذوف $X = x/R$, $Y = y/R$ هما

$$X = -c + kb + uc\tau - \frac{1}{2}\tau^2, \quad Y = -b - kc + ub\tau, \quad 0 \leq \tau \leq uc.$$

لنقطة على هذا المسار، ليكن

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 - 1}, \quad \phi = 2\pi + \text{atan2}(Y, X).$$

طول الخيط اللازم لتشكيل قوس ملتف يتبعه جزء مستقيم مماس هو

$$\frac{\ell_{\text{req}}}{R} = \phi - \arctan \sigma + \sigma.$$

يُظهر التعويض والاشتقاق أن هذا الطول يتناقص طوال الصعود: إذ يبدأ من $L/R = 6.88585$ ، ويصل إلى 6.75065 عند H . وهكذا يبقى الخيط مرتخيًا حتى أعلى نقطة، كما يتطلب حساب حركة المذوف.

(j) بإهمال التصحيحات المحددة الناجمة عن نصف قطر القضيب، تكون مسافة الكرة عن نقطة التعليق الفعالة بعد توقف الثقل

$$\ell = L - D.$$

الأطوال الملتفة والفروق الرأسية المرتبطة بالقضيب هي من رتبة R ؛ ويبرر إهمالها الشرط $(L - D) \gg R$.

يفقد الثقل الساقط طاقة وضع جاذبية مقدارها MgD . والاحتكاك الحركي مهم، كما أن الطاقة الحركية للثقل تساوي صفرًا عندما يتوقف. وبعد ذلك، لا يبذل تماس الخيط الساكن شغلًا. لذا فإن الطاقة الميكانيكية المحفوظة للكرة، مقاسةً بالنسبة إلى مستواها الأفقي الابتدائي، تساوي MgD .

ارتفاعها عند الزاوية θ يساوي تقريبًا $-\ell \sin \theta$ ، ومن ثم

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \sin \theta = MgD.$$

بوضع $\mu = M/m$ ، نحصل على

$$v^2 = 2g(\mu D + \ell \sin \theta).$$

في الحركة الدائرية اللاحقة، يكون الشد

$$T = m \left(\frac{v^2}{\ell} + g \sin \theta \right) = mg \left(\frac{2\mu D}{\ell} + 3 \sin \theta \right).$$

الموضع الذي يفرض الشرط الأشد هو قمة المسار الدائري، عند $\theta = 3\pi/2$ ، حيث $\sin \theta = -1$. ويتطلب بقاء الخيط مستقيمًا أن يكون

$$T_{\text{top}} \geq 0,$$

أو

$$\frac{2\mu D}{\ell} \geq 3.$$

وبصورة مكافئة، يجب أن تحتفظ الكرة عند القمة بسرعة لا تقل عن $\sqrt{g\ell}$ ؛ ولذلك يجب ألا تقل طاقتها هناك عن

$$mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell = \frac{3}{2}mg\ell.$$

باستخدام $\ell = L - D$ و $\alpha = D/L$ ،

$$2\mu D \geq 3(L - D), \\ (2\mu + 3)\alpha \geq 3.$$

وبالتالي،

$$\alpha_c \simeq \frac{3}{2\mu + 3} = \frac{3}{2M/m + 3}, \quad \alpha \geq \alpha_c.$$

تمثل المساواة الحالة الحدية التي ينعدم فيها الشد عند القمة. ويُبقي الاحتكاك السكوني المفترض الثقل الأكبر كتلة ساكنة أثناء التآرجح اللاحق.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مرنان بلوري كهروضغطي تحت تأثير جهد متناوب

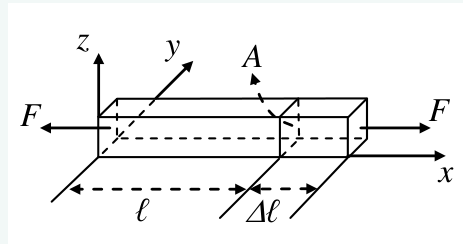
لنعتبر قضيباً منتظماً طوله في غياب الإجهاد ℓ ومساحة مقطعه العرضي A (الشكل 2a). يتغير طوله بمقدار $\Delta\ell$ عندما تؤثر على وجهي نهايته، عمودياً عليهما، قوتان متساويتان في المقدار F ومتعاكستان في الاتجاه. يُعرّف الإجهاد T على وجهي النهايتين بأنه F/A . ويُسمى التغير النسبي في طوله، أي $\Delta\ell/\ell$ ، الانفعال S للقضيب. وبدلالة الإجهاد والانفعال، يمكن التعبير عن قانون هوك كما يلي:

$$T = YS \quad \text{أو} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1)$$

حيث يُسمى Y معامل يونغ لمادة القضيب. لاحظ أن إجهاد الضغط T يقابل $F < 0$ ونقصاناً في الطول (أي $\Delta\ell < 0$). ومن ثم تكون قيمة هذا الإجهاد سالبة، ويرتبط بالضغط p بالعلاقة $T = -p$.

لقضيب منتظم كثافته ρ ، تُعطى سرعة انتشار الموجات الطولية (أي سرعة الصوت) على امتداد القضيب بالعلاقة

$$u = \sqrt{Y/\rho}. \quad (2)$$

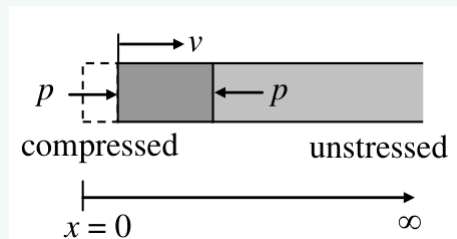


الشكل 2a

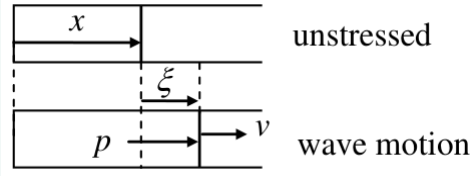
يمكن إهمال تأثير التخميد والتبدد عند الإجابة عن الأسئلة التالية.

الجزء A: الخواص الميكانيكية

قضيب منتظم نصف لانتهائي الطول، يمتد من $x = 0$ إلى ∞ (انظر الشكل 2b)، كثافته ρ . يكون القضيب في البداية ساكناً وغير مُجهّد. ثم يؤثر مكبس بضغط صغير ثابت p على وجهه الأيسر عند $x = 0$ لمدة قصيرة جداً Δt ، مما يؤدي إلى انتشار موجة ضغط بسرعة u نحو اليمين.



الشكل 2b



الشكل 2c

(a) إذا جعل المكبس الوجه الأيسر للقضيب يتحرك بسرعة ثابتة v (الشكل 2b)، فما الانفعال S والضغط p عند الوجه الأيسر خلال الفترة Δt ؟ يجب إعطاء الإجابات بدلالة ρ و u و v فقط. (1.6 درجة)

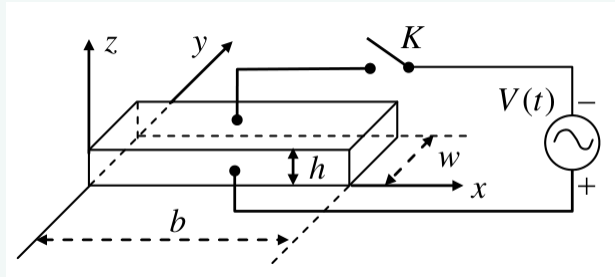
(b) لنعتبر موجة طولية تنتشر في اتجاه x في القضيب. ولقطع عرضي موضعه x عندما يكون القضيب غير مُجهَد (الشكل 2c)، تكن $\xi(x, t)$ إزاحته عند الزمن t ، ولنفترض أن

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \quad (3)$$

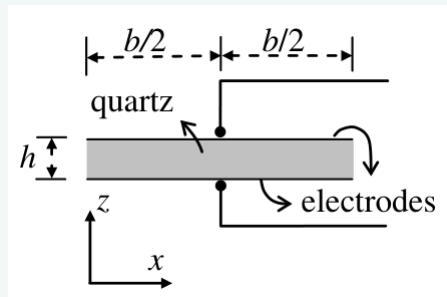
حيث ξ_0 و k ثابتان. أوجد السرعة $v(x, t)$ والانفعال $S(x, t)$ والضغط $p(x, t)$ الموافقة، بدلالة x و t . (2.4 درجة)

الجزء B: الخواص الكهروميكانيكية (بما فيها التأثير الكهروضغطي)

لنعتبر صفيحة من بلورة الكوارتز طولها b وسُمكها h وعرضها w (الشكل 2d). يمتد طولها وسُمكها في اتجاهي المحور x والمحور z ، على الترتيب. وتُشكّل أقطاب كهربائية بطبقتين معدنيتين رقيقتين على سطحها العلوي والسفلي. وتُلمح أسلاك توصيل كهربائية، تعمل أيضاً كدعامات تثبيت (الشكل 2e)، بمركزي القطبين، ويمكن افتراض سكون هذين المركزين عند حدوث اهتزازات طولية في اتجاه x .



الشكل 2d



الشكل 2e

تبلغ كثافة ρ بلورة الكوارتز المدروسة $2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ، ومعامل يونغ Y لها $7.87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. وطول الصفيحة b هو 1.00 cm ، أما عرضها w وارتفاعها h فيحققان $h \ll w$ و $w \ll b$. مع إبقاء المفتاح K مفتوحاً، نفترض أن الأنماط الوحيدة المثارة في صفيحة الكوارتز هي أنماط الاهتزاز الطولي بموجات واقفة في اتجاه x .

لموجة واقفة ترددها $f = \omega/2\pi$ ، يمكن كتابة الإزاحة $\xi(x, t)$ عند الزمن t لقطع عرضي من الصفيحة موضع اتزان x كما يلي:

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4a)$$

حيث ξ_0 ثابت موجب، والدالة المكانية $g(x)$ لها الصورة

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

تبلغ القيمة العظمى للدالة $g(x)$ واحداً، و $k = \omega/u$. تذكر أن مركزي القطبين ساكنان، وأن الوجهين الأيسر والأيمن للصفحة حُرَّان، ولذلك يجب أن ينعدم الإجهاد (أو الضغط) عليهما.

(c) أوجد قيمتي B_1 و B_2 في المعادلة (4b) لموجة طولية واقفة في صفحة الكوارتز. (1.2 درجة)

(d) ما أدنى ترددين يمكن عندهما إثارة موجات طولية واقفة في صفحة الكوارتز؟ (1.2 درجة)

التأثير الكهرضغطي خاصية مميزة لبلورة الكوارتز. فضغط البلورة أو تمديدها يولّد فرق جهد كهربائي عبرها، وبالعكس، يؤدي تطبيق فرق جهد خارجي عبر البلورة إلى تمديدها أو انكماشها تبعاً لقطبية الجهد. لذلك يمكن اقتران الاهتزازات الميكانيكية والكهربائية وإحداث الرنين بينها باستخدام بلورة كوارتز.

لأخذ التأثير الكهرضغطي في الحسبان، لتكن كثافتا الشحنة السطحية على القطبين العلوي والسفلي $+\sigma$ و $-\sigma$ ، على الترتيب، عندما تكون صفحة الكوارتز تحت تأثير مجال كهربائي E في اتجاه z . ولنرمز إلى انفعال الصفحة وإجهادها في اتجاه x بالرمزين S و T ، على الترتيب. عندئذ يمكن وصف التأثير الكهرضغطي لبلورة الكوارتز بمجموعة المعادلات التالية:

$$S = (1/Y)T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

حيث $1/Y = 1.27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ هو المطاوعة المرنة (أي مقلوب معامل يونغ) عند ثبات المجال الكهربائي، و $\varepsilon_T = 4.06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ هي السماحية الكهربائية عند ثبات الإجهاد، بينما $d_p = 2.25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ هو معامل الكهرضغطية.

لنغلق المفتاح K في الشكل 2d. يصبح الجهد المتناوب $V(t) = V_m \cos \omega t$ مطبقاً بين القطبين، وينشأ في صفحة الكوارتز مجال كهربائي منتظم $E(t) = V(t)/h$ في اتجاه z . وعندما تتحقق الحالة المستقرة، ينشأ في الصفحة اهتزاز طولوي على هيئة موجة واقفة بتردد زاوي ω في اتجاه x .

بما أن E منتظم، يظل الطول الموجي λ والتردد f لموجة طولية واقفة في الصفحة مرتبطين بالعلاقة $\lambda = u/f$ ، حيث تُعطى u بالمعادلة (2). لكن العلاقة $T = YS$ لم تعد صحيحة، كما تُبين المعادلة (5a)، مع أن تعريف الانفعال والإجهاد لم يتغيرا، ومع أن وجهي نهايتي الصفحة يظلان حُرَّين بإجهاد معدوم.

(e) بأخذ المعادلتين (5a) و (5b) في الحسبان، تكون كثافة الشحنة السطحية σ على القطب السفلي، بدلالة x و t ، على الصورة

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h}$$

حيث $k = \omega/u$. أوجد عبارتي D_1 و D_2 . (2.2 درجة)

(f) ترتبط الشحنة السطحية الكلية $Q(t)$ على القطب السفلي بالجهد $V(t)$ بالعلاقة

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t). \quad (6)$$

أوجد عبارة C_0 ، وعبارة α^2 وقيمتها العددية. (1.4 درجة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a)

$$S = -\frac{v}{u}, \quad p = \rho uv.$$

(b) •

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_0 \cos k(x - ut), \\ S(x, t) &= k\xi_0 \cos k(x - ut), \\ p(x, t) &= -\rho u^2 k\xi_0 \cos k(x - ut). \end{aligned}$$

(c) •

$$B_2 = 0, \quad B_1 = \pm 1.$$

تقابل الإشارة الكلية طوراً اعتباطياً للاهتزاز؛ ويمكن اختيار $B_1 = 1$.

(d) •

$$f_{\text{lowest}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 2.72 \times 10^5 \text{ Hz}, \quad f_{\text{next}} = \frac{3}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 8.17 \times 10^5 \text{ Hz}.$$

(e) •

$$D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.$$

(f) •

$$C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}, \quad \alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{d_p^2}{\varepsilon_T (1/Y)} \simeq 9.82 \times 10^{-3}.$$

هنا كمية بلا أبعاد. α^2

الحل

نستخدم التقريب أحادي البعد للانفعال الصغير المحدد في المسألة. بما أن x يحدد موضع مقطع عرضي في حالته غير المُجهدّة، فإن سرعته وانفعاله الطولي هما

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad S(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

في النموذج الميكانيكي البحت، $T = YS$ و $p = -T$ و $Y = \rho u^2$.

(a)

خلال الفترة Δt ، ينتقل الاضطراب مسافة $u\Delta t$. ولذلك، إلى الرتبة الأولى في التشوه الصغير، تكون الكتلة التي تبدأ الحركة بسرعة v هي

$$m = \rho A u \Delta t.$$

يساوي الدفع الخارجي المؤثر في القضيب كمية الحركة التي يكتسبها:

$$p A \Delta t = m v = \rho A u \Delta t v.$$

إذن

$$p = \rho u v.$$

الإجهاد ضاغط، ولذلك $T = -p$. ومن ثم يعطي قانون هوك

$$S = -\frac{p}{Y} = -\frac{\rho u v}{\rho u^2},$$

وبالتالي

$$S = -\frac{v}{u}.$$

يمكن أيضاً استنتاج الإشارة هندسياً: فالجزء الذي كان طوله قبل الإجهاد $u\Delta t$ يقصر بمقدار إزاحة المكبس $v\Delta t$.

(b)

باشتقاق الإزاحة بالنسبة إلى الزمن نحصل على سرعة المادة:

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{-ku\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

وباشتقاقها بالنسبة إلى إحداثي الحالة غير المُجهدة نحصل على الانفعال:

$$S(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_0 \sin k(x - ut)] = \boxed{k\xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

وأخيراً،

$$p(x, t) = -YS(x, t),$$

ومن ثم

$$\boxed{p(x, t) = -\rho u^2 k \xi_0 \cos k(x - ut)}.$$

وبوجه خاص، $p(x, t) = \rho u v(x, t)$ ، وهو ما يتفق مع الجزء (a) لموجة تنتشر نحو اليمين.

(c)

نقطة المنتصف ساكنة، ومن ثم

$$\xi(b/2, t) = 0 \implies g(b/2) = 0.$$

بالتعويض بـ $x = b/2$ في المعادلة (4b) نحصل على

$$\boxed{B_2 = 0}.$$

وبالتالي،

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

في النموذج الميكانيكي، ينعدم الإجهاد عند النهايتين الحرتين، ومن ثم ينعدم الانفعال عندهما. ولذلك،

$$g'(0) = g'(b) = 0.$$

وبما أن

$$g'(x) = B_1 k \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right),$$

فإن وجود نمط اهتزازي غير صفري يتطلب

$$\cos \frac{kb}{2} = 0.$$

عند هذه القيم المسموح بها لـ k ، تبلغ دالة الجيب كلاً من $+1$ و -1 داخل الصفيحة. ومن ثم فإن شرط التطبيع $\max g(x) = 1$ يقتضي

$$\boxed{|B_1| = 1}.$$

كلتا الإشارتين ممكنة. وتغيير B_1 إلى $-B_1$ يكافئ إزاحة طور الاهتزاز بمقدار π ؛ ويمكننا اختيار $B_1 = 1$.

(d)

يعطي شرط النهايتين الحرتين الذي حصلنا عليه أعلاه

$$\frac{kb}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

أو

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}.$$

باستخدام $\omega = uk$ و $f = \omega/(2\pi)$

$$f_n = \frac{(2n+1)u}{2b}.$$

إذن الأنماط المسموح بها هي التوافقيات الفردية. ويقابل أدنى ترددين القيمتين $n = 0$ و $n = 1$.
سرعة الصوت هي

$$u = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5449.6 \text{ m s}^{-1}.$$

مع $b = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$

$$f_{\text{lowest}} = \frac{5449.6}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{2.72 \times 10^5 \text{ Hz}},$$

و

$$f_{\text{next}} = \frac{3(5449.6)}{2(1.00 \times 10^{-2})} = \boxed{8.17 \times 10^5 \text{ Hz}}.$$

(e)

بأخذ التأثير الكهروضغطي في الحسبان، تعطي المعادلة (5a)

$$T = Y(S - d_p E) = Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - d_p E \right).$$

قانون نيوتن الثاني لعنصر من الصفيحة هو

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

وبما أن E منتظم مكانياً،

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

للاستجابة التوافقية عند تردد الإثارة، نكتب

$$\xi(x, t) = H(x)E(t).$$

بما أن $\ddot{E} = -\omega^2 E$ ، تحقق الدالة المكانية

$$H'' + k^2 H = 0, \quad k = \frac{\omega}{u}.$$

يتطلب ثبات نقطة المنتصف أن يكون $H(b/2) = 0$ ، ومن ثم

$$H(x) = C \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right).$$

ولذلك يكون الانفعال

$$S(x, t) = Ck \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) E(t).$$

أصبح شرط النهايتين الحرتين الآن $T = 0$ ، مما يعني

$$S(0, t) = S(b, t) = d_p E(t).$$

ينتج عن ذلك أن

$$Ck \cos \frac{kb}{2} = d_p,$$

وبالتالي

$$S(x, t) = d_p \frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} E(t).$$

يصبح الإجهاد

$$T(x, t) = Y d_p \left[\frac{\cos k(x - b/2)}{\cos(kb/2)} - 1 \right] E(t).$$

بالتعويض في المعادلة (5b) نحصل على

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= d_p T(x, t) + \varepsilon_T E(t) \\ &= \left[\frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T - Y d_p^2 \right] \frac{V(t)}{h}. \end{aligned}$$

بالمقارنة مع الصورة المعطاة،

$$\boxed{D_1 = \frac{Y d_p^2}{\cos(kb/2)}, \quad D_2 = \varepsilon_T - Y d_p^2.}$$

لكلا المعاملين وحدة السماحية الكهربائية، F/m.

تصف هذه العبارات الحل الخاص التوافقي بعيداً عن الرنين التام. عندما $\cos(kb/2) = 0$ ، لا يمكن تحقيق الشرط الحدّي بسعة توافقية منتهية تحت تأثير جهد مطبّق غير صفري. ولذلك تعبّر الأقطاب عن عدم وجود استجابة مستقرة محدودة عند الرنين في النموذج غير المخمد.

(f)

إلى الرتبة الخطية، تكون مساحة شريط من القطب طوله dx هي $w dx$. ومن ثم تكون الشحنة الكلية على القطب السفلي

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx.$$

التكامل المكاني المطلوب هو

$$\int_0^b \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) dx = \frac{2}{k} \sin \frac{kb}{2}.$$

باستخدام نتيجة الجزء (e)،

$$Q(t) = \frac{wV(t)}{h} \left[\frac{2Y d_p^2}{k} \tan \frac{kb}{2} + b(\varepsilon_T - Y d_p^2) \right].$$

بإخراج $\varepsilon_T b w / h$ عاملاً مشتركاً،

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_T b w}{h} \left[1 + \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] V(t).$$

بالمقارنة مع المعادلة (6) نحصل على

$$\boxed{C_0 = \frac{\varepsilon_T b w}{h}}, \quad \boxed{\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T}}.$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{d_p^2}{\varepsilon_T(1/Y)} \\ &= \frac{(2.25 \times 10^{-12})^2}{(4.06 \times 10^{-11})(1.27 \times 10^{-11})} \\ &= 0.00981828 \simeq \boxed{9.82 \times 10^{-3}}.\end{aligned}$$

باستخدام الطول المعطى، يمكن أيضًا كتابة عبارة السعة الكهربائية كما يلي:

$$C_0 = (4.06 \times 10^{-13} \text{ F}) \frac{w}{h}.$$

للتحقق من الاتساق، في الحد شبه الساكن $kb \rightarrow 0$

$$\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} \rightarrow 1,$$

ومن ثم $Q(t) \rightarrow C_0 V(t)$ ، كما هو متوقع لصفيحة خالية من الإجهاد سماحياتها الكهربائية ε_T .

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: كتلة النيوتريينو واضمحلال النيوترون (الجزء A)؛ الرفع بالضوء (الجزء B)

الجزء A

كتلة النيوتريينو واضمحلال النيوترون

يضمحل نيوترون حر كتلته m_n ، وهو ساكن في الإطار المرجعي المختبري، إلى ثلاثة جسيمات لا تتفاعل فيما بينها: بروتون، وإلكترون، ونيوتريينو مضاد. كتلة سكون البروتون هي m_p ، بينما يُفترض أن كتلة سكون النيوتريينو المضاد $m_{\bar{\nu}}$ غير صفيرية وأصغر بكثير من كتلة سكون الإلكترون m_e . نرمز إلى سرعة الضوء في الفراغ بالرمز c . القيم المقيسة للكتل هي كما يلي:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2, \quad m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2, \quad m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

فيما يلي، تُنسب جميع الطاقات والسرعات إلى الإطار المختبري. لتكن E الطاقة الكلية للإلكترون الناتج عن الاضمحلال.

(a) أوجد أكبر قيمة ممكنة $E_{\max}$ للطاقة E ، وسرعة النيوتريينو المضاد v_m عندما تكون $E = E_{\max}$. يجب التعبير عن كلتا الإجابتين بدلالة كتل سكون الجسيمات وسرعة الضوء. علمًا بأن $m_{\bar{\nu}} < 7.3 \text{ eV}/c^2$ ، احسب $E_{\max}$ والنسبة v_m/c إلى 3 أرقام معنوية.

(4.0 نقاط)

الجزء B

الرفع بالضوء

نصف كرة زجاجي شفاف نصف قطره R وكتلته m ، ومعامل انكساره n . معامل انكسار الوسط خارج نصف الكرة يساوي واحدًا. تسقط حزمة متوازنة من ضوء ليزر أحادي اللون بصورة منتظمة وعمودية على الجزء المركزي من سطحه المستوي، كما هو موضح في الشكل 3. يتجه تسارع الجاذبية $\vec{g}$ رأسياً إلى الأسفل. نصف قطر المقطع العرضي الدائري لحزمة الليزر δ أصغر بكثير من R . ولكل من نصف الكرة الزجاجي وحزمة الليزر تناظر محوري حول المحور z .

لا يمتص نصف الكرة الزجاجي أي ضوء من الليزر. وقد طُلي سطحه بطبقة رقيقة من مادة شفافة بحيث تكون الانعكاسات مهمة عند دخول الضوء إلى نصف الكرة الزجاجي وخروجه منه. كما أن المسار البصري الذي يقطعه ضوء الليزر أثناء عبوره الطبقة السطحية غير العاكسة مهملاً أيضًا.

(b) بإهمال الحدود من الرتبة $(\delta/R)^3$ أو أعلى، أوجد قدرة الليزر P اللازمة لموازنة وزن نصف الكرة الزجاجي.

(4.0 نقاط)

تلميح: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ عندما تكون θ أصغر بكثير من واحد.

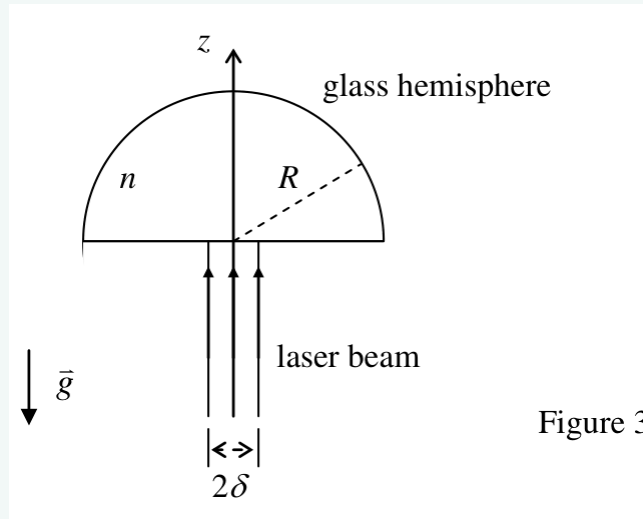


Figure 3

الشكل 3

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) الطاقة الكلية العظمى للإلكترون هي

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2}{2m_n} c^2.$$

عند هذه القيمة الحدية، تكون للنيوترينو المضاد والبروتون السرعة المتجهة نفسها، ومقاديرها

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (m_p + m_v + m_e)^2][m_n^2 - (m_p + m_v - m_e)^2]}}{m_n^2 + (m_p + m_v)^2 - m_e^2}.$$

إلى ثلاثة أرقام معنوية،

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} = 1.27 \times 10^{-3}.$$

• (b) إلى الرتبة المطلوبة،

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$

الحل

(a) كتلة النيوترينو وضمحلالات النيوترين

ليكن مقدار زخم الإلكترون p_e . يعطي حفظ الطاقة والزخم

$$E_p + E_v = m_n c^2 - E, \quad \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_e.$$

نرمز إلى الكتلة اللامتغيرة لزوج البروتون والنيوترينو المضاد بالرمز $\mathcal{M}$. باستخدام علاقة الطاقة والزخم للإلكترون،

$$p_e^2 c^2 = E^2 - m_e^2 c^4,$$

نحصل على

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 c^4 &= (E_p + E_v)^2 - c^2 |\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_v|^2 \\ &= (m_n c^2 - E)^2 - p_e^2 c^2 \\ &= (m_n^2 + m_e^2) c^4 - 2m_n c^2 E. \end{aligned}$$

وعليه،

$$E = \frac{m_n^2 + m_e^2 - \mathcal{M}^2}{2m_n} c^2.$$

إن تكون طاقة الإلكترون عظمى عندما تكون $\mathcal{M}$ صغرى.

في إطار مركز الزخم للزوج، يكون زخما البروتون والنيوتريو المضاد متساويين في المقدار q ومتعاكسين في الاتجاه. ومن ثم

$$\mathcal{M} c^2 = \sqrt{m_p^2 c^4 + q^2 c^2} + \sqrt{m_v^2 c^4 + q^2 c^2} \geq (m_p + m_v) c^2.$$

تتحقق المساواة عندما يكون $q = 0$: إذ يكون كلا الجسيمين ساكناً في هذا الإطار، ولذلك تكون لهما السرعة المتجهة نفسها في الإطار المختبري. وهذه الحالة مسموحة حركياً لأن $m_n > m_p + m_v + m_e$.

بكتابة $M = m_p + m_v$ ، تكون الطاقة عند القيمة الحدية إذن

$$E_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - M^2}{2m_n} c^2.$$

عند القيمة الحدية، تكون طاقة الزوج $m_n c^2 - E_{\max}$ ومقدار زخمه p_e . ويُستنتج مقدار السرعة المشتركة للجسيمين، وهو سرعة النيوتريو المضاد، من $v = c^2 p / E_{\text{الكلية}}$:

$$\frac{v_m}{c} = \frac{p_e c}{m_n c^2 - E_{\max}} = \frac{\sqrt{E_{\max}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{\max}}.$$

بالتعويض نحصل على

$$v_m = c \frac{\sqrt{[m_n^2 - (M + m_e)^2][m_n^2 - (M - m_e)^2]}}{m_n^2 + M^2 - m_e^2}, \quad M = m_p + m_v.$$

للحساب العددي، تعطينا النهاية $m_v \rightarrow 0^+$

$$E_{\max} \simeq 1.29256882 \text{ MeV}, \quad \frac{v_m}{c} \simeq 1.26538356 \times 10^{-3}.$$

تؤدي زيادة $m_v c^2$ من الصفر إلى حده الأعلى البالغ 7.3 eV إلى نقصان هاتين القيمتين بأقل من 7.30 eV و 8.5×10^{-9} ، على الترتيب. ومن ثم فإن مجال الكتلة المسموح به بأكمله يعطي، إلى ثلاثة أرقام معنوية،

$$E_{\max} = 1.29 \text{ MeV}, \quad v_m/c = 1.27 \times 10^{-3}.$$

هنا تمثل $E_{\max}$ الطاقة الكلية للإلكترون. ويكون النيوتريو المضاد بطيئاً عند هذه القيمة الحدية رغم ضالة كتلته: فزخمه ضئيل أيضاً، كما يلزم لكي تكون له سرعة البروتون المتجهة نفسها.

(b) الرفع بالضوء

لننظر في شعاع يدخل نصف الكرة على مسافة r من المحور z ، حيث $0 \leq r \leq \delta$. يدخل الشعاع السطح المستوي عمودياً، ولذلك يواصل سيره رأسياً داخل الزجاج.

عند السطح الكروي، لتكن θ الزاوية بين الشعاع الساقط والعمود على السطح المتجه إلى الخارج. من الهندسة نجد

$$\sin \theta = \frac{r}{R}.$$

إذا كانت θ' زاوية الشعاع الخارج بالنسبة إلى ذلك العمود، فإن قانون سنيل يعطي

$$\sin \theta' = n \sin \theta = n \frac{r}{R}.$$

للزجاج الذي يحقق $n > 1$ ، ينحرف الشعاع الخارج نحو المحور. ويكون مقدار زاويته مع الاتجاه الرأسى إلى الأعلى

$$\alpha = \theta' - \theta.$$

وبما أن $1 \gg \delta/R \leq r/R$ ، فإن التوسع مع تثبيت n يعطي

$$\alpha = (n - 1) \frac{r}{R} + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

قبل دخول الضوء إلى نصف الكرة وبعد خروجه منه، يكون زخمه مساوياً لطاقته مقسومة على c . والامتصاص والانعكاس مهملان، لذا فإن حزمة أشعة تحمل قدرة dP يكون لها تدفق زخم رأسى وارد مقداره dP/c ، وتدفق زخم رأسى صادر مقداره $(dP/c) \cos \alpha$.

من حفظ الزخم، تكون القوة التي تؤثر بها الحزمة إلى الأعلى على نصف الكرة

$$dF_z = \frac{dP}{c} (1 - \cos \alpha).$$

باستخدام تقريب الزاوية الصغيرة المعطى،

$$1 - \cos \alpha \simeq \frac{\alpha^2}{2} \simeq \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2}.$$

تتلاشى مركبات القوة المستعرضة بفعل التناظر المحوري.

شدة الضوء الساقط منتظمة:

$$I = \frac{P}{\pi \delta^2}.$$

لذلك تحمل حلقة نصف قطرها r وعرضها dr قدرة

$$dP = I 2\pi r dr.$$

بتكامل القوة الرأسية على امتداد الحزمة،

$$\begin{aligned} F_z &\simeq \int_0^\delta \frac{I 2\pi r dr}{c} \frac{(n - 1)^2 r^2}{2R^2} \\ &= \frac{\pi I (n - 1)^2}{c R^2} \int_0^\delta r^3 dr \\ &= \frac{P (n - 1)^2 \delta^2}{4c R^2}. \end{aligned}$$

يحتفظ هذا بالمساهمة من الرتبة $(\delta/R)^2$ ؛ أما التصحيح التالي للنسبة $F_z/(P/c)$ فمن الرتبة $(\delta/R)^4$.

بموازنة هذه القوة المتجهة إلى الأعلى مع الوزن،

$$mg = \frac{P (n - 1)^2 \delta^2}{4c R^2},$$

نحصل على

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n - 1)^2 \delta^2}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.