

# IPhO 2002

理论题与解答 · 印度尼西亚巴厘岛 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iph/2002/

## 题目 1: 探地雷达

探地雷达 (GPR) 通过向地下发射电磁波并接收地下物体反射的电磁波, 来探测和定位埋藏在地表附近的物体。天线和探测器直接放置在地面上, 且位于同一点。

沿  $z$  方向传播、角频率为  $\omega$  的线偏振电磁平面波, 其电场可表示为:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

其中,  $E_0$  为常量,  $\alpha$  为衰减系数,  $\beta$  为波数, 后两者分别表示为

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

其中,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ , 和  $\sigma$  分别表示磁导率、介电常数和电导率。

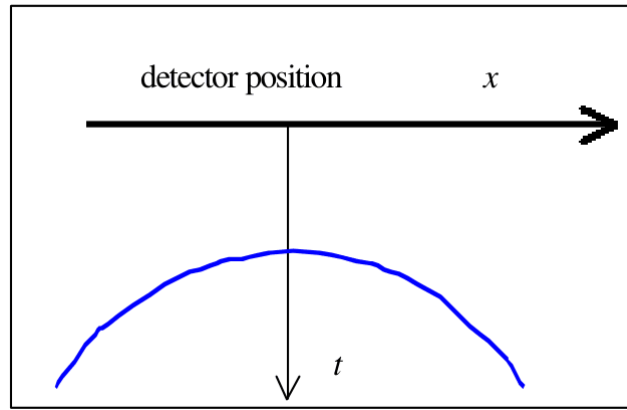
当到达物体的雷达信号振幅降至其初始值的  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) 以下时, 信号便无法被探测到。通常使用频率可调的电磁波 (10 MHz – 1000 MHz), 以便调节探测范围和分辨率。

探地雷达的性能取决于其分辨率。分辨率由能够分辨的两个相邻反射体之间的最小间距给出。此最小间距应使两束反射波到达探测器时产生至少  $180^\circ$  的相位差。

**问题:**

(已知:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m 和  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m)

1. 假设地下介质为非磁性介质 ( $\mu = \mu_0$ ), 且满足条件  $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2 \ll 1$ 。利用式 (1) 和式 (2), 推导传播速度  $v$  用  $\mu$  和  $\varepsilon$  表示的表达式 [1.0 分]。
2. 地下介质的电导率为 1.0 mS/m, 介电常数为  $9\varepsilon_0$ , 且满足条件  $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2 \ll 1$ 。求埋藏在其中的物体能够被探测到的最大深度 ( $S = \text{ohm}^{-1}$ ; 取  $\mu = \mu_0$ )。[2.0 分]
3. 考虑两根平行的导电棒, 水平埋藏在地下, 埋深为 4 米。已知地下介质的电导率为 1.0 mS/m, 介电常数为  $9\varepsilon_0$ 。假设探地雷达在大致位于其中一根导电棒正上方的位置进行测量, 并使用点探测器。求获得 50 cm 横向分辨率所需的最低频率 [3.5 分]。
4. 为确定埋藏在同一地下介质中的一根导电棒的深度  $d$ , 考虑沿垂直于导电棒的直线进行测量。测量结果如下图所示:



传播时间  $t$  随探测器位置  $x$  变化的曲线,  $t_{\min} = 100 \text{ ns}$ 。

推导  $t$  关于  $x$  的函数, 并确定  $d$  [3.5 分]。

题目译自官方英文原文。

## 答案

1. 在题设的低损耗极限下,

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

2. 最大探测深度为

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. 当导电棒的埋深为  $h = 4 \text{ m}$ 、横向间距为  $s = 0.50 \text{ m}$  时,

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4(\sqrt{h^2 + s^2} - h)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. 取导电棒正上方为  $x = 0$ , 则

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m}.$$

## 解答

### 1. 传播速度

相位恒定的点满足

$$\omega t - \beta z = \text{常量}.$$

求导可得相速度:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

定义无量纲小参数

$$q = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

利用二项式展开,

$$\sqrt{1+q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

因此, 由式 (2) 得

$$\beta = \omega \left[ \frac{\mu\varepsilon}{2} \left( 2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left( 1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

保留首项, 得

$$\boxed{v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}.$$

对于非磁性地下介质,  $\mu = \mu_0$ 。在这一阶近似下,  $\beta$  与  $\omega$  成正比, 因此色散可以忽略, 群速度也等于此值。

## 2. 最大探测深度

对于衰减系数, 在同一展开式中保留最低阶非零项:

$$\alpha \simeq \omega \left[ \frac{\mu\varepsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

因此, 在这一阶近似下, 衰减系数与频率无关。

对于位于天线正下方、深度为  $D$  的物体, 由式 (1) 可得入射波的振幅比

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

题目规定的是到达物体的信号的阈值, 因此这一条件中所涉及的传播距离为  $D$ 。在极限深度处,

$$e^{-\alpha D_{\text{max}}} = \frac{1}{e},$$

因而

$$D_{\text{max}} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

代入

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

得到

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

因此,

$$\boxed{D_{\text{max}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.}$$

## 3. 获得 50 cm 横向分辨率所需的最低频率

在垂直于导电棒的竖直平面内分析。设两根导电棒的共同埋深为  $h$ , 横向间距为  $s$ , 并取天线和探测器的位置在第一根导电棒的正上方。

到两根导电棒的单程距离分别为

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

由于发射器和探测器位于同一点，两个反射信号的传播距离分别为  $2r_1$  和  $2r_2$ 。因此，它们的波程差为

$$\Delta L = 2 \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

将两根导电棒视为等效的反射体，它们共同的反射相位在求相位差时抵消。探测器处的相位差为

$$\Delta\phi = \beta\Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

题目给定的分辨判据为  $\Delta\phi \geq \pi$ 。取等号时得到最低频率：

$$f_{\min} = \frac{v}{4 \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}.$$

该地下介质中的波速为

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\epsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

对于  $h = 4 \text{ m}$  和  $s = 0.50 \text{ m}$ ,

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

于是，

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

取合理的精度，得

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

小间距近似给出相同的舍入结果：

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

所需频率位于题目给定的 10–1000 MHz 范围内。此外，在计算得到的频率下，

$$\left( \frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \epsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

因此低损耗近似是自洽的。两根导电棒也都位于第 2 问求得的探测范围之内。

#### 4. 传播时间曲线与导电棒的埋深

选取埋藏的导电棒正上方的水平坐标为  $x = 0$ 。在均匀地下介质中，从天线到导电棒的单程距离为

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

测得的传播时间包括去程和回程：

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

在  $x = 0$  处路径最短，因而

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

所以,

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

于是,

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

将最短传播时间代入曲线表达式, 得

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5.0 \text{ m}}\right)^2}.$$

这是双曲线

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

对应于正时间的一支。它关于  $x = 0$  对称, 在导电棒正上方取得最短传播时间 100 ns, 并随  $|x|$  的增大而增大。当  $|x| \gg d$  时,

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

由于图中的时间轴指向下方, 传播时间越长, 图上的位置就越低, 如图所示。

解答已与官方解答核对。

## 题目 2: 电信号的感知

一些海洋动物能够探测到一定距离外的其他生物, 这是因为这些生物在呼吸过程或其他涉及肌肉收缩的过程中会产生电流。一些捕食者利用这种电信号来确定猎物的位置, 即使猎物埋在沙中也能如此。

猎物产生电流以及捕食者探测该电流的物理机制, 可以用图 II-1 所示的模型来描述。猎物产生的电流在其体内两个分别处于正电势和负电势的球体之间流动。两个球体的球心间距为  $l_s$ , 每个球体的半径均为  $r_s$ , 且远小于  $l_s$ 。海水的电阻率为  $\rho$ 。假设猎物身体的电阻率与周围海水的电阻率相同, 这意味着可以忽略图中围绕猎物的边界。

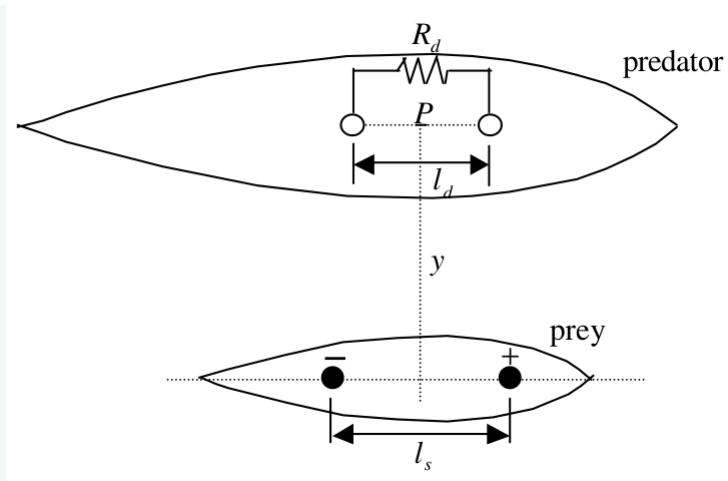


图 11-1. 描述捕食者探测来自猎物的电功率的模型。

为了描述捕食者对来自猎物的电功率的探测，同样将探测器建模为捕食者身体上与周围海水接触的两个球体，其排列方向与猎物体内的两个球体平行。这两个球体的间距为  $l_d$ ，每个球体的半径均为  $r_d$ ，且远小于  $l_d$ 。在此情形下，探测器的中心位于电流源正上方、距其  $y$  处，两个球体的连线与电场平行，如图 11-1 所示。 $l_s$  和  $l_d$  也都远小于  $y$ 。假设沿这两个球体连线的电场强度恒定。因此，探测器构成了一个连接猎物、周围海水和捕食者的闭合电路系统，如图 11-2 所示。

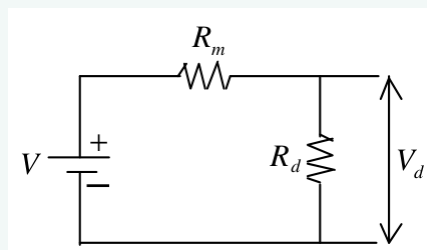


图 11-2. 由进行感知的捕食者、猎物和周围海水组成的等效闭合电路系统。

图中， $V$  是由猎物产生的电场在探测器两球体之间形成的电势差， $R_m$  是周围海水造成的内阻。此外， $V_d$  和  $R_d$  分别为探测球体之间的电势差和捕食者体内探测元件的电阻。

问题：

1. 求无限介质中点电流源  $I_s$  在距其  $r$  处产生的电流密度矢量  $\vec{j}$ （单位面积上的电流）。[1.5 分]
2. 根据定律  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ ，对于在猎物体内部两个球体之间流动的给定电流  $I_s$ ，求探测球体中点（P 点）处的电场强度  $\vec{E}_p$  [2.0 分]。
3. 对于同一电流  $I_s$ ，求猎物体内部两个源球体之间的电势差（ $V_s$ ）[1.5 分]。求两个源球体之间的电阻（ $R_s$ ）[0.5 分]以及电流源产生的功率（ $P_s$ ）[0.5 分]。
4. 求图 11-2 中的  $R_m$  [0.5 分]、 $V_d$  [1.0 分]，并计算从电流源传递至探测器的功率（ $P_d$ ）[0.5 分]。
5. 求使探测功率最大的  $R_d$  最优值 [1.5 分]，并求出该最大功率 [0.5 分]。

题目译自官方英文原文。

## 答案

令  $\hat{\mathbf{x}}$  从猎物的负电势球体指向正电势球体。下文中的电压均取正的大小。结果在以下题设假设下保留主导项：

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y.$$

题目未提供参数的具体数值，因此答案均以符号表示。

1. 取  $\hat{\mathbf{r}}$  的方向为背离点电流源的方向，

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

2. 电场从正电势源球体一侧指向负电势源球体一侧：

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

3. 电流源的电压、电阻和功率为

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. 海水电阻和探测器的开路电压为

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

因此，

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. 当

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

时，探测功率达到最大。其值为

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

## 解答

### 1. 点电流源的电流密度

在均匀、各向同性的无限介质中，球对称性要求电流密度沿径向，并且在以电流源为球心的球面上各处大小相同。

由电流守恒可得

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

因此，

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

对于正电流源，电流向外流出；吸收相同电流的电流汇则具有相反的符号。电流密度的 SI 单位为  $\text{A m}^{-2}$ 。

## 2. P 点处的电场

将猎物两个球体的中点置于原点。正电势球体位于  $x = l_s/2$ ，负电势球体位于  $x = -l_s/2$ ，P 点位于  $(0, y)$ 。

由于球体的大小相对于它们的间距以及它们到 P 点的距离都很小，可将其替换为点电流源  $+I_s$  和点电流汇  $-I_s$ 。它们到 P 点的距离相同，均为

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

根据叠加原理，

$$\begin{aligned} \vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[ \left( -\frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) - \left( \frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

竖直分量相互抵消，而水平分量相加。

利用欧姆定律的微分形式  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ ,

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi(y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}}.$$

在点电流源近似下，该表达式是精确的。当  $l_s \ll y$  时，

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

因此，P 点位于电流偶极子的中垂线上，该处电场按  $y^{-3}$  衰减。

## 3. 电流源的电压、电阻和功率

对于单个点电流源，径向电场为

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

取无穷远处的电势为零，

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

电流为  $I_s$  的电流汇产生的电势为此电势的相反数。

在任一源球体处，其自身对表面电势的贡献大小为

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

另一球体的贡献为  $\rho I_s/(4\pi l_s)$  量级，仅为自身贡献的  $r_s/l_s$ ，在主导阶近似中可忽略。因此

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

于是电势差为

$$V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}.$$

为完整起见，若保留两个单极子相互产生的电势，则有

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left( \frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right),$$

其中第二项在题设假设下可以忽略。

由欧姆定律可得两个源球体之间的等效电阻：

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

猎物提供的电功率为

$$P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

#### 4. 海水电阻、探测器电压和探测功率

流经探测器的电流从一个探测球体进入周围海水，并从另一个球体流出海水。将第 3 部分的结果应用于半径为  $r_d$ 、间距为  $l_d$  的球体，即可得到这条路径的电阻。由于  $r_d \ll l_d$ ,

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

从物理上看，每个小球形接触体均贡献一个扩展电阻  $\rho/(4\pi r_d)$ 。

由于  $l_d \ll y$ ，猎物产生的电场沿探测器近似均匀。右侧探测球体的电势较高，因此开路电压为

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}. \end{aligned}$$

在图 II-2 的等效电路中，由基尔霍夫电压定律可得

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

因此，

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho/(2\pi r_d)}.$$

探测元件中耗散的功率为

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

用给定参数表示，得到

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

## 5. 最优探测器电阻和最大功率

对于给定的源电流和几何参数， $V$  和  $R_m$  均为定值。将探测功率对  $R_d$  求导，

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

当  $R_d < R_m$  时，导数为正；当  $R_d > R_m$  时，导数为负。因此，当

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

时，功率达到最大。这就是最大功率传输条件。

在此电阻下， $V_d = V/2$ ，于是

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m}.$$

代入可得

$$\begin{aligned} P_{d,\text{max}} &\simeq \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho} \\ &= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}. \end{aligned}$$

利用第 3 部分中的源功率，还可将其写为

$$\frac{P_{d,\text{max}}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

$y^{-6}$  的依赖关系来自对偶极子电场取平方，因为该电场按  $y^{-3}$  衰减。

解答已与官方解答核对。

## 题目 3：在倾斜道路上运动的重型车辆

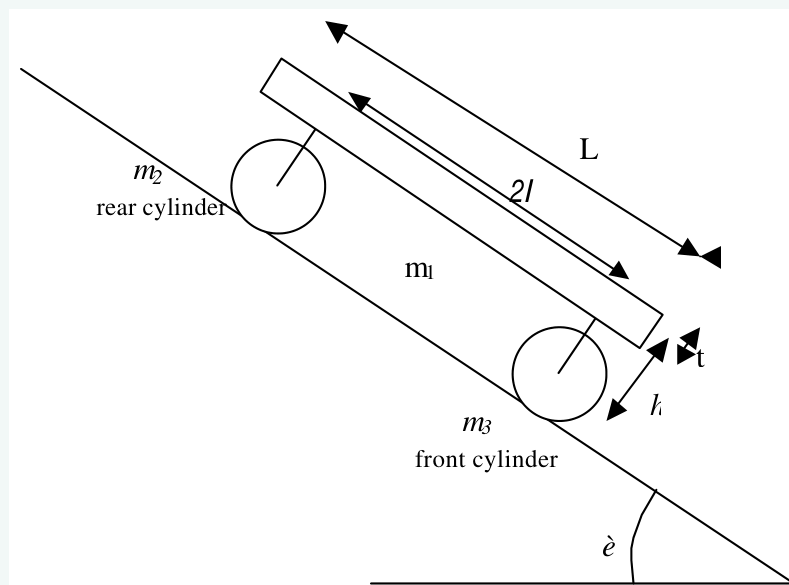


图 III-1：在倾斜道路上运动的重型车辆的简化模型。

上图是重型车辆（压路机）的简化模型，其前后各有一个圆筒作为车轮，位于倾角为  $\theta$ （图中标为  $\vartheta$ ）的道路上，如图 III-1 所示。两个圆筒各自的总质量均为  $M$  ( $m_2 = m_3 = M$ )，每个圆筒由一个外半径为  $R_o$ 、内半径为  $R_i = 0.8R_o$  的圆筒壳和八根总质量为  $0.2M$  的辐条组成。支撑车身的底架质量可忽略不计。圆筒可用图 III-2 所示的模型表示。车辆在重力和摩擦力的作用下沿道路向下运动。前后圆筒相对于车辆对称布置。

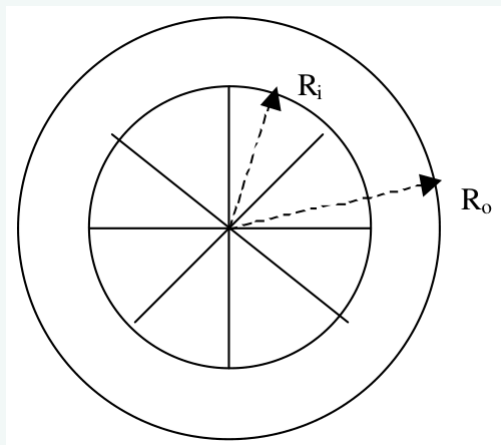


图 III-2：圆筒的简化模型。

圆筒与道路之间的静摩擦系数和动摩擦系数分别为  $\mu_s$  和  $\mu_k$ 。车身的质量为  $5M$ ，长度为  $L$ ，厚度为  $t$ 。前后圆筒之间的距离为  $2l$ ，圆筒中心到车身底面的距离为  $h$ 。假设圆筒与其轴之间的滚动摩擦可忽略不计。

问题：

1. 计算任一圆筒的转动惯量 [1.5 分]。
2. 画出作用在车身、前圆筒和后圆筒上的所有力。分别写出各部分的运动方程 [2.5 分]。
3. 假设车辆从静止开始运动，随后在重力作用下自由运动。列出该系统所有可能的运动类型，并用给定的物理量推导出各类型的加速度 [4.0 分]。
4. 假设车辆从静止开始纯滚动，行进距离  $d$  后进入一段道路，该路段上的所有摩擦系数均降至较小的恒定值  $\mu'_s$  和  $\mu'_k$ ，使得两个圆筒都开始滑动。计算车辆行进总距离为  $s$  米时各圆筒的线速度和角速度。这里假设  $d$  和  $s$  均远大于车辆的尺寸 [2.0 分]

题目译自官方英文原文。

## 答案

用  $\theta$  表示倾角，并定义

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

下标  $r, f$  分别表示后圆筒和前圆筒。线加速度以沿坡向下为正；角加速度以沿坡向下滚动的转动方向为正。

### 1. 任一圆筒的转动惯量

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

其国际单位制单位为  $\text{kg m}^2$ 。

### 2. 运动方程

设车轴对圆筒  $i$  的作用力沿坡向下的分量为  $P_i$ ，指向路面的分量为  $Q_i$ 。设路面对它的法向支持力为  $N_i$ ，沿坡向上的摩擦力为  $f_i$ 。这些均为按所选参考方向定义的有符号分量。

对于车身和无质量底架，

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

对于每个圆筒，

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

因此，

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

### 3. 滚动和滑动状态

为简洁起见，定义

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa MR}.$$

| 后圆筒 | 前圆筒 | 共同的线加速度 $a$                                                                                       | $\alpha_r$                            | $\alpha_f$                            |
|-----|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 滚动  | 滚动  | $a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$                             | $a_0/R$                               | $a_0/R$                               |
| 滑动  | 滚动  | $a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$ | $\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$ | $a_{\text{SR}}/R$                     |
| 滚动  | 滑动  | $a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$ | $a_{\text{RS}}/R$                     | $\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$ |
| 滑动  | 滑动  | $a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$                                              | $\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$ | $\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$ |

以上是四种接触模式的方程。每种模式都要求  $N_r, N_f \geq 0$ ，并且满足

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i \quad \text{对于滚动的圆筒,}$$

$$a > R\alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{对于从静止开始沿坡向下滑动的圆筒.}$$

等号对应各模式之间的边界。

若

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

则两个圆筒均从静止开始滚动。后圆筒首先达到静摩擦极限。因此，从两个圆筒均滚动的分支失去静摩擦约束后，会进入仅后圆筒滑动或直接进入两个圆筒均滑动的状态；仅前圆筒滑动是另一种有条件成立的混合接触模式，并非该分支首次失去静摩擦约束时出现的状态。

#### 4. 进入摩擦系数较小的路段后的速度

对于  $s \geq d$ ，令

$$v_d = \sqrt{2a_0d}, \quad a_1 = g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta),$$

$$v = \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s - d)}, \quad \Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

则

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

负号对应后圆筒。线速度的单位为  $\text{m s}^{-1}$ ，角速度的单位为  $\text{rad s}^{-1}$ 。

## 解答

### 1. 转动惯量

将圆筒壳视为均匀壳体，将每根辐条视为从车轴沿径向延伸至  $R_i$  的均匀细杆。

圆筒壳的质量为  $0.8M$ ，因此其绕圆筒轴线的转动惯量为

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

每根辐条的质量为  $0.2M/8$ 。长度为  $R_i$  的均匀细杆绕通过一端且垂直于杆的轴转动时，转动惯量为  $mR_i^2/3$ 。因此

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

代入  $R_i = 0.8R$ ,

$$I = MR^2 \left[ \frac{0.8}{2} (1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3} (0.8^2) \right]$$

$$= MR^2 \left( \frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right).$$

所以

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

### 2. 受力和运动方程

选取  $x$  轴沿道路向下， $y$  轴垂直于道路并指向远离路面的方向。

采用题意所指的刚性车辆模型：两个圆筒始终与笔直的路面接触，圆心具有相同的加速度  $a$ ，车身始终与道路平行。因此，车身的角加速度为零。车身质心位于两车轴的中间，并处于车轴连线的上方，其到车轴连线的垂直距离为

$$b = h + \frac{t}{2}.$$

受力图应标出以下各力。

- **车身，包括无质量底架：** 重力  $5Mg$ ，作用于质心，竖直向下；每个车轴处的作用力，其沿道路的分量为  $-P_i$ ，垂直于道路的分量为  $+Q_i$ 。
- **后圆筒：** 重力  $Mg$ ，通过圆心，竖直向下；车轴作用力的分量  $P_r$  沿坡向下， $Q_r$  指向路面；路面支持力  $N_r$ ，作用于接触点，垂直于道路；摩擦力  $f_r$ ，作用于接触点，沿坡向上。
- **前圆筒：** 相应的各力为  $Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f$ 。

车轴作用力的箭头表示参考方向：某个有符号分量可以为负。在这里讨论的沿坡向下滑动模式中，摩擦力沿坡向上；它也提供沿坡向下滚动所需的力矩。

对车身应用牛顿第二定律，得到

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

以及

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

对车身质心取力矩，两车轴位置沿道路方向的坐标为  $-l, +l$ ，垂直于道路方向的坐标为  $-b$ 。由角加速度为零，得到

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

因此

$$l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).$$

对于圆筒  $i$ ，由平动方程得到

$$\begin{aligned} Ma &= Mg \sin \theta + P_i - f_i, \\ N_i - Mg \cos \theta - Q_i &= 0. \end{aligned}$$

由于忽略轴承摩擦，只有路面摩擦力对圆筒轴线产生力矩：

$$I\alpha_i = Rf_i.$$

将三个沿坡向下的运动方程相加，消去车轴处的内力：

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).$$

法向支持力满足

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

此外，

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

利用车身沿坡向下的运动方程，

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

因此

$$\begin{aligned} N_r(a) &= \frac{7M}{2} [g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)], \\ N_f(a) &= \frac{7M}{2} [g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)]. \end{aligned}$$

这些方程包含了载荷向前方转移的效应。等价地,

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

车身长度  $L$  不出现在结果中: 车身没有角加速度, 其质心位置由对称性确定。

### 3. 可能的运动及其加速度

假设通常的大小关系成立:

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

对于无滑动滚动的圆筒,

$$a = R\alpha_i.$$

由其转动方程可知, 此时所需的摩擦力为

$$f_i = \frac{I}{R^2} a = \kappa M a.$$

该力必须满足静摩擦力的上限约束

$$\kappa M a \leq \mu_s N_i.$$

对于接触点沿坡向下滑动的圆筒,

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa M R}.$$

为检验滑动方向, 定义圆筒接触点相对于路面沿坡向下的速度:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

从静止开始的恒加速度滑动解满足

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

因此, 只有在

$$a > R\alpha_i.$$

时, 沿坡向上的滑动摩擦力才与沿坡向下的滑动相一致。

下列所有公式还要求法向支持力非负。支持力降为零标志着可能失去接触; 越过这一边界后, 所假设的保持两处接触且无俯仰运动的模型便不再适用。

### 两个圆筒均无滑动滚动。

此时

$$f_r = f_f = \kappa M a.$$

整体沿坡向下的运动方程变为

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

因此

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149} g \sin \theta \simeq 0.8336 g \sin \theta,$$

并且

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

每个接触点所需的摩擦力为

$$f_0 = \frac{7\kappa M g \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

记

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

则支持力为

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2} (\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

由于  $N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$ ，后接触点给出的静摩擦条件更为严格：

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

整理得

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

即

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

作为独立检验，纯滚动时的动能为

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

令动能的增加量等于重力势能的减少量，可得到相同的  $a_0$ 。

**后圆筒滑动；前圆筒滚动。**

此时

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa Ma.$$

因此

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

代入法向支持力，

$$(7 + \kappa)a = 7g \sin \theta - \frac{7\mu_k}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

合并含  $a$  的项，得到

$$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

角加速度为

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M R}, \quad \alpha_f = \frac{a_{SR}}{R}.$$

自洽条件为

$$a_{SR} > \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M}, \quad \kappa M a_{SR} \leq \mu_s N_f(a_{SR}).$$

第一个条件使后接触点沿坡向下滑动；第二个条件使前圆筒能够保持滚动。

当后圆筒失去静摩擦约束时，应检验这一混合分支。如果前接触点无法提供所需的静摩擦力，则两个圆筒都必须滑动。

**后圆筒滚动；前圆筒滑动。**

为完整起见，另一种混合接触组合满足

$$f_r = \kappa M a, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

因此

$$(7 + \kappa) M a = 7 M g \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

由此得到

$$a_{RS} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

其角加速度为

$$\alpha_r = \frac{a_{RS}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M R}.$$

其自洽条件为

$$\kappa M a_{RS} \leq \mu_s N_r(a_{RS}), \quad a_{RS} > \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M}.$$

这是一个有条件成立的滑动状态解。它并不描述前圆筒从两个圆筒均滚动的分支中首先失去静摩擦约束的情形，因为在该分支中，两个接触点所需的摩擦力相等，而前接触点的法向支持力较大。

**两个圆筒均滑动。**

此时，

$$f_r + f_f = \mu_k (N_r + N_f) = 7\mu_k M g \cos \theta.$$

因此

$$a_{SS} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

由于

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

法向支持力简化为

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu_k).$$

因此

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu_k).$$

前圆筒的角加速度较大。因此，两个接触点均从静止开始沿坡向下滑动的更严格条件为

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

对于  $0 \leq \theta < \pi/2$ ，该条件为

$$\tan \theta > \mu_k \left[ 1 + \frac{7}{2\kappa} (1 + q\mu_k) \right].$$

保持两处接触还要求

$$q\mu_k \leq 1.$$

若  $\mu_k = 0$ ，两个圆筒从静止开始作纯平动滑动：

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

必须区分滑动的开始与滑动的持续：静摩擦决定接触点是否失去无滑动约束，而上述动摩擦条件决定假设的滑动状态是否自治。不能仅因  $\mu_k < \mu_s$ ，就用动摩擦解替代一个成立的无滑动解。

#### 4. 在摩擦系数较小的路段上的运动

在最初纯滚动的距离  $d$  内，加速度为  $a_0$ 。从静止开始，

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

利用题目给出的大距离近似，忽略只有一个圆筒到达新路面时的短暂过渡过程。线速度和角速度均不会发生冲量引起的突变。

当两个圆筒均在新路面上滑动后，将前述两个圆筒均滑动的结果中的  $\mu_k$  替换为  $\mu'_k$ ：

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2} (1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

这些量均为常量。

在剩余距离  $s - d$  内，

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

因此，两个圆筒圆心的速度均为

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

由平均速度可求得在该路段上经过的时间：

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

因此

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

对恒定的角加速度积分，得到

$$\omega_r = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 - q\mu'_k) \frac{2(s-d)}{v+v_d},$$

$$\omega_f = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 + q\mu'_k) \frac{2(s-d)}{v+v_d}.$$

两个圆筒均开始滑动这一前提要求沿坡向下滑动的状态自治。事实上，刚进入新路段后，

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i)\Delta\tau,$$

因此条件为  $a_1 > R\alpha'_f$ ，同时要求支持力非负。减小后的静摩擦系数  $\mu'_s$  决定是否失去无滑动约束，但一旦两个接触点都开始滑动，它就不再出现在后续速度的表达式中。

---

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。