

IPhO 2002

Teorik sorular ve çözümler · Bali, Endonezya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2002/

Soru 1: Yer Radarı

Yer radarı (GPR), zemine elektromanyetik dalgalar gönderip yer altındaki nesnelerden yansıyan dalgaları alarak yüzeye yakın nesneleri tespit etmek ve konumlarını belirlemek için kullanılır. Anten ve dedektör doğrudan zemin üzerinde, aynı noktada bulunur.

z yönünde yayılan, açısal frekansı ω olan doğrusal kutuplanmış bir elektromanyetik düzlem dalgalının alanı aşağıdaki ifadeyle gösterilir:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

Burada E_0 sabittir; α zayıflama katsayısı, β ise dalga sayısıdır ve sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

Burada μ , ε , ve σ sırasıyla manyetik geçirgenliği, elektriksel geçirgenliği ve elektriksel iletkenliği belirtir.

Nesneye ulaşan radar sinyalinin genliği başlangıç değerinin $1/e$ 'sinin ($\approx 37\%$) altına düştüğünde sinyal algılanamaz hâle gelir. Algılama menzilinin ve çözünürlüğünün ayarlanabilmesi için genellikle değişken frekanslı (10 MHz – 1000 MHz) bir elektromanyetik dalga kullanılır.

Yer radarının performansı çözünürlüğüne bağlıdır. Çözünürlük, birbirine komşu iki yansıtıcının ayırt edilebilmesi için aralarında bulunması gereken en küçük uzaklıkla verilir. Bu en küçük uzaklık, dedektörde iki yansıyan dalga arasında en az 180° faz farkı oluşturmalıdır.

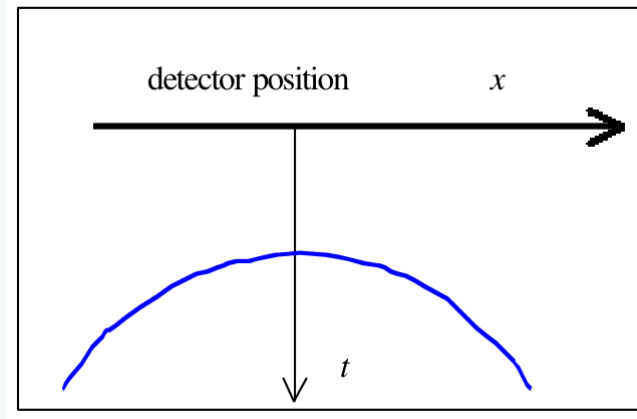
Sorular:

(Verilenler: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ve $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

1. Zeminin manyetik olmadığını ($\mu = \mu_0$) ve $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$ koşulunu sağladığını varsayın. (1) ve (2) denklemlerini kullanarak yayılma hızı v 'nin μ ve ε cinsinden ifadesini türetin **[1.0 puan]**.
2. İletkenliği 1.0 mS/m ve elektriksel geçirgenliği $9\varepsilon_0$ olan, $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$ koşulunu sağlayan bir zemindeki bir nesnenin algılanabileceği en büyük derinliği belirleyin ($S = \text{ohm}^{-1}$; $\mu = \mu_0$ kullanın). **[2.0 puan]**
3. Zemine yatay olarak gömülmüş, birbirine paralel iki iletken çubuğu ele alın. Çubuklar 4 metre derinliktedir. Zeminin iletkenliğinin 1.0 mS/m ve elektriksel geçirgenliğinin $9\varepsilon_0$ olduğu bilinmektedir. Yer radarı ölçümünün, yaklaşık olarak çubuklardan birinin tam üzerinde

yapıldığını varsayın. Noktasal bir dedektör kullanıldığını kabul edin. 50 cm yanal çözünürlük elde etmek için gereken en küçük frekansı belirleyin **[3.5 puan]**.

4. Aynı zemine gömülmüş bir çubuğun d derinliğini belirlemek için çubuğa dik bir doğru boyunca yapılan ölçümleri ele alın. Sonuç aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:



Gidiş-dönüş süresi t 'nin dedektör konumu x 'e göre grafiği, $t_{\min} = 100$ ns.

t 'yi x 'in bir fonksiyonu olarak türetin ve d 'yi belirleyin **[3.5 puan]**.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Belirtilen düşük kayıp sınırında,

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

2. En büyük algılama derinliği

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

olarak bulunur.

3. Çubukların derinliği $h = 4$ m ve aralarındaki yanal uzaklık $s = 0.50$ m için,

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. Çubuğun tam üzerinde $x = 0$ alınırsa,

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m}.$$

Çözüm

1. Yayılma hızı

Fazı sabit olan bir nokta

$$\omega t - \beta z = \text{sabit.}$$

koşulunu sağlar. Türev alınarak faz hızı elde edilir:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Küçük boyutsuz parametreyi şöyle tanımlayalım:

$$q = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

Binom açılımını kullanırsak,

$$\sqrt{1 + q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

Böylece (2) denklemi şu sonucu verir:

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

Yalnızca başat terimi tutarsak,

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Manyetik olmayan bir zemin için $\mu = \mu_0$ 'dır. Bu mertebede β , ω ile orantılıdır; dolayısıyla dispersiyon ihmal edilebilir ve grup hızı da bu değere eşittir.

2. En büyük algılama derinliği

Zayıflama katsayısı için aynı açılımın sıfırdan farklı başat terimini tutalım:

$$\alpha \simeq \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Dolayısıyla bu mertebede zayıflama katsayısı frekanstan bağımsızdır.

Antenin tam altında, D derinliğinde bulunan bir nesne için (1) denklemi, gelen dalganın genlik oranını şöyle verir:

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

Soruda eşik, **nesneye ulaşan** sinyal için belirtilmiştir; bu nedenle bu koşulda kullanılan yayılma uzaklığı D 'dir. Sınır derinliğinde,

$$e^{-\alpha D_{\text{max}}} = \frac{1}{e},$$

ve dolayısıyla

$$D_{\text{max}} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

Şu değerleri kullanarak

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

şunu elde ederiz:

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

Dolayısıyla,

$$D_{\max} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. 50 cm yanal çözünürlük için en küçük frekans

Çubuklara dik olan düşey düzlemde çalışalım. Çubukların ortak derinliği h , aralarındaki yanal uzaklık s olsun ve anten–dedektör konumunu birinci çubuğun tam üzerinde alalım.

İki çubuğa olan tek yönlü uzaklıklar

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

olarak verilir. Verici ve dedektör aynı noktada olduğundan, yansıyan sinyaller $2r_1$ ve $2r_2$ uzaklıklarını kateder. Dolayısıyla yol farkları

$$\Delta L = 2 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

olur.

İletken çubukları eşdeğer yansıtıcılar olarak ele aldığımızda, ortak yansıma fazları fark alınırken birbirini götürür. Dedektördeki faz farkı şöyledir:

$$\Delta\phi = \beta\Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Belirtilen çözünürlük ölçütü $\Delta\phi \geq \pi$ 'dir. En küçük frekans eşitlik durumunda elde edilir:

$$f_{\min} = \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}.$$

Bu zemindeki dalga hızı şöyledir:

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\varepsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

$h = 4 \text{ m}$ ve $s = 0.50 \text{ m}$ için,

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

Böylece,

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

ya da uygun bir hassasiyete yuvarlandığında,

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

Çubuklar arasındaki uzaklığın küçük olduğu yaklaşım da yuvarlama sonrasında aynı sonucu verir:

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

Gereken frekans, belirtilen 10–1000 MHz aralığındadır. Ayrıca hesaplanan frekansta,

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \varepsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

olduğundan düşük kayıp yaklaşımı tutarlıdır. Her iki çubuk da 2. kısımda bulunan algılama menzili içindedir.

4. Gidiş-dönüş süresi eğrisi ve çubuğun derinliği

Yatay koordinatı, gömülü çubuğun tam üzerinde $x = 0$ olacak şekilde seçelim. Homojen zeminde antenden çubuğa olan tek yönlü uzaklık şöyledir:

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Ölçülen süre, gidiş ve dönüş yolculuklarını içerir:

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

En kısa yol $x = 0$ konumunda elde edilir ve

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

sonucunu verir. Buna göre,

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

Böylece,

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

En küçük gidiş-dönüş süresini eğrinin denkleminde yerine koyarsak,

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5.0 \text{ m}} \right)^2}.$$

Bu, aşağıdaki hiperbolün zamanın pozitif olduğu koludur:

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

Eğri $x = 0$ 'a göre simetrik; çubuğun tam üzerinde en küçük gidiş-dönüş süresi olan 100 ns değerini alır ve süre $|x|$ ile artar. $|x| \gg d$ için,

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

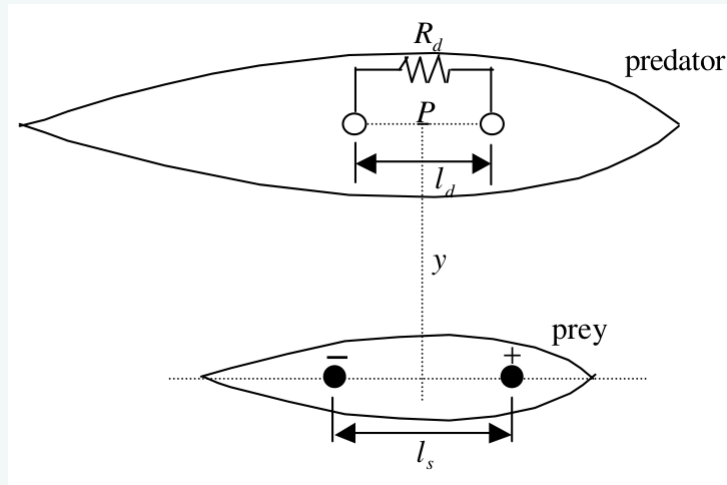
Şeklin zaman eksenine aşağıya doğru yöneldiğinden, daha büyük gidiş-dönüş süreleri şekilde gösterildiği gibi sayfada daha aşağıda görünür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Elektriksel Sinyallerin Algılanması

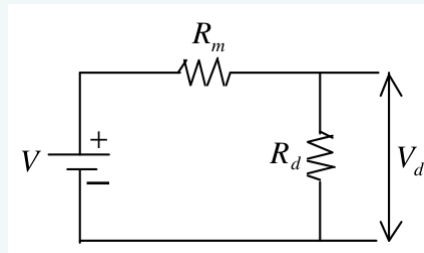
Bazı deniz hayvanları, diğer canlıların solunum sırasında veya kas kasılmasını içeren başka süreçlerde ürettikleri elektrik akımları sayesinde bu canlıları belirli bir uzaklıktan algılayabilir. Bazı yırtıcılar, avları kumun altına gömülmüş olsa bile, onların yerini belirlemek için bu elektriksel sinyali kullanır.

Avda akımın oluşmasını ve yırtıcının bu akımı algılamasını sağlayan fiziksel mekanizma, Şekil II-1'de gösterildiği gibi modellenenebilir. Avın ürettiği akım, avın vücudundaki pozitif ve negatif potansiyelli iki küre arasında akar. İki kürenin merkezleri arasındaki uzaklık l_s , her birinin yarıçapı ise l_s 'den çok daha küçük olan r_s 'dir. Deniz suyunun özdirenci ρ 'dur. Avın vücudunun özdirencinin çevresindeki deniz suyunun özdirenciyle aynı olduğunu varsayın; bu durumda şekilde avı çevreleyen sınır göz ardı edilebilir.



Şekil II-1. Bir avdan gelen elektriksel gücün yırtıcısı tarafından algılanmasını betimleyen model.

Avdan gelen elektriksel gücün yırtıcı tarafından algılanmasını betimlemek için, algılayıcı da benzer biçimde, yırtıcının vücudunda bulunan ve çevredeki deniz suyuyla temas eden, avın vücudundaki küre çiftine paralel duran iki küreyle modellenir. Bu küreler arasındaki uzaklık l_d , her birinin yarıçapı ise l_d 'den çok daha küçük olan r_d 'dir. Bu durumda algılayıcının merkezi kaynağın tam üstünde, kaynaktan y uzaklıkta bulunur ve iki küreyi birleştiren doğru, Şekil II-1'de gösterildiği gibi elektrik alanına paraleldir. Hem l_s hem de l_d , y 'den de çok daha küçüktür. İki küreyi birleştiren doğru boyunca elektrik alan şiddetinin sabit olduğu varsayılır. Böylece algılayıcı, Şekil II-2'de gösterildiği gibi avı, çevredeki deniz suyunu ve yırtıcıyı birbirine bağlayan kapalı bir devre sistemi oluşturur.



Şekil II-2. Algılayan yırtıcıyı, avı ve çevredeki deniz suyunu içeren eşdeğer kapalı devre sistemi.

Şekilde V , avın oluşturduğu elektrik alanından kaynaklanan, algılayıcı küreleri arasındaki gerilim farkıdır; R_m ise çevredeki deniz suyundan kaynaklanan iç dirençtir. Ayrıca V_d ve R_d , sırasıyla algılayıcı küreler arasındaki gerilim farkı ve yirticinin içindeki algılama elemanının direncidir.

Sorular:

1. Sonsuz bir ortamda, noktasal bir I_s akım kaynağının r uzaklıkta oluşturduğu akım yoğunluğu vektörünü $\vec{j}$ (birim alan başına akım) bulun. **[1.5 puan]**
2. $\vec{E} = \rho \vec{j}$ yasasını kullanarak, avın vücudundaki iki küre arasında akan belirli bir I_s akımı için algılayıcı kürelerin orta noktasındaki (P noktasındaki) elektrik alan şiddetini $\vec{E}_p$ bulun **[2.0 puan]**.
3. Aynı I_s akımı için, avdaki kaynak küreler arasındaki gerilim farkını (V_s) bulun **[1.5 puan]**. İki kaynak küre arasındaki direnci (R_s) **[0.5 puan]** ve kaynağın ürettiği gücü (P_s) **[0.5 puan]** bulun.
4. Şekil II-2'deki R_m 'yi **[0.5 puan]**, V_d 'yi **[1.0 puan]** bulun ve kaynaktan algılayıcıya aktarılan gücü (P_d) de hesaplayın **[0.5 puan]**.
5. Algılanan gücü maksimum yapan en uygun R_d değerini bulun **[1.5 puan]** ve maksimum gücü de belirleyin **[0.5 puan]**.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$\hat{x}$, avın negatif küresinden pozitif küresine doğru yönelsin. Aşağıdaki gerilimler pozitif büyüklüklerdir. Sonuçlarda, belirtilen

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y$$

varsayımları altında baskın terimler korunmuştur. Soruda parametreler için sayısal değer verilmediğinden cevaplar semboliktir.

1. $\hat{r}$, noktasal kaynaktan dışarıya doğru yönelmek üzere,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

2. Alan, pozitif kaynak tarafından negatif kaynak tarafına doğru yönelir:

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{x}.$$

3. Kaynak gerilimi, direnci ve gücü şöyledir:

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Deniz suyunun direnci ve algılayıcının açık devre gerilimi şöyledir:

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

Dolayısıyla,

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. Algılanan güç,

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

olduğunda maksimum olur. Bu gücün değeri şöyledir:

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

Çözüm

1. Noktasal bir akım kaynağının akım yoğunluğu

Homojen, izotrop ve sonsuz bir ortamda küresel simetri, akım yoğunluğunun radyal olmasını ve merkezi kaynakta olan bir kürenin her noktasında aynı büyüklüğe sahip olmasını gerektirir.

Akımın korunumu şu bağıntıyı verir:

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

Dolayısıyla,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

Pozitif bir kaynak için akım dışarıya doğrudur; aynı akımı yutan bir kuyunun işareti terstir. Akım yoğunluğunun SI birimi A m^{-2} 'dir.

2. P noktasındaki elektrik alanı

Avın iki küresinin orta noktasını orijine yerleştirelim. Pozitif küre $x = l_s/2$, negatif küre $x = -l_s/2$ konumunda, P ise $(0, y)$ noktasındadır.

Küreler, aralarındaki uzaklığa ve P'ye olan uzaklıklarına kıyasla küçük olduğundan, bunların yerine noktasal bir $+I_s$ kaynağı ve noktasal bir $-I_s$ kuyusu koyalım. P'ye olan ortak uzaklıkları şöyledir:

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

Süperpozisyon ilkesine göre,

$$\begin{aligned} \vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[\left(-\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) - \left(\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{x}. \end{aligned}$$

Düşey bileşenler birbirini götürürken yatay bileşenler toplanır.

Ohm yasasının yerel biçimi olan $\vec{E} = \rho \vec{j}$ kullanıldığında,

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi(y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{x}.$$

Bu ifade, noktasal kaynak yaklaşımı çerçevesinde kesindir. $l_s \ll y$ olduğunda,

$$\boxed{\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{x}.$$

Dolayısıyla P, alanı y^{-3} ile azalan bir akım dipolünün ekvator doğrusu üzerinde bulunur.

3. Kaynak gerilimi, direnci ve gücü

Tek bir noktasal kaynak için radyal elektrik alanı şöyledir:

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

Sonsuzdaki potansiyel sıfır alındığında,

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

I_s akımını yutan bir kuyu, bu potansiyelin negatifini oluşturur.

Kaynak kürelerin her birinde, kürenin kendi yüzey potansiyeline katkısının büyüklüğü şöyledir:

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Diğer küreden gelen katkı $\rho I_s/(4\pi l_s)$ mertebesinde; bu katkının kürenin kendi katkısına oranı r_s/l_s olduğundan, baskın mertebede ihmal edilir. Böylece,

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Bu nedenle gerilim farkı şöyledir:

$$\boxed{V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}.$$

Tamlık açısından, iki monopolün birbirlerinin potansiyeline katkıları korunsaydı,

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right),$$

elde edilirdi; buradaki ikinci terim, belirtilen varsayım altında ihmal edilebilir.

Kaynak küreler arasında görülen direnç, Ohm yasasından elde edilir:

$$\boxed{R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

Avin sağladığı elektriksel güç şöyledir:

$$\boxed{P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Deniz suyunun direnci, algılayıcı gerilimi ve algılanan güç

Algılayıcıdan geçen akım, çevredeki suya algılayıcı kürelerden birinde girer ve diğerinde sudan çıkar. Bu yolun direnci, 3. kısımdaki sonuç, yarıçapları r_d ve aralarındaki uzaklık l_d olan kürelere uygulanarak elde edilir. $r_d \ll l_d$ olduğundan,

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Fiziksel olarak, her küçük küresel temas noktası $\rho/(4\pi r_d)$ değerinde bir yayılma direnci katkısı yapar.

$l_d \ll y$ olduğundan avın elektrik alanı algılayıcı boyunca yaklaşık olarak düzgündür. Sağdaki algılayıcı küre daha yüksek potansiyeldedir; dolayısıyla açık devre gerilimi şöyledir:

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}. \end{aligned}$$

Şekil II-2'deki eşdeğer devrede Kirchhoff'un gerilim yasası şu bağıntıyı verir:

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

Dolayısıyla,

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho/(2\pi r_d)}.$$

Algılama elemanında harcanan güç şöyledir:

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

Verilen parametreler cinsinden,

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

5. En uygun algılayıcı direnci ve maksimum güç

Verilen kaynak akımı ve geometri için V ve R_m sabittir. Algılanan gücün R_d 'ye göre türevi alındığında,

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

Türev, $R_d < R_m$ için pozitif, $R_d > R_m$ için negatiftir. Dolayısıyla maksimum,

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}$$

olduğunda elde edilir. Bu, maksimum güç aktarımı koşuludur.

Bu dirençte $V_d = V/2$ olur ve şu sonuç elde edilir:

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m}.$$

Yerine koyma işlemi şu sonucu verir:

$$P_{d,\max} \simeq \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho}$$

$$= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}.$$

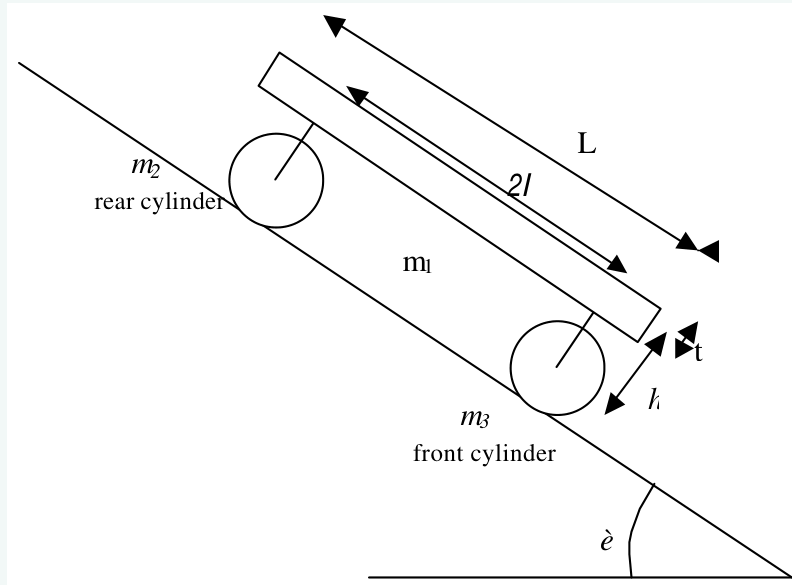
3. kısımdaki kaynak gücü kullanılarak bu sonuç şöyle de yazılabilir:

$$\frac{P_{d,\max}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

y^{-6} bağımlılığı, y^{-3} ile azalan dipol alanının karesinin alınmasından kaynaklanır.

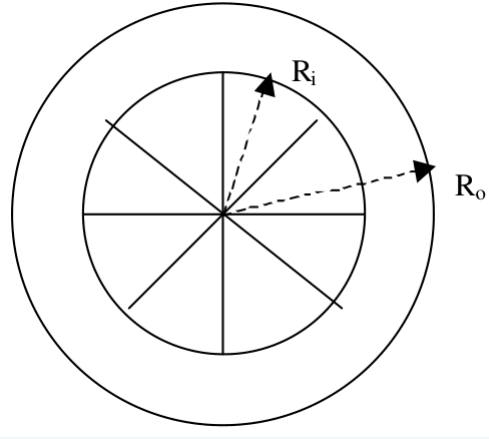
Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Eğimli Bir Yolda Hareket Eden Ağır Bir Araç



Şekil III-1: Eğimli bir yolda hareket eden ağır bir aracın basitleştirilmiş modeli.

Yukarıdaki şekil, Şekil III-1'de gösterildiği gibi eğim açısı θ (şekilde θ ile gösterilmiştir) olan bir yolda, tekerlek olarak biri arkada diğeri önde olmak üzere iki silindire sahip ağır bir aracın (yol silindirinin) basitleştirilmiş modelidir. İki silindirin her birinin toplam kütlesi M ($m_2 = m_3 = M$) olup her biri, dış yarıçapı R_o , iç yarıçapı $R_i = 0.8R_o$ olan silindirik bir kabuk ile toplam kütlesi $0.2M$ olan sekiz adet radyal çubuktan oluşur. Aracın gövdesini taşıyan şasinin kütlesi ihmal edilebilir. Silindir, Şekil III-2'de gösterildiği gibi modellenenebilir. Araç, yerçekimi ve sürtünme kuvvetlerinin etkisi altında yokuş aşağı hareket etmektedir. Ön ve arka silindir, araca göre simetrik olarak yerleştirilmiştir.



Şekil III-2: Silindirlerin basitleştirilmiş modeli.

Silindir ile yol arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırasıyla μ_s ve μ_k 'dir. Aracın gövdesinin kütlesi $5M$, uzunluğu L ve kalınlığı t 'dir. Ön ve arka silindir arasındaki uzaklık $2l$, silindirin merkezinden araç gövdesinin tabanına olan uzaklık ise h 'dir. Silindir ile mili arasındaki yuvarlanma sürtünmesinin ihmal edilebilir olduğunu varsayın.

Sorular:

1. Silindirlerden herhangi birinin eylemsizlik momentini hesaplayın **[1.5 puan]**.
2. Gövdeye, ön silindire ve arka silindire etki eden tüm kuvvetleri çizerek gösterin. Bu parçaların her biri için hareket denklemlerini yazın **[2.5 puan]**.
3. Aracın durgun hâlden harekete başladığı ve ardından yerçekimi etkisi altında serbestçe hareket ettiği varsayılmaktadır. Sistemin olası tüm hareket türlerini belirtin ve bunların ivmelerini verilen fiziksel nicelikler cinsinden türetin **[4.0 puan]**.
4. Aracın durgun hâlden başlayıp kaymadan yuvarlanarak d kadar yol aldıktan sonra, tüm sürtünme katsayılarının daha küçük sabit μ'_s ve μ'_k değerlerine düştüğü ve bunun sonucunda iki silindirin de kaymaya başladığı bir yol kesimine girdiğini varsayın. Araç toplam s metre yol aldıktan sonra her bir silindirin çizgisel ve açısal hızlarını hesaplayın. Burada d ve s 'nin aracın boyutlarından çok daha büyük olduğunu varsayıyoruz **[2.0 puan]**

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Eğim açısını θ ile gösterelim ve şu tanımları yapalım:

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

r, f alt indisleri sırasıyla arka ve ön silindiri gösterir. Çizgisel ivmenin pozitif yönü yokuş aşağıdır; açısal ivmenin pozitif yönü ise yokuş aşağı yuvarlanma yönüdür.

1. Silindirlerden herhangi birinin eylemsizlik momenti

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

SI birimi kg m^2 'dir.

2. Hareket denklemleri

i silindirine milin uyguladığı kuvvetin yokuş aşağı bileşeni P_i , yola doğru bileşeni ise Q_i olsun. Yolu silindire uyguladığı normal kuvvet N_i , yokuş yukarı sürtünme kuvveti ise f_i olsun. Bunlar, belirtilen referans yönlerine göre işaretli bileşenlerdir.

Gövde ve kütesiz şasi için,

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

Her bir silindir için,

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

Dolayısıyla,

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

3. Yuvarlanma ve kayma rejimleri

Kısa yazım için şu tanımları yapalım:

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa MR}.$$

Arka silindir	Ön silindir	Ortak çizgisel ivme a	α_r	α_f
Yuvarlanır	Yuvarlanır	$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$	a_0/R	a_0/R
Kayar	Yuvarlanır	$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$	a_{SR}/R
Yuvarlanır	Kayar	$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$	a_{RS}/R	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$
Kayar	Kayar	$a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$

Bunlar dört temas durumunun denklemleridir. Her biri için $N_r, N_f \geq 0$ koşulunun yanı sıra şu koşullar gereklidir:

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i \quad \text{yuvarlanan bir silindir için,}$$

$$a > R\alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{durgun hâlden yokuş aşağı kaymaya başlayan bir silindir için.}$$

Eşitlikler, durumlar arasındaki sınırları tanımlar.

Her iki silindir de durgun hâlden başlayarak yuvarlanır; bunun koşulu

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Statik sürtünme sınırına önce arka silindir ulaşır. Bu nedenle, her iki silindirin yuvarlandığı çözüm dalında tutunmanın kaybolması, yalnızca arka silindirin kaymasına veya doğrudan her iki silindirin kaymasına yol açar; yalnızca ön silindirin kayması, alternatif koşullu karma temas durumudur ve bu daldaki ilk tutunma kaybı değildir.

4. Sürtünmenin daha düşük olduğu kesime girildikten sonraki hızlar

$s \geq d$ için şu tanımları yapalım:

$$v_d = \sqrt{2a_0d}, \quad a_1 = g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta),$$

$$v = \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s - d)}, \quad \Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Bu durumda

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

Eksi işareti arka silindir içindir. Çizgisel hızların birimi m s^{-1} , açısal hızların birimi ise rad s^{-1} 'dir.

Çözüm

1. Eylemsizlik momenti

Kabuğu homojen, her bir radyal çubuğu ise milden R_i 'ye kadar uzanan homojen, ince bir çubuk olarak ele alalım.

Kabuğun kütlesi $0.8M$ olduğundan, silindir eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

Her bir çubuğun kütlesi $0.2M/8$ 'dir. Uzunluğu R_i olan homojen bir çubuğun, bir ucundan geçen ve çubuğa dik olan bir eksen etrafında dönmesi durumunda eylemsizlik momenti $mR_i^2/3$ 'tür. Dolayısıyla

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

$R_i = 0.8R$ kullanılarak,

$$I = MR^2 \left[\frac{0.8}{2}(1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3}(0.8^2) \right]$$

$$= MR^2 \left(\frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right).$$

Böylece

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

2. Kuvvet diyagramları ve hareket denklemleri

x eksenini yol boyunca yokuş aşağı, y eksenini ise yola dik ve yoldan dışarı doğru seçelim.

Soruda amaçlanan rijit araç modelini kullanıyoruz: Her iki silindir de düz yol ile temasını korur, merkezlerinin ivmeleri aynı a değerindedir ve gövde yola paralel kalır. Dolayısıyla gövdenin açısal ivmesi sıfırdır. Gövdenin kütle merkezi, millerin tam ortasında ve milleri birleştiren doğrunun dik doğrultuda

$$b = h + \frac{t}{2}$$

kadar üzerindedir.

Kuvvet diyagramlarında aşağıdakiler gösterilmelidir.

- **Kütlesiz şasi dâhil gövde:** Kütle merkezinde düşey aşağı yönlü $5Mg$ ağırlığı; her bir mil konumunda, yol boyunca $-P_i$ ve yola dik doğrultuda $+Q_i$ bileşenlerine sahip bir kuvvet.
- **Arka silindir:** Merkezinden geçen, düşey aşağı yönlü Mg ağırlığı; mil kuvvetinin yokuş aşağı P_r ve yola doğru Q_r bileşenleri; temas noktasında yola dik N_r yol tepki kuvveti; temas noktasında yokuş yukarı yönlü f_r sürtünme kuvveti.
- **Ön silindir:** Bunlara karşılık gelen Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f kuvvetleri.

Mil kuvvetinin okları referans yönlerini gösterir: İşaretli bileşenlerden herhangi biri negatif olabilir.

Burada ele alınan yokuş aşağı kayma durumlarında sürtünme yokuş yukarı yönlüdür; ayrıca yokuş aşağı yuvarlanma için gerekli torku da sağlar.

Gövde için Newton'un ikinci yasası şu denklemleri verir:

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

ve

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

Gövdenin kütle merkezine göre moment alındığında, iki mil konumunun yola paralel koordinatları $-l, +l$, yola dik koordinatı ise $-b$ 'dir. Açısal ivmenin sıfır olması şu sonucu verir:

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

Dolayısıyla

$$l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).$$

i silindiri için öteleme hareketi şu denklemleri verir:

$$\begin{aligned} Ma &= Mg \sin \theta + P_i - f_i, \\ N_i - Mg \cos \theta - Q_i &= 0. \end{aligned}$$

Yatak sürtünmesi ihmal edildiğinden, silindir eksenini etrafında yalnızca yol sürtünmesi tork oluşturur:

$$I\alpha_i = Rf_i.$$

Yokuş aşağı doğrultudaki üç denklemin toplanması, iç kuvvetler olan mil kuvvetlerini ortadan kaldırır:

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).$$

Normal tepki kuvvetleri şu bağıntıyı sağlar:

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

Ayrıca,

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

Gövdenin yokuş aşağı doğrultudaki denklemleri kullanılarak,

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

Böylece

$$N_r(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)],$$

$$N_f(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)].$$

Bu denklemler, yükün ön tarafa aktarılmasını içerir. Eşdeğer olarak,

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

Gövde uzunluğu L denklemlere girmez: Gövdenin açısal ivmesi yoktur ve kütle merkezinin konumu simetri ile belirlenir.

3. Olası hareketler ve ivmeleri

Alışlagelen sıralamayı varsayalım:

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

Kaymadan yuvarlanan bir silindir için,

$$a = R\alpha_i.$$

Bu durumda dönme hareketi denklemleri şu koşulu gerektirir:

$$f_i = \frac{I}{R^2}a = \kappa Ma.$$

Bu kuvvet, statik sürtünme sınırını sağlamalıdır:

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i.$$

Temas noktası yokuş aşağı kayan bir silindir için,

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa MR}.$$

Kayma yönünü denetlemek için, silindirin temas noktasının yola göre yokuş aşağı hızını tanımlayalım:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

Durgun hâlden başlayan sabit ivmeli bir kayma çözümünde,

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

Dolayısıyla yokuş yukarı yönlü kinetik sürtünme, ancak şu koşulda yokuş aşağı kayma ile tutarlıdır:

$$a > R\alpha_i.$$

Aşağıdaki tüm formüller ayrıca normal tepki kuvvetlerinin negatif olmamasını gerektirir. Bir tepki kuvvetinin sıfıra inmesi, olası temas kaybını belirtir; bu sınırın ötesinde, iki temasın korunduğu ve gövdenin öne ya da arkaya doğru açısal hareket yapmadığı varsayılan model artık geçerli değildir.

Her iki silindir de kaymadan yuvarlanır.

Bu durumda

$$f_r = f_f = \kappa Ma.$$

Yokuş aşağı doğrultudaki birleşik denklem şu hâli alır:

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

Buradan

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149}g \sin \theta \simeq 0.8336g \sin \theta,$$

ve

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

Her bir temas noktasında gerekli sürtünme kuvveti

$$f_0 = \frac{7\kappa Mg \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

Şu tanımı yaparsak,

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

tepki kuvvetleri

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2}(\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

$N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$ olduğundan, arka temas noktası daha sıkı statik sürtünme koşulunu belirler:

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

Yeniden düzenlenirse

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

veya

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Bağımsız bir kontrol olarak, kaymadan yuvarlanma durumunda kinetik enerji

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2 \left(\frac{1}{2}I \frac{v^2}{R^2} \right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

Bu enerjideki artışı kütleçekim potansiyel enerjisindeki azalmaya eşitlemek, aynı a_0 değerini verir.

Arka silindir kayar; ön silindir yuvarlanır.

Bu durumda

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa Ma.$$

Dolayısıyla

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

Normal tepki kuvveti yerine yazılırsa,

$$(7 + \kappa)a = 7g \sin \theta - \frac{7\mu_k}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

a içeren terimler bir araya getirilirse,

$$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

Açısal ivmeler

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{\text{SR}})}{\kappa M R}, \quad \alpha_f = \frac{a_{\text{SR}}}{R}.$$

Tutarlılık koşulları

$$a_{\text{SR}} > \frac{\mu_k N_r(a_{\text{SR}})}{\kappa M}, \quad \kappa M a_{\text{SR}} \leq \mu_s N_f(a_{\text{SR}}).$$

İlk koşul arka temas noktasının yokuş aşağı kaymasını sağlar; ikinci koşul ise ön silindirin yuvarlanmayı sürdürmesine izin verir.

Arka silindir statik tutunmasını kaybettiğinde sınanması gereken karma çözüm dalı budur. Ön temas noktası gerekli statik sürtünmeyi sağlayamazsa, her iki silindir de kaymalıdır.

Arka silindir yuvarlanır; ön silindir kayar.

Tüm olasılıkları kapsamak için, diğer karma temas birleşiminde

$$f_r = \kappa M a, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

Dolayısıyla

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

buradan

$$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

Bu durumdaki açısal ivmeler

$$\alpha_r = \frac{a_{\text{RS}}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{\text{RS}})}{\kappa M R}.$$

Tutarlılık koşulları ise

$$\kappa M a_{\text{RS}} \leq \mu_s N_r(a_{\text{RS}}), \quad a_{\text{RS}} > \frac{\mu_k N_f(a_{\text{RS}})}{\kappa M}.$$

Bu, koşullu bir kayma durumu çözümüdür. Her iki silindirin yuvarlandığı çözüm dalından çıkarken tutunmayı ilk kaybeden silindirin ön silindir olmasını betimlemez; çünkü o dalda iki temas noktasında eşit sürtünme gerekirken ön silindirdeki normal tepki kuvveti daha büyüktür.

Her iki silindir de kayar.

Bu durumda,

$$f_r + f_f = \mu_k(N_r + N_f) = 7\mu_k M g \cos \theta.$$

Buradan

$$a_{SS} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

Şu bağıntı geçerli olduğundan,

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

normal tepki kuvvetleri şu biçime indirgenir:

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu_k).$$

Böylece

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu_k).$$

Ön silindirin açısal ivmesi daha büyüktür. Dolayısıyla, her iki temas noktasının durgun hâlden başlayarak yokuş aşağı kayması için daha sıkı olan koşul

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

$0 \leq \theta < \pi/2$ için bu koşul

$$\tan \theta > \mu_k \left[1 + \frac{7}{2\kappa}(1 + q\mu_k) \right].$$

Her iki temasın da korunması ayrıca şu koşulu gerektirir:

$$q\mu_k \leq 1.$$

$\mu_k = 0$ ise, silindirler durgun hâlden başlayarak yalnızca öteleme yaparak kayar:

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

Kaymanın başlaması ile sürmesi arasındaki ayrım önemlidir: Statik sürtünme, bir temas noktasının tutunmayı kaybedip kaybetmeyeceğini belirlerken, yukarıdaki kinetik koşullar varsayılan bir kayma durumunun tutarlı olup olmadığını belirler. Yalnızca $\mu_k < \mu_s$ olduğu için, geçerli bir kaymadan yuvarlanma çözümünün yerine kinetik sürtünmeli bir çözüm kullanılmamalıdır.

4. Sürtünmenin daha düşük olduğu kesimdeki hareket

Başlangıçtaki kaymadan yuvarlanılan d mesafesi boyunca ivme a_0 'dır. Durgun hâlden başlandığında,

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

Verilen büyük mesafe yaklaşımını kullanarak, yalnızca bir silindirin yeni yüzeye ulaşmış olduğu kısa geçiş süresini ihmal ediyoruz. Çizgisel hızda da açısal hızda da impulsif bir değişim olmaz.

Her iki silindir de yeni yüzeyde kaymaya başladığında, yukarıda her iki silindirin kaydığı durum için elde edilen sonuçlarda μ_k yerine μ'_k yazılır:

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

Bu nicelikler sabittir.

Kalan $s - d$ mesafesi boyunca,

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

dolayısıyla her iki silindirin merkezinin hızı

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

Bu kesimde geçen süre, ortalama hızdan bulunur:

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

buradan

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Sabit açısal ivmelerin integrali alınırsa

$$\omega_r = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 - q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d},$$

$$\omega_f = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 + q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Her iki silindirin de kaymaya başladığı öncülü, tutarlı bir yokuş aşağı kayma rejimi gerektirir. Nitekim, yeni kesime girişin hemen ardından,

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i) \Delta\tau,$$

dolayısıyla koşul, tepki kuvvetlerinin negatif olmamasıyla birlikte $a_1 > R\alpha'_f$ 'dir. Azalmış statik sürtünme katsayısı μ'_s , tutunmanın kaybolmasını belirler; ancak her iki temas noktası da kaymaya başladıktan sonraki hız ifadelerine girmez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.