

IPhO 2002

Теоретические задачи и решения · Бали, Индонезия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/2002/

Задача 1: Георадар

Георадар (GPR) используется для обнаружения и определения положения подземных объектов вблизи поверхности посредством излучения электромагнитных волн в грунт и приёма волн, отражённых от этих объектов. Антенна и приёмник находятся непосредственно на поверхности грунта в одной и той же точке.

Линейно поляризованная плоская электромагнитная волна с угловой частотой ω , распространяющаяся в направлении z , описывается следующим выражением для её поля:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

где E_0 — постоянная, α — коэффициент затухания, а β — волновое число, которые выражаются соответственно следующим образом:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

Здесь μ , ε , и σ обозначают соответственно магнитную проницаемость, диэлектрическую проницаемость и удельную электрическую проводимость.

Сигнал перестаёт обнаруживаться, когда амплитуда сигнала георадара, достигающего объекта, становится меньше $1/e$ ($\approx 37\%$) от её начального значения. Обычно используется электромагнитная волна с изменяемой частотой (10 МГц – 1000 МГц), что позволяет регулировать дальность обнаружения и разрешение.

Эффективность георадара зависит от его разрешения. Разрешение определяется минимальным расстоянием между двумя соседними отражателями, которые можно различить. При этом минимальном расстоянии разность фаз двух отражённых волн на приёмнике должна составлять не менее 180° .

Вопросы:

(Дано: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Н/м и $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м)

1. Предположим, что грунт немагнитный ($\mu = \mu_0$) и выполняется условие $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$.

Используя уравнения (1) и (2), выведите выражение для скорости распространения v через μ и ε [1.0 балла].

2. Определите максимальную глубину обнаружения объекта в грунте с удельной проводимостью 1.0 мСм/м и диэлектрической проницаемостью $9\epsilon_0$, для которого выполняется условие $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$, ($S = \text{ohm}^{-1}$; используйте $\mu = \mu_0$). **[2.0 балла]**
3. Рассмотрим два параллельных проводящих стержня, расположенных горизонтально в грунте. Стержни находятся на глубине 4 метра. Известно, что удельная проводимость грунта равна 1.0 мСм/м , а диэлектрическая проницаемость — $9\epsilon_0$. Предположим, что измерение георадаром проводится приблизительно над одним из стержней. Считайте, что используется точечный приёмник. Определите минимальную частоту, необходимую для получения поперечного разрешения 50 см **[3.5 балла]**.
4. Чтобы определить глубину залегания стержня d в том же грунте, рассмотрим измерения, проведённые вдоль линии, перпендикулярной стержню. Результат представлен на следующем рисунке:

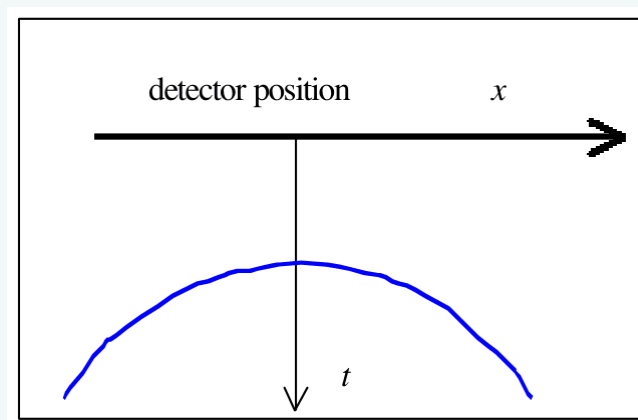


График зависимости времени распространения t от положения приёмника x , $t_{\min} = 100 \text{ ns}$.

Выведите зависимость t от x и определите d **[3.5 балла]**.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. В указанном пределе малых потерь

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

2. Максимальная глубина обнаружения равна

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. При глубине залегания стержней $h = 4 \text{ m}$ и поперечном расстоянии между ними $s = 0.50 \text{ m}$

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. Выбирая $x = 0$ непосредственно над стержнем, получаем

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m.}$$

Решение

1. Скорость распространения

Для точки с постоянной фазой выполняется условие

$$\omega t - \beta z = \text{постоянная.}$$

Дифференцируя, получаем фазовую скорость:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Введём малый безразмерный параметр

$$q = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

Используя биномиальное разложение, получаем

$$\sqrt{1 + q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

Поэтому из уравнения (2) следует

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu \epsilon}{2} \left(2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

Оставляя главный член, получаем

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}.$$

Для немагнитного грунта $\mu = \mu_0$. В этом приближении β пропорционально ω , поэтому дисперсией можно пренебречь и групповая скорость также равна этому значению.

2. Максимальная глубина обнаружения

Для коэффициента затухания сохраним первый ненулевой член того же разложения:

$$\alpha \simeq \omega \left[\frac{\mu \epsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Таким образом, в этом приближении коэффициент затухания не зависит от частоты.

Для объекта, находящегося непосредственно под антенной на глубине D , уравнение (1) даёт следующее отношение амплитуды падающей волны к начальной амплитуде:

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

В условии задачи порог задан для сигнала, **достигающего объекта**, поэтому расстояние распространения, входящее в это условие, равно D . На предельной глубине

$$e^{-\alpha D_{\max}} = \frac{1}{e},$$

откуда

$$D_{\max} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

Используя

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

получаем

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

Следовательно,

$$D_{\max} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. Минимальная частота для поперечного разрешения 50 см

Рассмотрим вертикальную плоскость, перпендикулярную стержням. Обозначим их общую глубину залегания через h , поперечное расстояние между ними — через s и расположим антенну и приёмник непосредственно над первым стержнем.

Расстояния до двух стержней в одну сторону равны

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

Поскольку передатчик и приёмник находятся в одной точке, отражённые сигналы проходят расстояния $2r_1$ и $2r_2$. Поэтому разность их хода равна

$$\Delta L = 2 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Если считать проводящие стержни эквивалентными отражателями, одинаковый для них фазовый сдвиг при отражении сокращается. Разность фаз на приёмнике равна

$$\Delta \phi = \beta \Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Заданный критерий разрешения имеет вид $\Delta \phi \geq \pi$. Минимальная частота соответствует равенству:

$$f_{\min} = \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}.$$

Скорость волны в этом грунте равна

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\varepsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

При $h = 4 \text{ m}$ и $s = 0.50 \text{ m}$

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

Таким образом,

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

или, с разумной точностью,

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

Приближение малого расстояния между стержнями даёт тот же результат после округления:

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

Требуемая частота лежит в указанном диапазоне 10–1000 MHz. Кроме того, при вычисленной частоте

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \varepsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

поэтому приближение малых потерь согласуется с полученным результатом. Оба стержня также находятся в пределах дальности обнаружения, найденной в пункте 2.

4. Кривая времени распространения и глубина залегания стержня

Выберем начало горизонтальной координаты $x = 0$ непосредственно над подземным стержнем. В однородном грунте расстояние от антенны до стержня в одну сторону равно

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Измеренное время распространения включает путь до стержня и обратно:

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Кратчайший путь соответствует $x = 0$, что даёт

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

Таким образом,

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

Подставляя минимальное время распространения в выражение для кривой, получаем

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5.0 \text{ m}} \right)^2}.$$

Это ветвь гиперболы, соответствующая положительному времени:

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

Она симметрична относительно $x = 0$, имеет минимальное время распространения 100 ns непосредственно над стержнем и возрастает с увеличением $|x|$. При $|x| \gg d$

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

Поскольку ось времени на рисунке направлена вниз, большие времена распространения изображаются ниже на странице, как и показано на рисунке.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Обнаружение электрических сигналов

Некоторые морские животные способны обнаруживать других животных на некотором расстоянии благодаря электрическим токам, возникающим у тех при дыхании или других процессах, связанных с сокращением мышц. Некоторые хищники используют этот электрический сигнал, чтобы определять местонахождение своей добычи, даже когда она зарыта в песке.

Физический механизм возникновения тока у добычи и его обнаружения хищником можно описать с помощью модели, представленной на рисунке II-1. Ток, создаваемый добычей, течёт между двумя сферами с положительным и отрицательным потенциалами в её теле. Расстояние между центрами двух сфер равно l_s , радиус каждой из них равен r_s и много меньше l_s . Удельное сопротивление морской воды равно ρ . Предположим, что удельное сопротивление тела добычи такое же, как у окружающей морской воды; это означает, что границей тела добычи, показанной на рисунке, можно пренебречь.

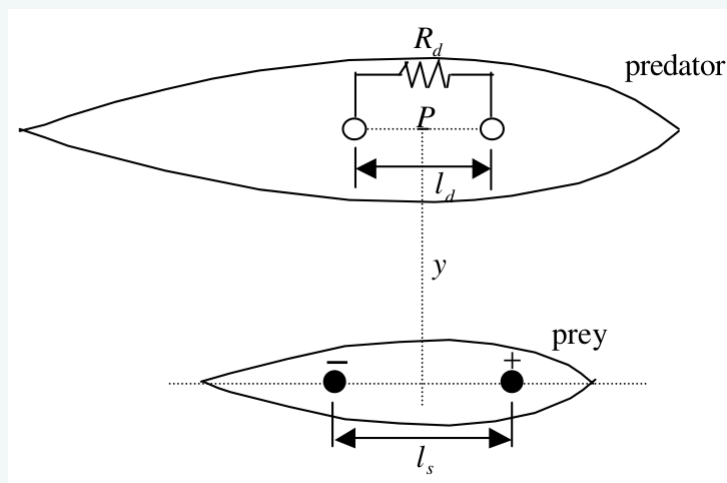


Рисунок II-1. Модель, описывающая регистрацию хищником электрической мощности, поступающей от добычи.

Чтобы описать регистрацию хищником электрической мощности, поступающей от добычи, детектор аналогичным образом моделируется двумя сферами на теле хищника, находящимися в контакте с окружающей морской водой и расположенными параллельно паре сфер в теле добычи. Расстояние между ними равно l_d , радиус каждой из них равен r_d и много меньше l_d . При этом центр детектора находится на расстоянии y непосредственно над источником, а линия, соединяющая две сферы, параллельна электрическому полю, как показано на рисунке II-1. Величины l_s и l_d также много меньше y . Предполагается, что

напряжённость электрического поля вдоль линии, соединяющей две сферы, постоянна. Таким образом, детектор образует замкнутую электрическую цепь, соединяющую добычу, окружающую морскую воду и хищника, как показано на рисунке II-2.

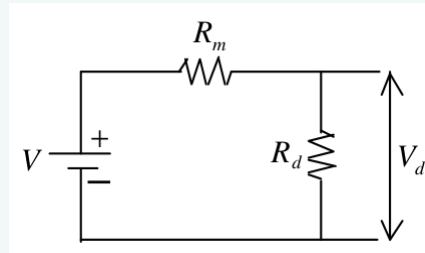


Рисунок II-2. Эквивалентная замкнутая электрическая цепь, включающая хищника, регистрирующего сигнал, добычу и окружающую морскую воду.

На рисунке V — разность потенциалов между сферами детектора, обусловленная электрическим полем, создаваемым добычей, а R_m — внутреннее сопротивление, обусловленное окружающей морской водой. Далее, V_d и R_d — соответственно разность потенциалов между сферами детектора и сопротивление чувствительного элемента внутри хищника.

Вопросы:

1. Определите вектор плотности тока $\vec{j}$ (ток на единицу площади), создаваемого точечным источником тока I_s на расстоянии r в бесконечной среде. **[1.5 балла]**
2. На основании закона $\vec{E} = \rho \vec{j}$ определите напряжённость электрического поля $\vec{E}_p$ посередине между сферами детектора (в точке P) при заданном токе I_s , текущем между двумя сферами в теле добычи **[2.0 балла]**.
3. Для того же тока I_s определите разность потенциалов между сферами источника (V_s) в теле добычи **[1.5 балла]**. Определите сопротивление между двумя сферами источника (R_s) **[0.5 балла]** и мощность, вырабатываемую источником (P_s) **[0.5 балла]**.
4. Определите R_m **[0.5 балла]**, V_d **[1.0 балла]** на рисунке II-2, а также вычислите мощность, передаваемую от источника к детектору (P_d) **[0.5 балла]**.
5. Определите оптимальное значение R_d , при котором регистрируемая мощность максимальна **[1.5 балла]**, а также определите максимальную мощность **[0.5 балла]**.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $\hat{x}$ направлен от отрицательной сферы добычи к её положительной сфере. Приведённые ниже напряжения представляют собой положительные величины. В результатах сохранены главные члены при указанных предположениях

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y.$$

В условии задачи не приведены численные значения параметров, поэтому ответы даны в буквенном виде.

1. Если $\hat{\mathbf{r}}$ направлен от точечного источника,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

2. Поле направлено от стороны положительного источника к стороне отрицательного источника:

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

3. Напряжение, сопротивление и мощность источника равны

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Сопротивление морской воды и напряжение холостого хода детектора равны

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

Следовательно,

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. Максимальная регистрируемая мощность достигается при

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Её значение равно

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

Решение

1. Плотность тока точечного источника тока

В однородной изотропной бесконечной среде сферическая симметрия требует, чтобы плотность тока была направлена радиально и имела одинаковый модуль во всех точках сферы с центром в источнике.

Из условия сохранения тока получаем

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

Следовательно,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Для положительного источника ток направлен наружу; для стока с тем же током знак противоположен. Единица плотности тока в СИ — A m^{-2} .

2. Электрическое поле в точке Р

Поместим середину отрезка между двумя сферами добычи в начало координат. Положительная сфера находится в точке $x = l_s/2$, отрицательная — в точке $x = -l_s/2$, а точка Р имеет координаты $(0, y)$.

Поскольку размеры сфер малы по сравнению с расстоянием между ними и расстоянием от них до Р, заменим их точечным источником $+I_s$ и точечным стоком $-I_s$. Их одинаковое расстояние до Р равно

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

По принципу суперпозиции,

$$\begin{aligned}\vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[\left(-\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) - \left(\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{x}.\end{aligned}$$

Вертикальные составляющие взаимно компенсируются, а горизонтальные складываются.

Используя закон Ома в локальной форме, $\vec{E} = \rho \vec{j}$, получаем

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi (y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{x}.$$

Это выражение является точным в приближении точечных источников. При $l_s \ll y$

$$\boxed{\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{x}}.$$

Таким образом, Р лежит на экваториальной линии токового диполя, поле которого убывает как y^{-3} .

3. Напряжение, сопротивление и мощность источника

Для одиночного точечного источника радиальная составляющая электрического поля равна

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

Принимая потенциал на бесконечности равным нулю, получаем

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

Сток тока I_s создаёт потенциал, противоположный по знаку.

Для каждой из сфер источника модуль её собственного вклада в потенциал на поверхности равен

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Вклад другой сферы имеет порядок $\rho I_s / (4\pi l_s)$, составляет долю r_s / l_s от собственного вклада и в главном приближении не учитывается. Поэтому

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Следовательно, разность потенциалов равна

$$V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}.$$

Для полноты отметим, что учёт взаимного вклада двух монополей в потенциал дал бы

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right),$$

где вторым членом можно пренебречь при указанном предположении.

Сопротивление между сферами источника определяется из закона Ома:

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

Электрическая мощность, вырабатываемая добычей, равна

$$P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Сопротивление морской воды, напряжение детектора и регистрируемая мощность

Ток, проходящий через детектор, входит в окружающую воду у одной сферы детектора и выходит из неё у другой. Сопротивление этого пути получается применением результата пункта 3 к сферам радиуса r_d , разделённым расстоянием l_d . Поскольку $r_d \ll l_d$,

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Физически каждый малый сферический контакт вносит сопротивление растекания $\rho / (4\pi r_d)$.

Электрическое поле добычи приблизительно однородно вдоль детектора, поскольку $l_d \ll y$.

Правая сфера детектора имеет более высокий потенциал, поэтому напряжение холостого хода равно

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}. \end{aligned}$$

Для эквивалентной цепи на рисунке II-2 второе правило Кирхгофа даёт

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

Следовательно,

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho / (2\pi r_d)}.$$

Мощность, выделяющаяся в чувствительном элементе, равна

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

Через заданные параметры она выражается следующим образом:

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

5. Оптимальное сопротивление детектора и максимальная мощность

При заданных токе источника и геометрии величины V и R_m постоянны. Дифференцируя регистрируемую мощность по R_d , получаем

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

Производная положительна при $R_d < R_m$ и отрицательна при $R_d > R_m$. Следовательно, максимум достигается при

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Это условие передачи максимальной мощности.

При таком сопротивлении $V_d = V/2$, откуда

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m}.$$

Подстановка даёт

$$\begin{aligned} P_{d,\text{max}} &\simeq \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho} \\ &= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}. \end{aligned}$$

Используя мощность источника из пункта 3, это можно также записать в виде

$$\frac{P_{d,\text{max}}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

Зависимость y^{-6} возникает в результате возведения в квадрат дипольного поля, убывающего как y^{-3} .

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Тяжёлое транспортное средство, движущееся по

наклонной дороге

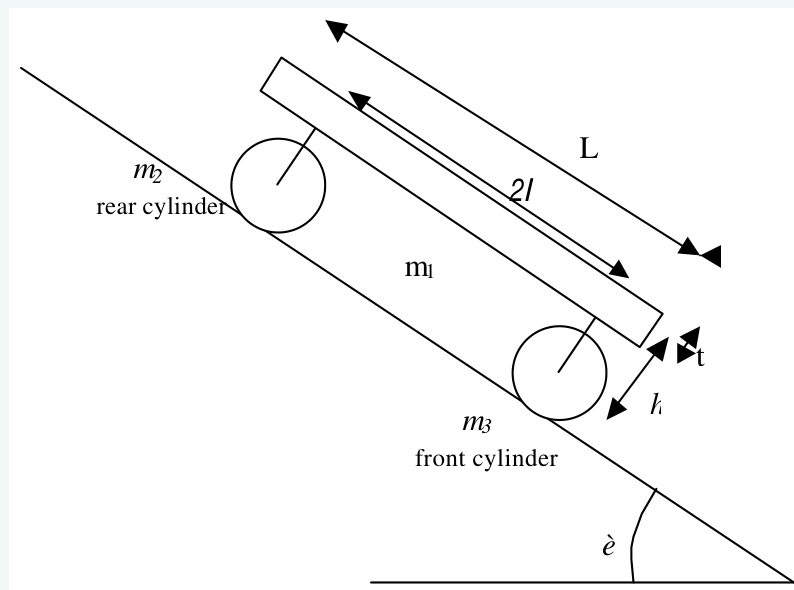


Рисунок III-1: Упрощённая модель тяжёлого транспортного средства, движущегося по наклонной дороге.

На рисунке выше представлена упрощённая модель тяжёлого транспортного средства (дорожного катка) с одним задним и одним передним цилиндром, служащими колёсами, на дороге с углом наклона θ (на рисунке обозначен как ϵ), как показано на рисунке III-1. Каждый из двух цилиндров имеет полную массу M ($m_2 = m_3 = M$) и состоит из цилиндрической оболочки с внешним радиусом R_o , внутренним радиусом $R_i = 0.8R_o$ и восьми спиц общей массой $0.2M$. Массой ходовой части, поддерживающей корпус транспортного средства, можно пренебречь. Модель цилиндра показана на рисунке III-2. Транспортное средство движется вниз по дороге под действием сил тяжести и трения. Передний и задний цилиндры расположены симметрично относительно транспортного средства.

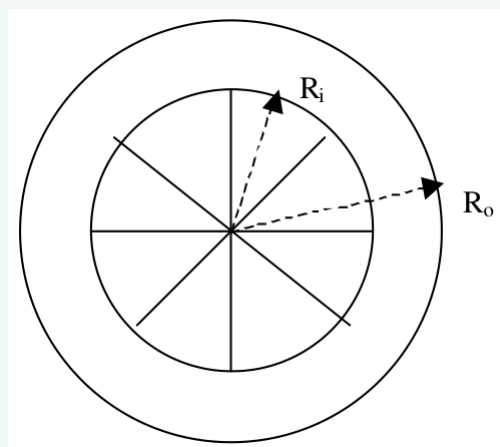


Рисунок III-2: Упрощённая модель цилиндров.

Коэффициенты трения покоя и скольжения между цилиндром и дорогой равны соответственно μ_s и μ_k . Корпус транспортного средства имеет массу $5M$, длину L и толщину t . Расстояние между передним и задним цилиндрами равно $2l$, а расстояние от

центра цилиндра до основания корпуса транспортного средства равно h . Считайте, что трением качения между цилиндром и его осью можно пренебречь.

Вопросы:

1. Вычислите момент инерции каждого из цилиндров **[1.5 балла]**.
2. Изобразите все силы, действующие на корпус, передний и задний цилиндры. Запишите уравнения движения для каждой из этих частей **[2.5 балла]**.
3. Предполагается, что транспортное средство начинает движение из состояния покоя и далее свободно движется под действием силы тяжести. Укажите все возможные виды движения системы и выведите выражения для соответствующих ускорений через заданные физические величины **[4.0 балла]**.
4. Предположим, что после прохождения расстояния d из состояния покоя при качении без проскальзывания транспортное средство въезжает на участок дороги, где все коэффициенты трения уменьшаются до меньших постоянных значений μ'_s и μ'_k , так что оба цилиндра начинают скользить. Вычислите линейную и угловую скорости каждого цилиндра после того, как транспортное средство пройдёт общее расстояние s метров. При этом предполагается, что d и s значительно больше размеров транспортного средства **[2.0 балла]**

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Обозначим угол наклона через θ и введём обозначения

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

Индексы r, f обозначают задний и передний цилиндры. Положительное направление линейного ускорения — вниз по склону; положительное направление углового ускорения соответствует качению вниз по склону.

1. Момент инерции каждого из цилиндров

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

Его единица СИ — kg m^2 .

2. Уравнения движения

Пусть сила, действующая со стороны оси на цилиндр i , имеет составляющие P_i вниз по склону и Q_i к дороге. Пусть N_i — действующая на него нормальная реакция дороги, а f_i — сила трения, направленная вверх по склону. Это алгебраические составляющие относительно выбранных направлений.

Для корпуса и невесомой ходовой части

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

Для каждого цилиндра

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

Следовательно,

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

3. Режимы качения и скольжения

Для краткости определим

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa MR}.$$

Задний цилиндр	Передний цилиндр	Общее линейное ускорение a	α_r	α_f
Катится	Катится	$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$	a_0/R	a_0/R
Скользит	Катится	$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$	a_{SR}/R
Катится	Скользит	$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$	a_{RS}/R	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$
Скользит	Скользит	$a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$

Это уравнения для четырёх режимов контакта. Для каждого из них необходимо выполнение $N_r, N_f \geq 0$, а также условий

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i \quad \text{для катящегося цилиндра,}$$

$$a > R\alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{для цилиндра, скользящего вниз по склону из состояния покоя.}$$

Равенства описывают границы между режимами.

Оба цилиндра катятся из состояния покоя, если

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Задний цилиндр первым достигает предела трения покоя. Поэтому потеря сцепления при качении обоих цилиндров приводит к скольжению только заднего цилиндра либо сразу к скольжению обоих; скольжение только переднего цилиндра представляет собой альтернативный смешанный режим контакта, возможный при выполнении соответствующих условий, а не первую потерю сцепления при таком качении.

4. Скорости после въезда на участок с меньшим трением

Для $s \geq d$ положим

$$v_d = \sqrt{2a_0d}, \quad a_1 = g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta),$$

$$v = \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s-d)}, \quad \Delta\tau = \frac{2(s-d)}{v+v_d}.$$

Тогда

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

Знак минус относится к заднему цилиндру. Линейные скорости измеряются в m s^{-1} , а угловые скорости — в rad s^{-1} .

Решение

1. Момент инерции

Будем считать оболочку однородной, а каждую спицу — однородным тонким радиальным стержнем, идущим от оси до R_i .

Масса оболочки равна $0.8M$, поэтому её момент инерции относительно оси цилиндра равен

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

Масса каждой спицы равна $0.2M/8$. Однородный стержень длиной R_i , вращающийся вокруг оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню, имеет момент инерции $mR_i^2/3$. Следовательно,

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

Используя $R_i = 0.8R$, получаем

$$I = MR^2 \left[\frac{0.8}{2}(1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3}(0.8^2) \right]$$

$$= MR^2 \left(\frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right).$$

Поэтому

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

2. Схемы сил и уравнения движения

Направим ось x вниз по склону вдоль дороги, а ось y — перпендикулярно дороге, от её поверхности.

Используем подразумеваемую модель транспортного средства с жёсткой конструкцией: оба цилиндра остаются в контакте с прямолинейной дорогой, их центры имеют одинаковое ускорение a , а корпус остаётся параллельным дороге. Поэтому его угловое ускорение равно

нулю. Центр масс корпуса находится посередине между осями цилиндров и на расстоянии по перпендикуляру

$$b = h + \frac{t}{2}$$

выше линии, соединяющей эти оси.

На схемах сил следует показать следующее.

- **Корпус вместе с невесомой ходовой частью:** сила тяжести $5Mg$, направленная вертикально вниз и приложенная в центре масс; в положении каждой оси — сила с составляющими $-P_i$ вдоль дороги и $+Q_i$ перпендикулярно ей.
- **Задний цилиндр:** сила тяжести Mg , направленная вертикально вниз через его центр; составляющие силы со стороны оси P_r вниз по склону и Q_r к дороге; реакция дороги N_r , перпендикулярная дороге в точке контакта; сила трения f_r , направленная вверх по склону в точке контакта.
- **Передний цилиндр:** соответствующие силы Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f .

Стрелки сил со стороны осей задают направления отсчёта: отдельная алгебраическая составляющая может быть отрицательной. В рассматриваемых здесь режимах скольжения вниз по склону сила трения направлена вверх по склону; она также создаёт момент сил, необходимый для качения вниз по склону.

Второй закон Ньютона для корпуса даёт

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

и

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

При вычислении моментов сил относительно центра масс корпуса координаты двух осей вдоль дороги равны $-l, +l$, а координата по перпендикуляру равна $-b$. Из равенства нулю углового ускорения следует

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

Таким образом,

$$\boxed{l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).}$$

Для цилиндра i уравнения поступательного движения имеют вид

$$\begin{aligned} Ma &= Mg \sin \theta + P_i - f_i, \\ N_i - Mg \cos \theta - Q_i &= 0. \end{aligned}$$

Только сила трения о дорогу создаёт момент относительно оси цилиндра, поскольку трением в подшипниках пренебрегаем:

$$\boxed{I\alpha_i = Rf_i.}$$

Складывая три уравнения для движения вниз по склону, исключаем внутренние силы со стороны осей:

$$\boxed{7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).}$$

Нормальные реакции удовлетворяют соотношению

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

Кроме того,

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

Используя уравнение движения корпуса вниз по склону, получаем

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

Поэтому

$$N_r(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)],$$

$$N_f(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)].$$

Эти уравнения учитывают перераспределение нагрузки в сторону переднего цилиндра.

Эквивалентная запись:

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

Длина корпуса L в уравнения не входит: корпус не имеет углового ускорения, а положение его центра масс определяется симметрией.

3. Возможные виды движения и соответствующие ускорения

Предположим, что выполняется обычное соотношение

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

Для цилиндра, катящегося без проскальзывания,

$$a = R\alpha_i.$$

Тогда из уравнения его вращательного движения следует

$$f_i = \frac{I}{R^2}a = \kappa Ma.$$

Эта сила должна удовлетворять ограничению для трения покоя

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i.$$

Для цилиндра, точка контакта которого скользит вниз по склону,

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa MR}.$$

Для проверки направления скольжения определим направленную вниз по склону скорость точки контакта цилиндра относительно дороги:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

Для движения из состояния покоя решение со скольжением и постоянными ускорениями даёт

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

Таким образом, направленная вверх по склону сила трения скольжения согласуется со скольжением вниз по склону только при условии

$$a > R\alpha_i.$$

Все приведённые ниже формулы также требуют неотрицательности нормальных реакций. Обращение реакции в нуль указывает на возможную потерю контакта; за этой границей принятая модель с двумя контактами и без продольного наклона корпуса больше не применима.

Оба цилиндра катятся без проскальзывания.

В этом случае

$$f_r = f_f = \kappa M a.$$

Суммарное уравнение движения вниз по склону принимает вид

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149} g \sin \theta \simeq 0.8336 g \sin \theta,$$

и

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

Требуемая сила трения в каждом из контактов равна

$$f_0 = \frac{7\kappa M g \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

Обозначив

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

получаем реакции

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2} (\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

Поскольку $N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$, задний контакт накладывает более строгое условие на трение покоя:

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

После преобразования получаем

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

или

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Для независимой проверки заметим, что при качении без проскальзывания кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2 \left(\frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

Приравнявая её увеличение убыли гравитационной потенциальной энергии, получаем то же значение a_0 .

Задний цилиндр скользит; передний цилиндр катится.

Теперь

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa M a.$$

Поэтому

$$(7 + \kappa) M a = 7 M g \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

Подставляя нормальную реакцию, получаем

$$(7 + \kappa) a = 7 g \sin \theta - \frac{7 \mu_k}{2} [g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

Собирая члены, содержащие a , находим

$$a_{SR} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

Угловые ускорения равны

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M R}, \quad \alpha_f = \frac{a_{SR}}{R}.$$

Условия согласованности имеют вид

$$a_{SR} > \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M}, \quad \kappa M a_{SR} \leq \mu_s N_f(a_{SR}).$$

Первое обеспечивает скольжение задней точки контакта вниз по склону; второе позволяет переднему цилиндру продолжать катиться без проскальзывания.

Именно этот смешанный режим следует проверять, когда задний цилиндр теряет сцепление, обеспечиваемое трением покоя. Если передний контакт не может обеспечить требуемую силу трения покоя, оба цилиндра должны скользить.

Задний цилиндр катится; передний цилиндр скользит.

Для полноты рассмотрим другую смешанную комбинацию режимов контакта, для которой

$$f_r = \kappa M a, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

Тогда

$$(7 + \kappa) M a = 7 M g \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

откуда получаем

$$a_{RS} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

Угловые ускорения в этом случае равны

$$\alpha_r = \frac{a_{RS}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M R}.$$

Условия согласованности имеют вид

$$\kappa M a_{RS} \leq \mu_s N_r(a_{RS}), \quad a_{RS} > \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M}.$$

Это решение для состояния со скольжением, допустимое при выполнении соответствующих условий. Оно не описывает ситуацию, в которой передний цилиндр первым теряет сцепление при качении обоих цилиндров, поскольку при таком качении требуются одинаковые силы трения в обоих контактах, а нормальная реакция переднего контакта больше.

Оба цилиндра скользят.

В этом случае

$$f_r + f_f = \mu_k(N_r + N_f) = 7\mu_k Mg \cos \theta.$$

Следовательно,

$$a_{SS} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

Поскольку

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

нормальные реакции принимают вид

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu_k).$$

Поэтому

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu_k).$$

Передний цилиндр имеет большее угловое ускорение. Следовательно, более строгое условие скольжения обеих точек контакта вниз по склону из состояния покоя имеет вид

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

При $0 \leq \theta < \pi/2$ оно записывается как

$$\tan \theta > \mu_k \left[1 + \frac{7}{2\kappa}(1 + q\mu_k) \right].$$

Для сохранения обоих контактов также необходимо

$$q\mu_k \leq 1.$$

Если $\mu_k = 0$, цилиндры, начав движение из состояния покоя, скользят чисто поступательно:

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

Важно различать начало скольжения и его продолжение: трение покоя определяет, теряется ли сцепление в контакте, тогда как приведённые выше условия для трения скольжения определяют согласованность предполагаемого состояния со скольжением. Решение со скольжением не должно заменять допустимое решение без проскальзывания только потому, что $\mu_k < \mu_s$.

4. Движение на участке с меньшим трением

На начальном расстоянии d , проходимом при качении без проскальзывания, ускорение равно a_0 . Для движения из состояния покоя

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

Пренебрежём коротким переходным этапом, во время которого только один цилиндр уже достиг новой поверхности, используя указанное в условии приближение больших расстояний. Ни линейная, ни угловая скорость не изменяются скачком.

Когда оба цилиндра скользят по новой поверхности, заменим μ_k на μ'_k в полученных выше результатах для скольжения обоих цилиндров:

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2} (1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

Эти величины постоянны.

На оставшемся расстоянии $s - d$

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

так что центры обоих цилиндров имеют скорость

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

Время движения на этом участке определяется через среднюю скорость:

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

откуда

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Интегрируя постоянные угловые ускорения, получаем

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 - q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}, \\ \omega_f &= \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 + q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}. \end{aligned}$$

Предположение о том, что оба цилиндра начинают скользить, требует согласованного режима скольжения вниз по склону. Действительно, сразу после въезда

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i) \Delta\tau,$$

поэтому условие имеет вид $a_1 > R\alpha'_f$, наряду с неотрицательностью реакций. Уменьшенный коэффициент трения покоя μ'_s определяет потерю сцепления, но не входит в выражения для последующих скоростей, когда в обоих контактах происходит скольжение.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.