

IPhO 2002

Problemas teóricos y soluciones · Bali, Indonesia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2002/

Problema 1: Radar de penetración terrestre

El radar de penetración terrestre (GPR) se utiliza para detectar y localizar objetos subterráneos próximos a la superficie mediante la transmisión de ondas electromagnéticas al interior del terreno y la recepción de las ondas reflejadas por dichos objetos. La antena y el detector se encuentran directamente sobre el terreno y están situados en el mismo punto.

Una onda electromagnética plana, linealmente polarizada, de frecuencia angular ω , que se propaga en la dirección z , se representa mediante la siguiente expresión de su campo:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

donde E_0 es constante, α es el coeficiente de atenuación y β es el número de onda, expresados respectivamente de la siguiente manera:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

donde μ , ε , y σ denotan la permeabilidad magnética, la permitividad eléctrica y la conductividad eléctrica, respectivamente.

La señal deja de detectarse cuando la amplitud de la señal de radar que llega al objeto cae por debajo de $1/e$ ($\approx 37\%$) de su valor inicial. Habitualmente se utiliza una onda electromagnética de frecuencia variable (10 MHz – 1000 MHz) para poder ajustar el alcance y la resolución de la detección.

El rendimiento del GPR depende de su resolución. La resolución viene dada por la separación mínima entre los dos reflectores adyacentes que se desea detectar. Esta separación mínima debe producir una diferencia de fase mínima de 180° entre las dos ondas reflejadas en el detector.

Preguntas:

(Datos: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m y $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m)

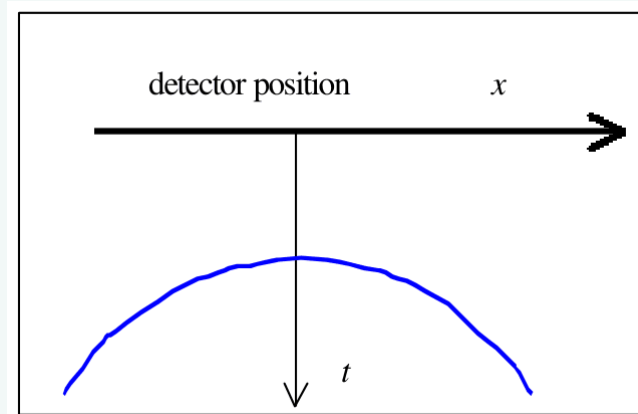
1. Suponga que el terreno es no magnético ($\mu = \mu_0$) y satisface la condición $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$.

Deduzca la expresión de la velocidad de propagación v en función de μ y ε , utilizando las ecuaciones (1) y (2) **[1.0 pts]**.

2. Determine la profundidad máxima de detección de un objeto en un terreno con una conductividad de 1.0 mS/m y una permitividad de $9\varepsilon_0$, que satisface la condición

$\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$, ($S = \text{ohm}^{-1}$; utilice $\mu = \mu_0$). **[2.0 pts]**

3. Considere dos varillas conductoras paralelas enterradas horizontalmente en el terreno. Las varillas están a 4 metros de profundidad. Se sabe que el terreno tiene una conductividad de 1.0 mS/m y una permitividad de $9\epsilon_0$. Suponga que la medición con GPR se realiza en una posición aproximadamente sobre una de las varillas. Suponga que se utiliza un detector puntual. Determine la frecuencia mínima necesaria para obtener una resolución lateral de 50 cm [3.5 pts].
4. Para determinar la profundidad d de una varilla enterrada en el mismo terreno, considere las mediciones realizadas a lo largo de una línea perpendicular a la varilla. El resultado se describe en la siguiente figura:



Gráfica del tiempo de recorrido t en función de la posición del detector x , $t_{\min} = 100 \text{ ns}$.

Deduzca t en función de x y determine d [3.5 pts].

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. En el límite de bajas pérdidas indicado,

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

2. La profundidad máxima de detección es

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. Con una profundidad de las varillas $h = 4 \text{ m}$ y una separación lateral $s = 0.50 \text{ m}$,

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. Tomando $x = 0$ directamente sobre la varilla,

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m}.$$

Solución

1. Velocidad de propagación

Un punto de fase constante satisface

$$\omega t - \beta z = \text{constante}.$$

Al derivar se obtiene la velocidad de fase:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Definimos el parámetro adimensional pequeño

$$q = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

Utilizando el desarrollo binomial,

$$\sqrt{1 + q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

Por tanto, la ecuación (2) da

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

Conservando el término dominante,

$$\boxed{v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}}.$$

Para un terreno no magnético, $\mu = \mu_0$. A este orden, β es proporcional a ω , por lo que la dispersión es despreciable y la velocidad de grupo también es igual a este valor.

2. Profundidad máxima de detección

Para el coeficiente de atenuación, conservamos el primer término no nulo del mismo desarrollo:

$$\alpha \simeq \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Así pues, a este orden, el coeficiente de atenuación es independiente de la frecuencia.

Para un objeto situado directamente debajo de la antena a una profundidad D , la ecuación (1) da la razón de amplitudes de la onda incidente

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

El enunciado especifica el umbral para la señal **que llega al objeto**, por lo que la distancia de propagación que interviene en esta condición es D . A la profundidad límite,

$$e^{-\alpha D_{\text{max}}} = \frac{1}{e},$$

y, por tanto,

$$D_{\text{max}} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

Utilizando

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

obtenemos

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

Por tanto,

$$D_{\max} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. Frecuencia mínima para una resolución lateral de 50 cm

Trabajamos en el plano vertical perpendicular a las varillas. Sean h su profundidad común y s su separación lateral, y situemos la antena y el detector directamente sobre la primera varilla.

Las distancias de ida a las dos varillas son

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

Como el transmisor y el detector están en el mismo punto, las señales reflejadas recorren distancias $2r_1$ y $2r_2$. Por tanto, su diferencia de caminos es

$$\Delta L = 2 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Al tratar las varillas conductoras como reflectores equivalentes, su fase de reflexión común se cancela. La diferencia de fase en el detector es

$$\Delta\phi = \beta\Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

El criterio de resolución especificado es $\Delta\phi \geq \pi$. La frecuencia mínima se obtiene cuando se cumple la igualdad:

$$f_{\min} = \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}.$$

La velocidad de la onda en este terreno es

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\varepsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Para $h = 4 \text{ m}$ y $s = 0.50 \text{ m}$,

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

Así pues,

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

o, con una precisión razonable,

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

La aproximación para separaciones pequeñas da el mismo resultado redondeado:

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

La frecuencia requerida se encuentra dentro del intervalo indicado de 10–1000 MHz. Además, a la frecuencia calculada,

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \varepsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

por lo que la aproximación de bajas pérdidas es coherente. Ambas varillas se encuentran también dentro del alcance de detección obtenido en la parte 2.

4. Curva del tiempo de recorrido y profundidad de la varilla

Elegimos la coordenada horizontal $x = 0$ directamente sobre la varilla enterrada. En un terreno homogéneo, la distancia de ida desde la antena hasta la varilla es

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

El tiempo de recorrido medido incluye los trayectos de ida y vuelta:

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

El camino más corto se obtiene en $x = 0$, lo que da

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

En consecuencia,

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

Así pues,

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

Al sustituir el tiempo mínimo de recorrido en la expresión de la curva se obtiene

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5.0 \text{ m}} \right)^2}.$$

Esta es la rama de tiempos positivos de la hipérbola

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

Es simétrica respecto a $x = 0$, alcanza su tiempo mínimo de recorrido de 100 ns directamente sobre la varilla y crece con $|x|$. Para $|x| \gg d$,

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

Como el eje del tiempo de la figura apunta hacia abajo, los tiempos de recorrido mayores aparecen más abajo en la página, tal como se muestra.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Detección de señales eléctricas

Algunos animales marinos tienen la capacidad de detectar otras criaturas a cierta distancia gracias a las corrientes eléctricas que estas producen durante la respiración u otros procesos que implican contracción muscular. Algunos depredadores utilizan esta señal eléctrica para localizar a sus presas, incluso cuando están enterradas en la arena.

El mecanismo físico que subyace a la generación de corriente en la presa y a su detección por el depredador puede modelarse como se describe en la Figura II-1. La corriente generada por la presa circula entre dos esferas con potencial positivo y negativo situadas en el cuerpo de la presa. La distancia entre los centros de las dos esferas es l_s , y cada una tiene un radio r_s , mucho menor que l_s . La resistividad del agua de mar es ρ . Suponga que la resistividad del cuerpo de la presa es la misma que la del agua de mar circundante, lo que implica que puede ignorarse el contorno que rodea a la presa en la figura.

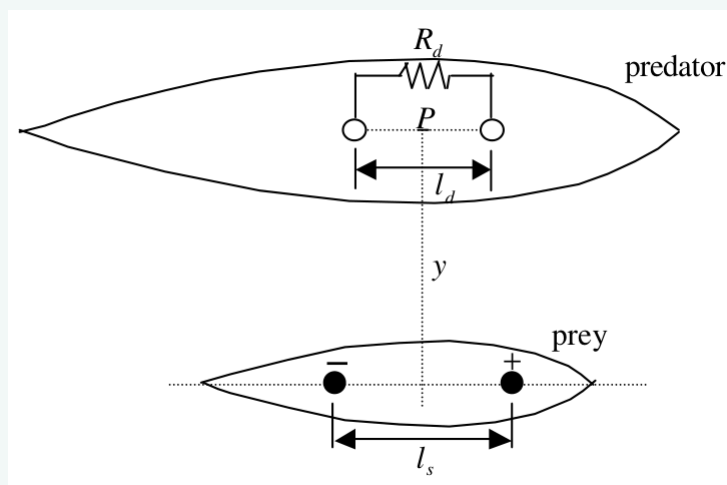


Figura II-1. Modelo que describe la detección de la potencia eléctrica procedente de una presa por parte de su depredador.

Para describir la detección por parte del depredador de la potencia eléctrica procedente de la presa, el detector se modela de manera similar mediante dos esferas situadas en el cuerpo del depredador y en contacto con el agua de mar circundante, dispuestas paralelamente al par de esferas del cuerpo de la presa. Están separadas por una distancia l_d , y cada una tiene un radio r_d , mucho menor que l_d . En este caso, el centro del detector se encuentra a una distancia y justo por encima de la fuente, y la línea que une las dos esferas es paralela al campo eléctrico, como se muestra en la Figura II-1. Tanto l_s como l_d son también mucho menores que y . Se supone que la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la línea que une las dos esferas es constante. Por tanto, el detector forma un circuito cerrado que conecta la presa, el agua de mar circundante y el depredador, como se describe en la Figura II-2.

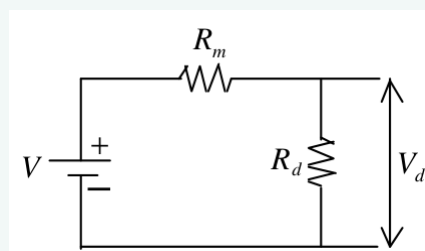


Figura II-2. Circuito cerrado equivalente que incluye al depredador que detecta la señal, la presa y el agua de mar circundante.

En la figura, V es la diferencia de potencial entre las esferas del detector debida al campo eléctrico inducido por la presa, y R_m es la resistencia interna debida al agua de mar circundante. Además, V_d y R_d son, respectivamente, la diferencia de potencial entre las esferas detectoras y la resistencia del elemento detector situado en el interior del depredador.

Preguntas:

1. Determine el vector densidad de corriente $\vec{j}$ (corriente por unidad de área) producido por una fuente puntual de corriente I_s a una distancia r en un medio infinito. **[1.5 puntos]**
2. A partir de la ley $\vec{E} = \rho\vec{j}$, determine la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}_p$ en el punto medio entre las esferas detectoras (en el punto P) para una corriente dada I_s que circula entre dos esferas situadas en el cuerpo de la presa **[2.0 puntos]**.
3. Determine, para la misma corriente I_s , la diferencia de potencial entre las esferas de la fuente (V_s) situadas en la presa **[1.5 puntos]**. Determine la resistencia entre las dos esferas de la fuente (R_s) **[0.5 puntos]** y la potencia producida por la fuente (P_s) **[0.5 puntos]**.
4. Determine R_m **[0.5 puntos]** y V_d **[1.0 puntos]** en la Figura II-2 y calcule también la potencia transferida de la fuente al detector (P_d) **[0.5 puntos]**.
5. Determine el valor óptimo de R_d que proporciona la máxima potencia detectada **[1.5 puntos]** y determine también la potencia máxima **[0.5 puntos]**.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $\hat{\mathbf{x}}$ el vector que apunta desde la esfera negativa de la presa hacia su esfera positiva. Las diferencias de potencial que se indican a continuación son magnitudes positivas. En los resultados se conservan los términos dominantes bajo las hipótesis indicadas

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y.$$

El problema no proporciona valores numéricos de los parámetros, por lo que las respuestas son simbólicas.

1. Con $\hat{\mathbf{r}}$ dirigido hacia fuera desde la fuente puntual,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

2. El campo apunta desde el lado de la fuente positiva hacia el lado de la fuente negativa:

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

3. La diferencia de potencial, la resistencia y la potencia de la fuente son

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. La resistencia del agua de mar y la diferencia de potencial del detector en circuito abierto son

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

Por consiguiente,

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. La potencia detectada es máxima cuando

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Su valor es

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

Solución

1. Densidad de corriente de una fuente puntual de corriente

En un medio homogéneo, isótropo e infinito, la simetría esférica exige que la densidad de corriente sea radial y tenga el mismo módulo en todos los puntos de una esfera centrada en la fuente.

La conservación de la corriente da

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

Por tanto,

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Para una fuente positiva, la corriente se dirige hacia fuera; un sumidero por el que circula la misma corriente tiene el signo opuesto. La densidad de corriente tiene unidades del SI A m^{-2} .

2. Campo eléctrico en P

Situemos el punto medio entre las dos esferas de la presa en el origen. La esfera positiva se encuentra en $x = l_s/2$, la esfera negativa en $x = -l_s/2$ y P en $(0, y)$.

Como las esferas son pequeñas en comparación con su separación y con su distancia a P, las sustituimos por una fuente puntual $+I_s$ y un sumidero puntual $-I_s$. Su distancia común a P es

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

Por superposición,

$$\begin{aligned}\vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[\left(-\frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) - \left(\frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Las componentes verticales se cancelan, mientras que las componentes horizontales se suman.

Utilizando la forma local de la ley de Ohm, $\vec{E} = \rho \vec{j}$,

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi(y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}}.$$

Esta expresión es exacta dentro de la aproximación de fuentes puntuales. Con $l_s \ll y$,

$$\boxed{\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}}.$$

Así, P se encuentra en la línea ecuatorial de un dipolo de corriente, cuyo campo decrece como y^{-3} .

3. Diferencia de potencial, resistencia y potencia de la fuente

Para una única fuente puntual, el campo eléctrico radial es

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

Tomando como cero el potencial en el infinito,

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

Un sumidero de corriente I_s produce el negativo de este potencial.

En cada esfera de la fuente, su propia contribución al potencial superficial tiene un módulo de

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

La contribución de la otra esfera es del orden de $\rho I_s/(4\pi l_s)$, menor en un factor r_s/l_s , y se desprecia en la aproximación de orden dominante. Por ello,

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

La diferencia de potencial es, por tanto,

$$\boxed{V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}}.$$

Para completar el análisis, si se conservara el potencial mutuo de los dos monopolos, se obtendría

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right),$$

cuyo segundo término es despreciable bajo la hipótesis indicada.

La resistencia vista entre las esferas de la fuente se obtiene de la ley de Ohm:

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

La potencia eléctrica suministrada por la presa es

$$P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Resistencia del agua de mar, diferencia de potencial del detector y potencia detectada

Una corriente que atraviesa el detector entra en el agua circundante por una de las esferas detectoras y sale de ella por la otra. La resistencia de este trayecto se obtiene aplicando el apartado 3 a esferas de radio r_d , separadas por l_d . Puesto que $r_d \ll l_d$,

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Físicamente, cada pequeño contacto esférico aporta una resistencia de dispersión $\rho/(4\pi r_d)$.

El campo eléctrico de la presa es aproximadamente uniforme a lo largo del detector porque $l_d \ll y$. La esfera detectora de la derecha se encuentra a un potencial mayor, por lo que la diferencia de potencial en circuito abierto es

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}. \end{aligned}$$

En el circuito equivalente de la Figura II-2, la ley de tensiones de Kirchhoff da

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

Por tanto,

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho/(2\pi r_d)}.$$

La potencia disipada en el elemento detector es

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

En función de los parámetros dados,

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

5. Resistencia óptima del detector y potencia máxima

Para la corriente de la fuente y la geometría dadas, V y R_m son constantes. Derivando la potencia detectada respecto de R_d ,

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

La derivada es positiva para $R_d < R_m$ y negativa para $R_d > R_m$. Por tanto, el máximo se alcanza cuando

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Esta es la condición de máxima transferencia de potencia.

Con esta resistencia, $V_d = V/2$, lo que da

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m}.$$

La sustitución conduce a

$$\begin{aligned} P_{d,\text{max}} &\simeq \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho} \\ &= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}. \end{aligned}$$

Utilizando la potencia de la fuente del apartado 3, esto también puede escribirse como

$$\frac{P_{d,\text{max}}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

La dependencia y^{-6} resulta de elevar al cuadrado el campo del dipolo, que decrece como y^{-3} .

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Un vehículo pesado que se mueve por una carretera inclinada

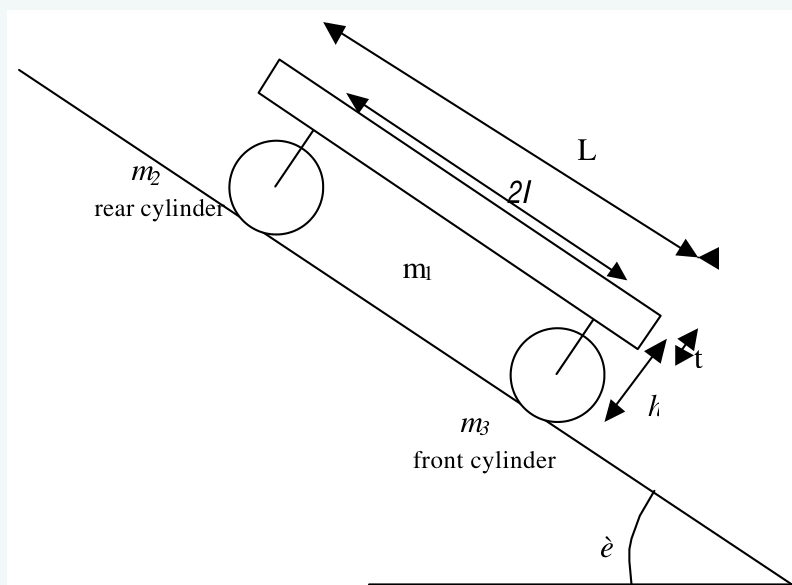


Figura III-1: Modelo simplificado de un vehículo pesado que se mueve por una carretera inclinada.

La figura anterior es un modelo simplificado de un vehículo pesado (apisonadora) cuyas ruedas son un cilindro trasero y otro delantero, sobre una carretera inclinada con un ángulo de inclinación θ (indicado como θ en la figura), como se muestra en la Figura III-1. Cada uno de los dos cilindros tiene una masa total M ($m_2 = m_3 = M$) y consta de una envolvente cilíndrica de radio exterior R_o , radio interior $R_i = 0.8R_o$ y ocho radios con una masa total de $0.2M$. La masa del bastidor que sostiene la carrocería del vehículo es despreciable. El cilindro puede modelarse como se muestra en la Figura III-2. El vehículo desciende por la carretera bajo la acción de las fuerzas gravitatoria y de rozamiento. Los cilindros delantero y trasero están situados simétricamente con respecto al vehículo.

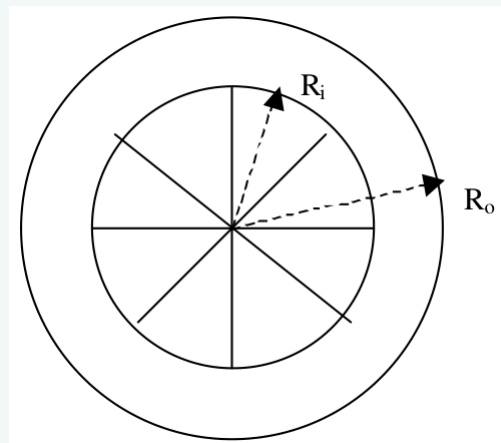


Figura III-2: Modelo simplificado de los cilindros.

Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el cilindro y la carretera son μ_s y μ_k , respectivamente. La carrocería del vehículo tiene una masa de $5M$, una longitud de L y un espesor de t . La distancia entre el cilindro delantero y el trasero es $2l$, mientras que la distancia desde el centro del cilindro hasta la base de la carrocería del vehículo es h . Suponga que el rozamiento de rodadura entre el cilindro y su eje es despreciable.

Preguntas:

1. Calcule el momento de inercia de cualquiera de los cilindros **[1.5 puntos]**.
2. Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre la carrocería, el cilindro delantero y el trasero. Escriba las ecuaciones del movimiento de cada una de estas partes **[2.5 puntos]**.
3. Se supone que el vehículo parte del reposo y luego se mueve libremente bajo la acción de la gravedad. Indique todos los tipos posibles de movimiento del sistema y deduzca sus aceleraciones en función de las magnitudes físicas dadas **[4.0 puntos]**.
4. Suponga que, después de recorrer una distancia d rodando sin deslizar desde el reposo, el vehículo entra en un tramo de la carretera donde todos los coeficientes de rozamiento disminuyen hasta unos valores constantes menores μ'_s y μ'_k , de modo que los dos cilindros empiezan a deslizar. Calcule las velocidades lineal y angular de cada cilindro después de que el vehículo haya recorrido una distancia total de s metros. Aquí suponemos que d y s son mucho mayores que las dimensiones del vehículo **[2.0 puntos]**

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Denotemos por θ el ángulo de inclinación y definamos

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

Los subíndices r, f indican trasero y delantero. La aceleración lineal es positiva cuesta abajo; la aceleración angular es positiva en el sentido de rodadura cuesta abajo.

1. Momento de inercia de cualquiera de los cilindros

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

Su unidad en el SI es kg m^2 .

2. Ecuaciones del movimiento

Sean P_i , dirigida cuesta abajo, y Q_i , dirigida hacia la carretera, las componentes de la fuerza que ejerce el eje sobre el cilindro i . Sean N_i la fuerza normal que ejerce la carretera sobre él y f_i su fuerza de rozamiento dirigida cuesta arriba. Estas son componentes de referencia con signo.

Para la carrocería y el bastidor de masa despreciable,

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

Para cada cilindro,

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

Por consiguiente,

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

3. Regímenes de rodadura y deslizamiento

Para abreviar, definamos

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa MR}.$$

Cilindro trasero	Cilindro delantero	Aceleración lineal común a	α_r	α_f
Rueda	Rueda	$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$	a_0/R	a_0/R
Desliza	Rueda	$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$	a_{SR}/R
Rueda	Desliza	$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$	a_{RS}/R	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$
Desliza	Desliza	$a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$	$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$

Estas son las ecuaciones de los cuatro modos de contacto. Cada uno requiere $N_r, N_f \geq 0$, junto con

$$\kappa M a \leq \mu_s N_i \quad \text{para un cilindro que rueda,}$$

$$a > R \alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{para un cilindro que desliza cuesta abajo desde el reposo.}$$

Las igualdades describen los límites entre los modos.

Ambos cilindros ruedan desde el reposo si

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

El cilindro trasero alcanza primero su límite de rozamiento estático. Por tanto, la pérdida de adherencia a partir de la rama en la que ambos ruedan conduce al deslizamiento únicamente del trasero o directamente al deslizamiento de ambos; el deslizamiento únicamente del delantero es el modo de contacto mixto alternativo, sujeto a sus condiciones, y no la primera pérdida de adherencia de esa rama.

4. Velocidades después de entrar en el tramo de menor rozamiento

Para $s \geq d$, tomemos

$$\begin{aligned} v_d &= \sqrt{2a_0 d}, & a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ v &= \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s - d)}, & \Delta\tau &= \frac{2(s - d)}{v + v_d}. \end{aligned}$$

Entonces

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

El signo menos corresponde al cilindro trasero. Las velocidades lineales se expresan en m s^{-1} , y las velocidades angulares, en rad s^{-1} .

Solución

1. Momento de inercia

Consideremos la envolvente uniforme y cada radio como una varilla radial delgada y uniforme que se extiende desde el eje hasta R_i .

La envolvente tiene una masa de $0.8M$, por lo que su momento de inercia respecto al eje del cilindro es

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

Cada radio tiene una masa de $0.2M/8$. Una varilla uniforme de longitud R_i , que gira alrededor de un eje perpendicular a ella que pasa por uno de sus extremos, tiene un momento de inercia $mR_i^2/3$. Por tanto,

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

Usando $R_i = 0.8R$,

$$\begin{aligned} I &= MR^2 \left[\frac{0.8}{2} (1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3} (0.8^2) \right] \\ &= MR^2 \left(\frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

2. Diagramas de fuerzas y ecuaciones del movimiento

Elijamos el eje x a lo largo de la carretera, dirigido cuesta abajo, y el eje y perpendicular a la carretera, dirigido hacia fuera de ella.

Utilizamos el modelo de vehículo rígido previsto: ambos cilindros permanecen en contacto con la carretera recta, sus centros tienen la misma aceleración a y la carrocería permanece paralela a la carretera. Su aceleración angular es, por tanto, nula. El centro de masas de la carrocería está a mitad de camino entre los ejes y a una distancia perpendicular

$$b = h + \frac{t}{2}$$

por encima de la línea que une los ejes.

Los diagramas de fuerzas deben mostrar lo siguiente.

- **Carrocería, incluido el bastidor de masa despreciable:** peso $5Mg$, vertical hacia abajo, aplicado en su centro de masas; en la posición de cada eje, una fuerza con componentes $-P_i$ a lo largo de la carretera y $+Q_i$ perpendicular a ella.
- **Cilindro trasero:** peso Mg , vertical hacia abajo y que pasa por su centro; componentes de la fuerza del eje P_r cuesta abajo y Q_r hacia la carretera; reacción de la carretera N_r , perpendicular a esta en el punto de contacto; rozamiento f_r , cuesta arriba en el punto de contacto.
- **Cilindro delantero:** las fuerzas correspondientes Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f .

Las flechas de las fuerzas de los ejes indican sentidos de referencia: una componente individual con signo puede ser negativa. El rozamiento apunta cuesta arriba en los modos de deslizamiento cuesta abajo considerados aquí y también proporciona el momento de fuerza necesario para rodar cuesta abajo.

La segunda ley de Newton para la carrocería da

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

y

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

Al tomar momentos respecto al centro de masas de la carrocería, las posiciones de los dos ejes tienen coordenadas paralelas a la carretera $-l, +l$ y coordenada perpendicular $-b$. La aceleración angular nula da

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

Así,

$$l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).$$

Para el cilindro i , el movimiento de traslación da

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i,$$

$$N_i - Mg \cos \theta - Q_i = 0.$$

Solo el rozamiento con la carretera produce un momento de fuerza respecto al eje del cilindro, ya que se desprecia el rozamiento en los cojinetes:

$$I\alpha_i = Rf_i.$$

Al sumar las tres ecuaciones en la dirección cuesta abajo, se eliminan las fuerzas internas de los ejes:

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).$$

Las reacciones normales satisfacen

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

Además,

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

Usando la ecuación de la carrocería en la dirección cuesta abajo,

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

Por tanto,

$$N_r(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)],$$

$$N_f(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)].$$

Estas ecuaciones incluyen la transferencia de carga hacia la parte delantera. De forma equivalente,

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

La longitud de la carrocería L no interviene: la carrocería no tiene aceleración angular y su centro de masas queda fijado por la simetría.

3. Movimientos posibles y sus aceleraciones

Supongamos la relación de orden habitual

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

Para un cilindro que rueda sin deslizar,

$$a = R\alpha_i.$$

Su ecuación de rotación exige entonces

$$f_i = \frac{I}{R^2}a = \kappa Ma.$$

Esta fuerza debe satisfacer el límite del rozamiento estático

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i.$$

Para un cilindro cuyo punto de contacto desliza cuesta abajo,

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa MR}.$$

Para comprobar el sentido del deslizamiento, definamos la velocidad cuesta abajo del punto de contacto del cilindro respecto a la carretera:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

Partiendo del reposo, una solución de deslizamiento con aceleración constante tiene

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

Así, el rozamiento cinético cuesta arriba es compatible con el deslizamiento cuesta abajo solo si

$$a > R\alpha_i.$$

Todas las fórmulas que siguen requieren también reacciones normales no negativas. Una reacción nula señala una posible pérdida de contacto; más allá de ese límite, el modelo supuesto de dos contactos sin cabeceo deja de ser aplicable.

Ambos cilindros ruedan sin deslizar.

Aquí

$$f_r = f_f = \kappa Ma.$$

La ecuación conjunta en la dirección cuesta abajo se convierte en

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

Por tanto,

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149} g \sin \theta \simeq 0.8336 g \sin \theta,$$

y

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

La fuerza de rozamiento necesaria en cada contacto es

$$f_0 = \frac{7\kappa Mg \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

Escribiendo

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

las reacciones son

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2} (\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

Como $N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$, el contacto trasero impone la condición de rozamiento estático más restrictiva:

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

Reordenando se obtiene

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

o bien

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Como comprobación independiente, en la rodadura sin deslizamiento la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

Al igualar su incremento a la pérdida de energía potencial gravitatoria, se obtiene la misma a_0 .

El cilindro trasero desliza; el delantero rueda.

Ahora

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa Ma.$$

Por tanto,

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

Sustituyendo la reacción normal,

$$(7 + \kappa)a = 7g \sin \theta - \frac{7\mu_k}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

Agrupando los términos que contienen a ,

$$a_{SR} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

Las aceleraciones angulares son

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa MR}, \quad \alpha_f = \frac{a_{SR}}{R}.$$

Las condiciones de compatibilidad son

$$a_{SR} > \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M}, \quad \kappa Ma_{SR} \leq \mu_s N_f(a_{SR}).$$

La primera hace que el contacto trasero deslice cuesta abajo; la segunda permite que el delantero siga rodando.

Esta es la rama mixta que debe comprobarse cuando el trasero pierde la adherencia estática. Si el delantero no puede proporcionar el rozamiento estático necesario, ambos cilindros deben deslizar.

El cilindro trasero rueda; el delantero desliza.

Para completar el análisis, la otra combinación mixta de contactos tiene

$$f_r = \kappa Ma, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

Así,

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

lo que da

$$a_{RS} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

Sus aceleraciones angulares son

$$\alpha_r = \frac{a_{RS}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M R}.$$

Sus condiciones de compatibilidad son

$$\kappa M a_{RS} \leq \mu_s N_r(a_{RS}), \quad a_{RS} > \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M}.$$

Esta es una solución de deslizamiento sujeta a condiciones. No describe que el delantero sea el primer cilindro en perder adherencia a partir de la rama en la que ambos ruedan, porque esa rama requiere el mismo rozamiento en los dos contactos, mientras que el delantero tiene la mayor reacción normal.

Ambos cilindros deslizan.

En este caso,

$$f_r + f_f = \mu_k(N_r + N_f) = 7\mu_k M g \cos \theta.$$

Por tanto,

$$a_{SS} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

Como

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

las reacciones normales se reducen a

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu_k).$$

Por tanto,

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu_k).$$

El delantero tiene la mayor aceleración angular. Por consiguiente, la condición más restrictiva para que ambos puntos de contacto deslicen cuesta abajo desde el reposo es

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

Para $0 \leq \theta < \pi/2$, esta condición es

$$\tan \theta > \mu_k \left[1 + \frac{7}{2\kappa}(1 + q\mu_k) \right].$$

Mantener ambos contactos también requiere

$$q\mu_k \leq 1.$$

Si $\mu_k = 0$, los cilindros experimentan un deslizamiento de traslación pura desde el reposo:

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

La distinción entre el inicio del deslizamiento y su continuación es relevante: el rozamiento estático determina si un contacto pierde adherencia, mientras que las condiciones cinéticas anteriores determinan si un estado de deslizamiento supuesto es compatible. Una solución con rozamiento cinético no debe sustituir a una solución sin deslizamiento admisible por el mero hecho de que $\mu_k < \mu_s$.

4. Movimiento en el tramo de menor rozamiento

Durante la distancia inicial d recorrida rodando sin deslizar, la aceleración es a_0 . Partiendo del reposo,

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

Despreciamos la breve transición durante la cual solo un cilindro ha alcanzado la nueva superficie, usando la aproximación de grandes distancias indicada. No hay ningún cambio impulsivo ni en la velocidad lineal ni en la angular.

Una vez que ambos cilindros deslizan sobre la nueva superficie, sustituimos μ_k por μ'_k en los resultados anteriores para el deslizamiento de ambos:

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2} (1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

Estas magnitudes son constantes.

Durante la distancia restante $s - d$,

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

por lo que los centros de ambos cilindros tienen velocidad

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

El tiempo transcurrido en este tramo se obtiene a partir de la velocidad media:

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

de donde

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Al integrar las aceleraciones angulares constantes, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 - q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}, \\ \omega_f &= \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 + q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}. \end{aligned}$$

La premisa de que ambos cilindros comienzan a deslizar requiere un régimen compatible de deslizamiento cuesta abajo. En efecto, inmediatamente después de entrar,

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i)\Delta\tau,$$

por lo que la condición es $a_1 > R\alpha'_f$, junto con reacciones no negativas. El coeficiente estático reducido μ'_s determina la pérdida de adherencia, pero no interviene en las velocidades posteriores una vez que ambos contactos están deslizando.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.