

# IPhO 2002

Theorieaufgaben und Lösungen · Bali, Indonesien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/2002/

## Aufgabe 1: Bodenradar

Bodenradar (GPR) wird eingesetzt, um oberflächennahe unterirdische Objekte zu erkennen und zu orten, indem elektromagnetische Wellen in den Boden gesendet und die von diesen Objekten reflektierten Wellen empfangen werden. Die Antenne und der Detektor befinden sich unmittelbar auf dem Boden am selben Ort.

Eine linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , die sich in  $z$ -Richtung ausbreitet, wird durch den folgenden Ausdruck für ihr Feld beschrieben:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

wobei  $E_0$  konstant ist,  $\alpha$  der Dämpfungskoeffizient und  $\beta$  die Wellenzahl sind, die jeweils durch die folgenden Ausdrücke gegeben sind:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

Dabei bezeichnen  $\mu$ ,  $\varepsilon$ , und  $\sigma$  die magnetische Permeabilität, die elektrische Permittivität bzw. die elektrische Leitfähigkeit.

Das Signal ist nicht mehr nachweisbar, wenn die Amplitude des am Objekt ankommenden Radarsignals unter  $1/e$  ( $\approx 37\%$ ) ihres Anfangswerts fällt. Üblicherweise wird eine elektromagnetische Welle mit variabler Frequenz (10 MHz – 1000 MHz) verwendet, um die Reichweite und die Auflösung der Ortung anpassen zu können.

Die Leistungsfähigkeit des Bodenradars hängt von seiner Auflösung ab. Die Auflösung ist durch den Mindestabstand zwischen zwei benachbarten, zu detektierenden Reflektoren gegeben. Dieser Mindestabstand muss am Detektor zu einer Phasendifferenz von mindestens  $180^\circ$  zwischen den beiden reflektierten Wellen führen.

### Fragen:

(Gegeben:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  und  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ )

- Nehmen Sie an, dass der Boden nichtmagnetisch ist ( $\mu = \mu_0$ ) und die Bedingung  $\left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$  erfüllt. Leiten Sie mithilfe der Gleichungen (1) und (2) den Ausdruck für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit von  $\mu$  und  $\varepsilon$  her **[1.0 Punkte]**.

2. Bestimmen Sie die maximale Tiefe, in der ein Objekt in einem Boden mit einer Leitfähigkeit von 1.0 mS/m und einer Permittivität von  $9\epsilon_0$  detektiert werden kann, wobei die Bedingung  $\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \ll 1$  erfüllt ist ( $S = \text{ohm}^{-1}$ ; verwenden Sie  $\mu = \mu_0$ ). **[2.0 Punkte]**
3. Betrachten Sie zwei parallele leitende Stäbe, die horizontal im Boden vergraben sind. Die Stäbe befinden sich in einer Tiefe von 4 Metern. Der Boden hat bekanntermaßen eine Leitfähigkeit von 1.0 mS/m und eine Permittivität von  $9\epsilon_0$ . Die Bodenradarmessung werde an einer Position ungefähr über einem der Stäbe durchgeführt. Nehmen Sie an, dass ein punktförmiger Detektor verwendet wird. Bestimmen Sie die Mindestfrequenz, die erforderlich ist, um eine laterale Auflösung von 50 cm zu erreichen **[3.5 Punkte]**.
4. Um die Tiefe  $d$  eines im selben Boden vergrabenen Stabes zu bestimmen, betrachten Sie Messungen entlang einer Geraden senkrecht zum Stab. Das Ergebnis wird durch die folgende Abbildung beschrieben:

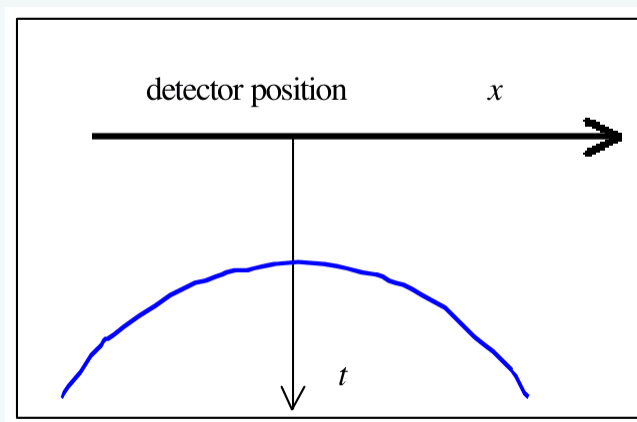


Diagramm der Laufzeit  $t$  in Abhängigkeit von der Detektorposition  $x$ ,  $t_{\min} = 100 \text{ ns}$ .

Leiten Sie  $t$  als Funktion von  $x$  her und bestimmen Sie  $d$  **[3.5 Punkte]**.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

1. Im angegebenen Grenzfall geringer Verluste gilt

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

2. Die maximale Detektionstiefe beträgt

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. Für eine Tiefe der Stäbe von  $h = 4 \text{ m}$  und einen lateralen Abstand von  $s = 0.50 \text{ m}$  gilt

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4 \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. Wird  $x = 0$  direkt über dem Stab gewählt, so gilt

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m.}$$

## Lösung

### 1. Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ein Punkt konstanter Phase erfüllt

$$\omega t - \beta z = \text{konstant.}$$

Durch Differenzieren erhält man die Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Wir definieren den kleinen dimensionslosen Parameter

$$q = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

Mit der Binomialentwicklung ergibt sich

$$\sqrt{1 + q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

Gleichung (2) liefert daher

$$\beta = \omega \left[ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left( 2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left( 1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

Behält man nur den führenden Term bei, so erhält man

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Für nichtmagnetischen Boden gilt  $\mu = \mu_0$ . In dieser Ordnung ist  $\beta$  proportional zu  $\omega$ , sodass die Dispersion vernachlässigbar ist und auch die Gruppengeschwindigkeit diesem Wert entspricht.

### 2. Maximale Detektionstiefe

Für den Dämpfungskoeffizienten behalten wir den führenden, von null verschiedenen Term derselben Entwicklung bei:

$$\alpha \simeq \omega \left[ \frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Somit ist der Dämpfungskoeffizient in dieser Ordnung unabhängig von der Frequenz.

Für ein Objekt direkt unter der Antenne in der Tiefe  $D$  ergibt Gleichung (1) für das Amplitudenverhältnis der einfallenden Welle

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

Die Aufgabe gibt den Schwellenwert für das **am Objekt ankommende** Signal vor, daher ist die in diese Bedingung eingehende Ausbreitungsstrecke  $D$ . In der Grenztiefe gilt

$$e^{-\alpha D_{\max}} = \frac{1}{e},$$

und somit

$$D_{\max} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

Mit

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

erhalten wir

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

Daher gilt

$$\boxed{D_{\max} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.}$$

### 3. Mindestfrequenz für eine laterale Auflösung von 50 cm

Wir betrachten die vertikale Ebene senkrecht zu den Stäben. Ihre gemeinsame Tiefe sei  $h$ , ihr lateraler Abstand sei  $s$ , und die Position von Antenne und Detektor werde direkt über dem ersten Stab gewählt.

Die einfachen Weglängen zu den beiden Stäben sind

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

Da sich Sender und Detektor am selben Ort befinden, legen die reflektierten Signale die Strecken  $2r_1$  und  $2r_2$  zurück. Ihr Gangunterschied beträgt daher

$$\Delta L = 2 \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Werden die leitenden Stäbe als gleichwertige Reflektoren behandelt, so hebt sich ihre gemeinsame Phasenverschiebung bei der Reflexion heraus. Die Phasendifferenz am Detektor ist

$$\Delta\phi = \beta\Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

Das vorgegebene Auflösungskriterium lautet  $\Delta\phi \geq \pi$ . Die Mindestfrequenz ergibt sich im Fall der Gleichheit:

$$\boxed{f_{\min} = \frac{v}{4 \left( \sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}}.$$

Die Wellengeschwindigkeit in diesem Boden beträgt

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\varepsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Für  $h = 4 \text{ m}$  und  $s = 0.50 \text{ m}$  gilt

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

Somit gilt

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

oder, auf eine sinnvolle Genauigkeit gerundet,

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz.}$$

Die Näherung für kleine Abstände liefert dasselbe gerundete Ergebnis:

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

Die erforderliche Frequenz liegt innerhalb des angegebenen Bereichs von 10–1000 MHz. Außerdem gilt bei der berechneten Frequenz

$$\left( \frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \varepsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

sodass die Näherung geringer Verluste konsistent ist. Beide Stäbe liegen zudem innerhalb der in Teil 2 bestimmten Detektionsreichweite.

#### 4. Laufzeitkurve und Tiefe des Stabes

Wir wählen die horizontale Koordinate  $x = 0$  direkt über dem vergrabenen Stab. In homogenem Boden beträgt die einfache Weglänge von der Antenne zum Stab

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Die gemessene Laufzeit umfasst den Hin- und Rückweg:

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Der kürzeste Weg ergibt sich bei  $x = 0$ , woraus folgt:

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

Folglich gilt

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

Somit gilt

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

Setzt man die minimale Laufzeit in die Kurvengleichung ein, so erhält man

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left( \frac{x}{5.0 \text{ m}} \right)^2}.$$

Dies ist der Ast für positive Zeiten der Hyperbel

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

Die Kurve ist symmetrisch bezüglich  $x = 0$ , hat ihre minimale Laufzeit von 100 ns direkt über dem Stab und steigt mit  $|x|$  an. Für  $|x| \gg d$  gilt

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

Da die Zeitachse der Abbildung nach unten zeigt, erscheinen größere Laufzeiten auf der Seite weiter unten, wie dargestellt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

## Aufgabe 2: Wahrnehmung elektrischer Signale

Einige Meerestiere können andere Lebewesen aus einiger Entfernung anhand elektrischer Ströme wahrnehmen, die diese beim Atmen oder bei anderen Vorgängen erzeugen, die mit Muskelkontraktionen verbunden sind. Manche Räuber nutzen dieses elektrische Signal, um ihre Beute auch dann zu orten, wenn sie im Sand vergraben ist.

Der physikalische Mechanismus, der der Stromerzeugung im Beutetier und der Wahrnehmung durch den Räuber zugrunde liegt, lässt sich wie in Abbildung II-1 dargestellt modellieren. Der vom Beutetier erzeugte Strom fließt zwischen zwei Kugeln mit positivem und negativem Potential im Körper des Beutetiers. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln beträgt  $l_s$ ; jede Kugel hat den Radius  $r_s$ , der wesentlich kleiner als  $l_s$  ist. Der spezifische elektrische Widerstand des Meerwassers ist  $\rho$ . Nehmen Sie an, dass der spezifische elektrische Widerstand des Körpers des Beutetiers dem des umgebenden Meerwassers entspricht, sodass die in der Abbildung eingezeichnete Begrenzung des Beutetiers vernachlässigt werden kann.

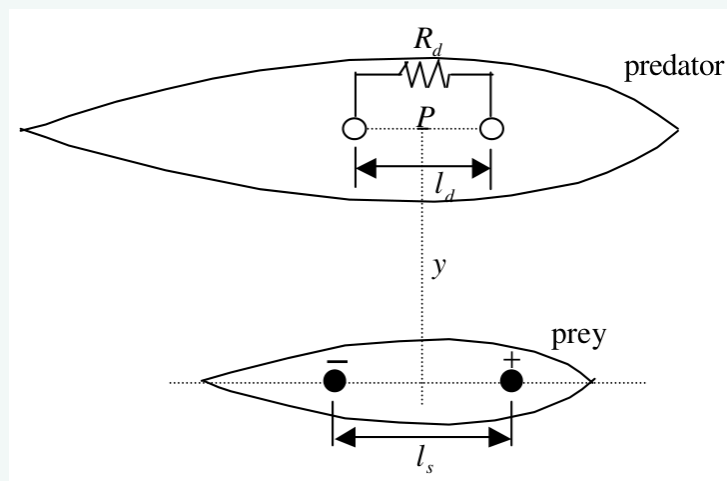


Abbildung II-1. Ein Modell zur Beschreibung der Erfassung der von einem Beutetier ausgehenden elektrischen Leistung durch seinen Räuber.

Um die Erfassung der vom Beutetier ausgehenden elektrischen Leistung durch den Räuber zu beschreiben, wird der Detektor ebenfalls durch zwei Kugeln am Körper des Räubers modelliert, die mit dem umgebenden Meerwasser in Kontakt stehen und parallel zum Kugelpaar im Körper des Beutetiers angeordnet sind. Ihr Abstand beträgt  $l_d$ ; jede Kugel hat den Radius  $r_d$ , der wesentlich kleiner als  $l_d$  ist. Dabei befindet sich der Mittelpunkt des Detektors im Abstand  $y$  direkt über der Quelle, und die Verbindungslinie der beiden Kugeln verläuft parallel zum elektrischen Feld, wie in Abbildung II-1 dargestellt. Sowohl  $l_s$  als auch  $l_d$  sind ebenfalls wesentlich kleiner als  $y$ . Die elektrische Feldstärke entlang der Verbindungslinie der beiden Kugeln wird als konstant angenommen. Der Detektor bildet somit einen geschlossenen Stromkreis, der das Beutetier, das umgebende Meerwasser und den Räuber miteinander verbindet, wie in Abbildung II-2 dargestellt.

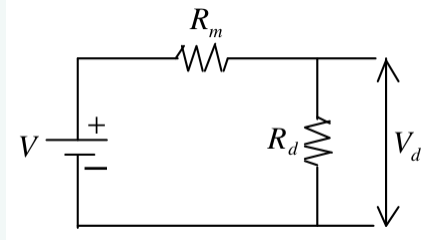


Abbildung II-2. Der äquivalente geschlossene Stromkreis aus dem wahrnehmenden Räuber, dem Beutetier und dem umgebenden Meerwasser.

In der Abbildung ist  $V$  die durch das elektrische Feld des Beutetiers hervorgerufene Spannung zwischen den Kugeln des Detektors, und  $R_m$  ist der durch das umgebende Meerwasser bedingte Innenwiderstand. Ferner bezeichnen  $V_d$  und  $R_d$  die Spannung zwischen den Detektorkugeln beziehungsweise den Widerstand des Detektorelements im Inneren des Räubers.

### Fragen:

1. Bestimmen Sie den Stromdichtevektor  $\vec{j}$  (Strom pro Flächeneinheit), den eine punktförmige Stromquelle  $I_s$  im Abstand  $r$  in einem unendlichen Medium erzeugt. **[1.5 Punkte]**
2. Bestimmen Sie mithilfe des Gesetzes  $\vec{E} = \rho \vec{j}$  die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_p$  in der Mitte zwischen den Detektorkugeln (am Punkt P) für einen gegebenen Strom  $I_s$ , der zwischen den beiden Kugeln im Körper des Beutetiers fließt **[2.0 Punkte]**.
3. Bestimmen Sie für denselben Strom  $I_s$  die Spannung zwischen den Quellkugeln ( $V_s$ ) im Beutetier **[1.5 Punkte]**. Bestimmen Sie den Widerstand zwischen den beiden Quellkugeln ( $R_s$ ) **[0.5 Punkte]** und die von der Quelle erzeugte Leistung ( $P_s$ ) **[0.5 Punkte]**.
4. Bestimmen Sie  $R_m$  **[0.5 Punkte]** und  $V_d$  **[1.0 Punkte]** in Abbildung II-2 und berechnen Sie außerdem die von der Quelle auf den Detektor übertragene Leistung ( $P_d$ ) **[0.5 Punkte]**.
5. Bestimmen Sie den optimalen Wert von  $R_d$ , bei dem die vom Detektor aufgenommene Leistung maximal ist **[1.5 Punkte]**, und bestimmen Sie außerdem die maximale Leistung **[0.5 Punkte]**.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

### Antworten

Der Einheitsvektor  $\hat{x}$  zeige von der negativen Kugel des Beutetiers zu seiner positiven Kugel. Die folgenden Spannungen sind positive Beträge. In den Ergebnissen werden unter den angegebenen Annahmen die führenden Terme beibehalten:

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y.$$

Da in der Aufgabe keine numerischen Parameterwerte angegeben sind, werden die Antworten symbolisch angegeben.

1. Mit dem von der Punktquelle weg gerichteten Einheitsvektor  $\hat{r}$  gilt

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

2. Das Feld zeigt von der Seite der positiven Quelle zur Seite der negativen Quelle:

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

3. Spannung, Widerstand und Leistung der Quelle sind

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. Der Widerstand des Meerwassers und die Leerlaufspannung des Detektors sind

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

Folglich gilt

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. Die vom Detektor aufgenommene Leistung ist maximal bei

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Ihr Wert beträgt

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

## Lösung

### 1. Stromdichte einer punktförmigen Stromquelle

In einem homogenen, isotropen, unendlichen Medium muss die Stromdichte aufgrund der Kugelsymmetrie radial gerichtet sein und auf einer Kugel mit der Quelle im Mittelpunkt überall denselben Betrag haben.

Aus der Stromerhaltung folgt

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

Daher gilt

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Bei einer positiven Quelle fließt der Strom nach außen; bei einer Senke mit demselben Strom ist das Vorzeichen umgekehrt. Die Stromdichte hat die SI-Einheit  $\text{A m}^{-2}$ .

### 2. Elektrisches Feld am Punkt P

Wir legen den Mittelpunkt zwischen den beiden Kugeln des Beutetiers in den Koordinatenursprung. Die positive Kugel befindet sich bei  $x = l_s/2$ , die negative Kugel bei  $x = -l_s/2$  und P bei  $(0, y)$ .

Da die Kugeln im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstand und ihrem Abstand von P klein sind, ersetzen wir sie durch eine Punktquelle  $+I_s$  und eine Punktsenke  $-I_s$ . Ihr gemeinsamer Abstand von P ist

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt

$$\begin{aligned}\vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[ \left( -\frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) - \left( \frac{l_s}{2} \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Die vertikalen Komponenten heben sich auf, während sich die horizontalen Komponenten addieren.

Mit der lokalen Form des ohmschen Gesetzes,  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ , ergibt sich

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi(y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}}.$$

Dieser Ausdruck ist innerhalb der Punktquellennäherung exakt. Für  $l_s \ll y$  gilt

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

P liegt somit auf der Äquatorlinie eines Stromdipols, dessen Feld wie  $y^{-3}$  abnimmt.

### 3. Spannung, Widerstand und Leistung der Quelle

Für eine einzelne Punktquelle ist das radiale elektrische Feld

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

Wählt man das Potential im Unendlichen gleich null, so gilt

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

Eine Senke mit dem Strom  $I_s$  erzeugt das Negative dieses Potentials.

An jeder der beiden Quellsphären hat der eigene Beitrag zum Oberflächenpotential den Betrag

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Der Beitrag der jeweils anderen Kugel ist von der Größenordnung  $\rho I_s/(4\pi l_s)$ , also um den Faktor  $r_s/l_s$  kleiner, und wird in führender Ordnung vernachlässigt. Somit gilt

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

Die Spannung beträgt daher

$$V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}.$$

Der Vollständigkeit halber würde die Berücksichtigung des gegenseitigen Potentialbeitrags der beiden Monopole

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left( \frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right)$$

ergeben, wobei der zweite Term unter der angegebenen Annahme vernachlässigbar ist.

Der zwischen den Quellkugeln wirksame Widerstand folgt aus dem ohmschen Gesetz:

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

Die vom Beutetier bereitgestellte elektrische Leistung ist

$$P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

#### 4. Widerstand des Meerwassers, Detektorspannung und aufgenommene Leistung

Ein Strom durch den Detektor tritt an einer Detektorkugel in das umgebende Wasser ein und verlässt es an der anderen. Den Widerstand dieses Stromwegs erhält man, indem man Teil 3 auf Kugeln mit dem Radius  $r_d$  und dem Abstand  $l_d$  anwendet. Wegen  $r_d \ll l_d$  gilt

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Physikalisch trägt jeder kleine kugelförmige Kontakt einen Ausbreitungswiderstand  $\rho/(4\pi r_d)$  bei.

Das elektrische Feld des Beutetiers ist entlang des Detektors näherungsweise homogen, da  $l_d \ll y$ . Die rechte Detektorkugel liegt auf höherem Potential, sodass die Leerlaufspannung

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \end{aligned}$$

beträgt.

Im Ersatzschaltbild in Abbildung II-2 liefert die kirchhoffsche Maschenregel

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

Daher gilt

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho/(2\pi r_d)}.$$

Die im Detektorelement umgesetzte Leistung ist

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

Ausgedrückt durch die gegebenen Parameter gilt

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

## 5. Optimaler Detektorwiderstand und maximale Leistung

Für den gegebenen Quellstrom und die gegebene Geometrie sind  $V$  und  $R_m$  fest. Die Ableitung der vom Detektor aufgenommenen Leistung nach  $R_d$  ergibt

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

Die Ableitung ist für  $R_d < R_m$  positiv und für  $R_d > R_m$  negativ. Das Maximum liegt somit bei

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

Dies ist die Bedingung für Leistungsanpassung.

Bei diesem Widerstand gilt  $V_d = V/2$ , woraus

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m}$$

folgt. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} P_{d,\text{max}} &\simeq \left( \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho} \\ &= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}. \end{aligned}$$

Mit der Quelleistung aus Teil 3 lässt sich dies auch schreiben als

$$\frac{P_{d,\text{max}}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

Die Abhängigkeit von  $y^{-6}$  ergibt sich durch Quadrieren des Dipolfeldes, das wie  $y^{-3}$  abnimmt.

---

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

### Aufgabe 3: Ein schweres Fahrzeug auf einer geneigten Straße

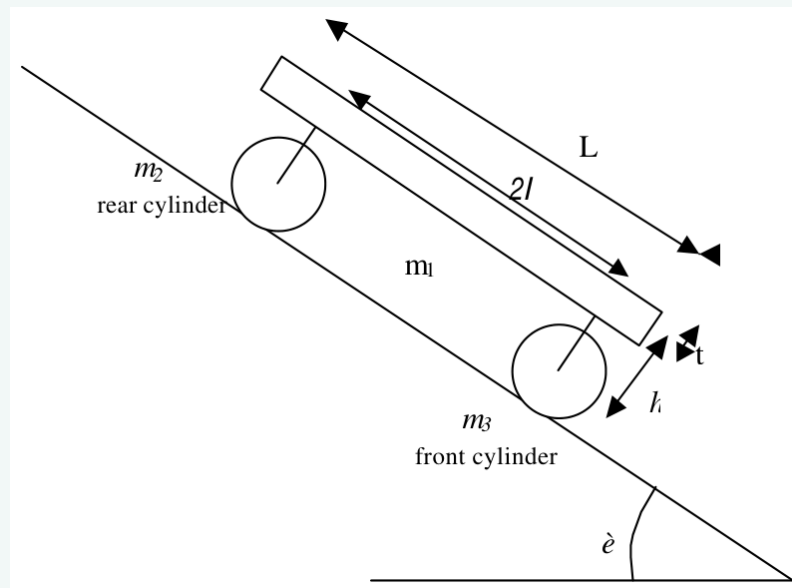


Abbildung III-1: Vereinfachtes Modell eines schweren Fahrzeugs auf einer geneigten Straße.

Die obige Abbildung zeigt ein vereinfachtes Modell eines schweren Fahrzeugs (einer Straßenwalze), das sich mit einer hinteren und einer vorderen Walze als Rädern auf einer Straße mit dem Neigungswinkel  $\theta$  (in der Abbildung als  $\epsilon$  bezeichnet) befindet, wie in Abbildung III-1 dargestellt. Jede der beiden Walzen hat die Gesamtmasse  $M$  ( $m_2 = m_3 = M$ ) und besteht aus einem zylindrischen Mantel mit dem Außenradius  $R_o$ , dem Innenradius  $R_i = 0.8R_o$  und acht Speichen mit der Gesamtmasse  $0.2M$ . Die Masse des Fahrgestells, das den Fahrzeugaufbau trägt, ist vernachlässigbar. Die Walze kann wie in Abbildung III-2 modelliert werden. Das Fahrzeug bewegt sich unter dem Einfluss von Gravitations- und Reibungskräften die Straße hinab. Die vordere und die hintere Walze sind bezüglich des Fahrzeugs symmetrisch angeordnet.

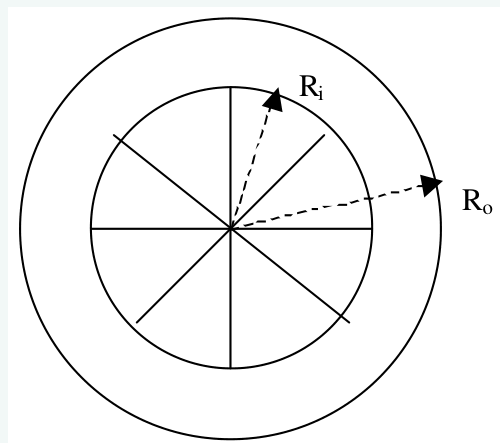


Abbildung III-2: Vereinfachtes Modell der Walzen.

Die Haft- und Gleitreibungskoeffizienten zwischen der Walze und der Straße sind  $\mu_s$  bzw.  $\mu_k$ . Der Fahrzeugaufbau hat die Masse  $5M$ , die Länge  $L$  und die Dicke  $t$ . Der Abstand zwischen der vorderen und der hinteren Walze beträgt  $2l$ , während der Abstand vom Mittelpunkt der Walze zur Unterseite des Fahrzeugaufbaus  $h$  beträgt. Nehmen Sie an, dass die Rollreibung zwischen der Walze und ihrer Achse vernachlässigbar ist.

## Fragen:

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer der beiden Walzen **[1.5 Punkte]**.
2. Zeichnen Sie alle Kräfte ein, die auf den Aufbau, die vordere Walze und die hintere Walze wirken. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für jeden dieser Teile auf **[2.5 Punkte]**.
3. Es wird angenommen, dass das Fahrzeug aus der Ruhe startet und sich dann unter dem Einfluss der Gravitation frei bewegt. Geben Sie alle möglichen Bewegungsarten des Systems an und leiten Sie deren Beschleunigungen in Abhängigkeit von den gegebenen physikalischen Größen her **[4.0 Punkte]**.
4. Nehmen Sie an, dass das Fahrzeug, nachdem es aus der Ruhe die Strecke  $d$  rein rollend zurückgelegt hat, einen Straßenabschnitt erreicht, auf dem alle Reibungskoeffizienten auf kleinere konstante Werte  $\mu'_s$  und  $\mu'_k$  abfallen, sodass beide Walzen zu gleiten beginnen. Berechnen Sie die Translations- und Winkelgeschwindigkeiten jeder Walze, nachdem das Fahrzeug insgesamt eine Strecke von  $s$  Metern zurückgelegt hat. Dabei nehmen wir an, dass  $d$  und  $s$  viel größer als die Abmessungen des Fahrzeugs sind **[2.0 Punkte]**

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

## Antworten

Bezeichnen wir den Neigungswinkel mit  $\theta$  und definieren wir

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

Die Indizes  $r, f$  bezeichnen die hintere bzw. die vordere Walze. Die Translationsbeschleunigung ist hangabwärts positiv; die Winkelbeschleunigung ist in der Drehrichtung beim Abwärtsrollen positiv.

### 1. Trägheitsmoment einer der beiden Walzen

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

Seine SI-Einheit ist  $\text{kg m}^2$ .

### 2. Bewegungsgleichungen

Die Achskraft auf die Walze  $i$  habe die Komponenten  $P_i$  hangabwärts und  $Q_i$  zur Straße hin. Ihre Normalkraft von der Straße sei  $N_i$  und ihre hangaufwärts gerichtete Reibungskraft sei  $f_i$ . Dies sind vorzeichenbehaftete Komponenten bezüglich der angegebenen Bezugsrichtungen.

Für den Aufbau und das masselose Fahrgestell gilt

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

Für jede Walze gilt

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

Folglich gilt

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

### 3. Roll- und Gleitzustände

Zur Abkürzung definieren wir

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa MR}.$$

| Hintere Walze | Vordere Walze | Gemeinsame Translationsbeschleunigung<br>$a$                                                      | $\alpha_r$                            | $\alpha_f$                            |
|---------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Rollt         | Rollt         | $a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$                             | $a_0/R$                               | $a_0/R$                               |
| Gleitet       | Rollt         | $a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$ | $\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$ | $a_{\text{SR}}/R$                     |
| Rollt         | Gleitet       | $a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$ | $a_{\text{RS}}/R$                     | $\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$ |
| Gleitet       | Gleitet       | $a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$                                              | $\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$ | $\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$ |

Dies sind die Gleichungen für die vier Kontaktzustände. Jeder setzt  $N_r, N_f \geq 0$  voraus, zusammen mit

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i \quad \text{für eine rollende Walze,}$$

$$a > R\alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{für eine aus der Ruhe hangabwärts gleitende Walze.}$$

Gleichheiten beschreiben die Grenzen zwischen den Zuständen.

Beide Walzen rollen aus der Ruhe an, wenn

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Die hintere Walze erreicht zuerst ihre Haftreibungsgrenze. Daher führt der Haftungsverlust aus dem Lösungsweig mit zwei rollenden Walzen zum alleinigen Gleiten der hinteren Walze oder unmittelbar zum Gleiten beider Walzen; das alleinige Gleiten der vorderen Walze ist der alternative, an Bedingungen geknüpfte gemischte Kontaktzustand und nicht der erste Haftungsverlust dieses Zweigs.

### 4. Geschwindigkeiten nach dem Eintritt in den Abschnitt mit geringerer Reibung

Für  $s \geq d$  setzen wir

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad a_1 = g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta),$$

$$v = \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s - d)}, \quad \Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Dann gilt

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

Das Minuszeichen gilt für die hintere Walze. Die Translationsgeschwindigkeiten haben die Einheit  $\text{m s}^{-1}$ , die Winkelgeschwindigkeiten die Einheit  $\text{rad s}^{-1}$ .

## Lösung

### 1. Trägheitsmoment

Wir behandeln den Mantel als homogen und jede Speiche als homogenen dünnen radialen Stab, der sich von der Achse bis  $R_i$  erstreckt.

Der Mantel hat die Masse  $0.8M$ , sodass sein Trägheitsmoment bezüglich der Walzenachse wie folgt lautet:

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

Jede Speiche hat die Masse  $0.2M/8$ . Ein homogener Stab der Länge  $R_i$ , der um eine durch eines seiner Enden verlaufende, zum Stab senkrechte Achse rotiert, hat das Trägheitsmoment  $mR_i^2/3$ . Daher gilt

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

Mit  $R_i = 0.8R$  folgt

$$\begin{aligned} I &= MR^2 \left[ \frac{0.8}{2} (1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3} (0.8^2) \right] \\ &= MR^2 \left( \frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

### 2. Kräftediagramme und Bewegungsgleichungen

Wir wählen die  $x$ -Achse hangabwärts entlang der Straße und die  $y$ -Achse senkrecht zur Straße, von ihr weg gerichtet.

Wir verwenden das vorgesehene Modell eines starren Fahrzeugs: Beide Walzen bleiben in Kontakt mit der geraden Straße, ihre Mittelpunkte haben dieselbe Beschleunigung  $a$ , und der Aufbau bleibt parallel zur Straße. Seine Winkelbeschleunigung ist daher null. Der Schwerpunkt des Aufbaus liegt mittig zwischen den Achsen und im senkrechten Abstand

$$b = h + \frac{t}{2}$$

oberhalb der Verbindungslinie der Achsen.

Die Kräftediagramme sollen Folgendes zeigen.

- **Aufbau einschließlich des masselosen Fahrgestells:** die Gewichtskraft  $5Mg$ , die im Schwerpunkt vertikal nach unten wirkt; an jeder Achsposition eine Kraft mit den Komponenten  $-P_i$  entlang der Straße und  $+Q_i$  senkrecht dazu.
- **Hintere Walze:** die Gewichtskraft  $Mg$ , die durch ihren Mittelpunkt vertikal nach unten wirkt; die Achskraftkomponenten  $P_r$  hangabwärts und  $Q_r$  zur Straße hin; die Normalkraft  $N_r$  der Straße, die am Berührungspunkt senkrecht zur Straße wirkt; die Reibungskraft  $f_r$ , die am Berührungspunkt hangaufwärts wirkt.
- **Vordere Walze:** die entsprechenden Kräfte  $Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f$ .

Die Pfeile der Achskräfte geben Bezugsrichtungen an: Eine einzelne vorzeichenbehaftete Komponente kann negativ sein. In den hier betrachteten Zuständen mit hangabwärts gerichtetem Gleiten zeigt die Reibungskraft hangaufwärts; sie liefert auch das Drehmoment für das Abwärtsrollen.

Das zweite Newtonsche Gesetz liefert für den Aufbau

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

und

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

Bei der Bildung der Drehmomente bezüglich des Schwerpunkts des Aufbaus haben die beiden Achspositionen die straßenparallelen Koordinaten  $-l, +l$  und die senkrechte Koordinate  $-b$ . Aus der verschwindenden Winkelbeschleunigung folgt

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

Damit gilt

$$l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).$$

Für die Walze  $i$  ergibt die Translationsbewegung

$$\begin{aligned} Ma &= Mg \sin \theta + P_i - f_i, \\ N_i - Mg \cos \theta - Q_i &= 0. \end{aligned}$$

Nur die Reibung an der Straße erzeugt ein Drehmoment bezüglich der Walzenachse, da die Lagerreibung vernachlässigt wird:

$$I\alpha_i = Rf_i.$$

Durch Addition der drei Gleichungen für die hangabwärts gerichtete Bewegung werden die inneren Achskräfte eliminiert:

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).$$

Für die Normalkräfte gilt

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

Außerdem gilt

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

Mit der Gleichung für die hangabwärts gerichtete Bewegung des Aufbaus folgt

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

Somit gilt

$$N_r(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)],$$

$$N_f(a) = \frac{7M}{2} [g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)].$$

Diese Gleichungen berücksichtigen die Lastverlagerung nach vorn. Gleichwertig dazu gilt

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

Die Länge  $L$  des Aufbaus geht nicht ein: Der Aufbau hat keine Winkelbeschleunigung, und sein Schwerpunkt ist durch die Symmetrie festgelegt.

### 3. Mögliche Bewegungen und ihre Beschleunigungen

Wir nehmen die übliche Größenordnung der Reibungskoeffizienten an:

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

Für eine ohne Gleiten rollende Walze gilt

$$a = R\alpha_i.$$

Ihre Rotationsgleichung erfordert dann

$$f_i = \frac{I}{R^2} a = \kappa M a.$$

Diese Kraft muss die Haftreibungsgrenze einhalten:

$$\kappa M a \leq \mu_s N_i.$$

Für eine Walze, deren Berührungspunkt hangabwärts gleitet, gilt

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa M R}.$$

Um die Gleitrichtung zu überprüfen, definieren wir die hangabwärts gerichtete Geschwindigkeit des Berührungspunkts der Walze relativ zur Straße:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

Für eine aus der Ruhe beginnende Gleitbewegung mit konstanter Beschleunigung gilt

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

Eine hangaufwärts gerichtete Gleitreibung ist also nur dann mit hangabwärts gerichtetem Gleiten vereinbar, wenn

$$a > R\alpha_i.$$

Alle folgenden Formeln setzen außerdem nichtnegative Normalkräfte voraus. Eine verschwindende Normalkraft kennzeichnet einen möglichen Kontaktverlust; jenseits dieser Grenze gilt das angenommene Modell mit zwei Kontakten und ohne Nickbewegung nicht mehr.

#### Beide Walzen rollen ohne Gleiten.

Hier gilt

$$f_r = f_f = \kappa M a.$$

Die zusammengefasste Gleichung für die hangabwärts gerichtete Bewegung lautet dann

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

Daraus folgt

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149} g \sin \theta \simeq 0.8336 g \sin \theta,$$

und

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

Die an jedem der beiden Kontakte erforderliche Reibungskraft beträgt

$$f_0 = \frac{7\kappa Mg \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

Mit der Bezeichnung

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

lauten die Normalkräfte

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2} (\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

Da  $N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$ , stellt der hintere Kontakt die strengere Haftreibungsbedingung:

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

Umformen ergibt

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

oder

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

Als unabhängige Überprüfung betrachten wir die kinetische Energie beim reinen Rollen:

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2 \left( \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

Setzt man ihre Zunahme gleich der Abnahme der gravitativen potenziellen Energie, erhält man dasselbe  $a_0$ .

**Die hintere Walze gleitet; die vordere Walze rollt.**

Nun gilt

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa Ma.$$

Daher gilt

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

Einsetzen der Normalkraft ergibt

$$(7 + \kappa)a = 7g \sin \theta - \frac{7\mu_k}{2} [g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

Fassen wir die Terme mit  $a$  zusammen, erhalten wir

$$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

Die Winkelbeschleunigungen sind

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{\text{SR}})}{\kappa M R}, \quad \alpha_f = \frac{a_{\text{SR}}}{R}.$$

Die Konsistenzbedingungen lauten

$$a_{\text{SR}} > \frac{\mu_k N_r(a_{\text{SR}})}{\kappa M}, \quad \kappa M a_{\text{SR}} \leq \mu_s N_f(a_{\text{SR}}).$$

Die erste bewirkt, dass der hintere Kontakt hangabwärts gleitet; die zweite ermöglicht es der vorderen Walze, weiterhin zu rollen.

Dies ist der gemischte Lösungsweig, der zu prüfen ist, wenn die hintere Walze ihre Haftung verliert. Kann die vordere Walze die erforderliche Haftreibung nicht aufbringen, müssen beide Walzen gleiten.

**Die hintere Walze rollt; die vordere Walze gleitet.**

Der Vollständigkeit halber gilt für die andere gemischte Kombination der Kontaktzustände

$$f_r = \kappa M a, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

Somit gilt

$$(7 + \kappa) M a = 7 M g \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

woraus folgt

$$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

Die zugehörigen Winkelbeschleunigungen sind

$$\alpha_r = \frac{a_{\text{RS}}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{\text{RS}})}{\kappa M R}.$$

Die zugehörigen Konsistenzbedingungen lauten

$$\kappa M a_{\text{RS}} \leq \mu_s N_r(a_{\text{RS}}), \quad a_{\text{RS}} > \frac{\mu_k N_f(a_{\text{RS}})}{\kappa M}.$$

Dies ist eine an Bedingungen geknüpfte Lösung für einen Gleitzustand. Sie beschreibt nicht den Fall, dass aus dem Lösungsweig mit zwei rollenden Walzen die vordere Walze als erste die Haftung verliert, denn dieser Zweig erfordert an beiden Kontakten gleich große Reibungskräfte, während vorn die größere Normalkraft wirkt.

**Beide Walzen gleiten.**

In diesem Fall gilt

$$f_r + f_f = \mu_k (N_r + N_f) = 7\mu_k M g \cos \theta.$$

Daher gilt

$$a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

Wegen

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

vereinfachen sich die Normalkräfte zu

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2} (1 \mp q\mu_k).$$

Somit gilt

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu_k).$$

Die vordere Walze hat die größere Winkelbeschleunigung. Folglich lautet die strengere Bedingung dafür, dass beide Berührungspunkte aus der Ruhe hangabwärts gleiten,

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

Für  $0 \leq \theta < \pi/2$  lautet sie

$$\tan \theta > \mu_k \left[ 1 + \frac{7}{2\kappa} (1 + q\mu_k) \right].$$

Damit beide Kontakte erhalten bleiben, muss außerdem gelten

$$q\mu_k \leq 1.$$

Wenn  $\mu_k = 0$ , führen die Walzen aus der Ruhe eine reine translatorische Gleitbewegung aus:

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

Die Unterscheidung zwischen dem Einsetzen und dem Fortbestehen des Gleitens ist wesentlich: Die Haftreibung bestimmt, ob ein Kontakt die Haftung verliert, während die obigen Bedingungen für die Gleitreibung bestimmen, ob ein angenommener Gleitzustand konsistent ist. Eine Lösung mit Gleitreibung sollte eine mögliche Lösung ohne Gleiten nicht allein deshalb ersetzen, weil  $\mu_k < \mu_s$ .

#### 4. Bewegung auf dem Abschnitt mit geringerer Reibung

Auf der anfänglichen, rein rollend zurückgelegten Strecke  $d$  beträgt die Beschleunigung  $a_0$ . Bei einem Start aus der Ruhe gilt

$$v_d = \sqrt{2a_0 d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

Wir vernachlässigen den kurzen Übergang, während dessen erst eine Walze die neue Oberfläche erreicht hat, und verwenden dabei die angegebene Näherung für große Strecken. Weder die Translations- noch die Winkelgeschwindigkeit ändert sich sprunghaft.

Sobald beide Walzen auf der neuen Oberfläche gleiten, ersetzen wir in den vorangegangenen Ergebnissen für das Gleiten beider Walzen  $\mu_k$  durch  $\mu'_k$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2} (1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

Diese Größen sind konstant.

Für die verbleibende Strecke  $s - d$  gilt

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

sodass sich für die Geschwindigkeit beider Walzenmittelpunkte ergibt:

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

Die auf diesem Abschnitt verstrichene Zeit ergibt sich aus der mittleren Geschwindigkeit:

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

also

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Die Integration der konstanten Winkelbeschleunigungen ergibt

$$\omega_r = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 - q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d},$$

$$\omega_f = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 + q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

Die Voraussetzung, dass beide Walzen zu gleiten beginnen, erfordert einen konsistenten Zustand mit hangabwärts gerichtetem Gleiten. Tatsächlich gilt unmittelbar nach dem Eintritt

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i)\Delta\tau,$$

sodass die Bedingung  $a_1 > R\alpha'_f$  zusammen mit nichtnegativen Normalkräften erfüllt sein muss. Der verringerte Haftreibungskoeffizient  $\mu'_s$  bestimmt den Haftungsverlust, geht aber nicht in die anschließenden Geschwindigkeiten ein, sobald beide Kontakte gleiten.

---

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.