

المسألة 1: الرادار المخترق للأرض

يُستخدم الرادار المخترق للأرض (GPR) لكشف الأجسام المدفونة بالقرب من سطح الأرض وتحديد مواقعها، وذلك بإرسال موجات كهرومغناطيسية إلى داخل الأرض واستقبال الموجات المنعكسة عن تلك الأجسام. يوضع الهوائي والكاشف مباشرة على سطح الأرض، ويقعان عند النقطة نفسها.

نُمثل موجة كهرومغناطيسية مستوية مستقطبة خطياً، ذات تردد زاوي ω وتنتشر في اتجاه z ، بالتعبير الآتي لجالها:

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (1)$$

حيث E_0 ثابت، و α معامل التوهين، و β العدد الموجي، ويُعبّر عن الأخيرين، على الترتيب، كما يأتي:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \omega \left\{ \frac{\mu \varepsilon}{2} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (2)$$

حيث ترمز ε ، μ ، و σ إلى النفاذية المغناطيسية والسماحية الكهربائية والموصلية الكهربائية، على الترتيب.

تصبح الإشارة غير قابلة للكشف عندما تنخفض سعة إشارة الرادار الواصلة إلى الجسم إلى أقل من $1/e$ ($\approx 37\%$) من قيمتها الابتدائية. وعادةً ما تُستخدم موجة كهرومغناطيسية ذات تردد متغير (10 – 1000 MHz) لإتاحة ضبط مدى الكشف وقدرته على التمييز.

يعتمد أداء الرادار المخترق للأرض على قدرته على التمييز. وتُحدّد هذه القدرة بأصغر مسافة فاصلة بين عاكسين متجاورين يمكن كشفهما. ويجب أن تُنتج هذه المسافة الدنيا فرق طور لا يقل عن 180° بين الموجتين المنعكستين عند الكاشف.

الأسئلة:

(المعطيات: $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m)

1. افترض أن الأرض غير مغناطيسية ($\mu = \mu_0$) وتحقق الشرط $\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1$. اشتق تعبير سرعة الانتشار v بدلالة μ و ε .

باستخدام المعادلتين (1) و (2) [نقطة 1.0].

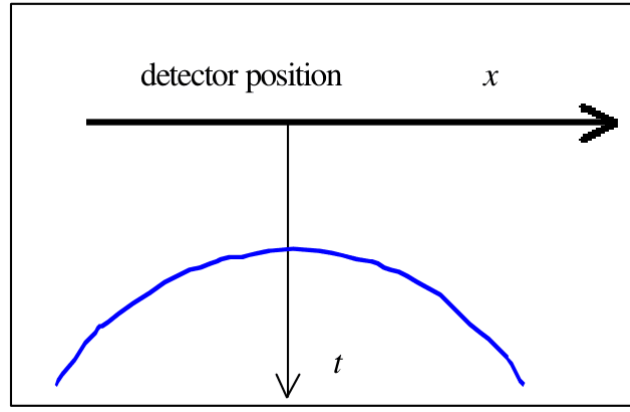
2. حدّد أقصى عمق يمكن عنده كشف جسم في أرض موصليتها 1.0 mS/m وسماحياتها $9\varepsilon_0$ ، وتحقق الشرط

$$\left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2 \ll 1, \quad (S = \text{ohm}^{-1}; \text{استخدم } \mu = \mu_0). \quad [نقطة 2.0]$$

3. اعتبر قضيبين موصلين متوازيين مدفونين أفقياً في الأرض. يقع القضيبان على عمق 4 أمتار. ومن المعلوم أن موصلية الأرض 1.0 mS/m وسماحياتها $9\varepsilon_0$. افترض أن القياس بالرادار المخترق للأرض يُجرى عند موضع يقع فوق أحد القضيبين تقريباً.

وافترض استخدام كاشف نقطي. حدّد أدنى تردد مطلوب للحصول على قدرة تمييز جانبية قدرها 50 cm [نقطة 3.5].

4. لتحديد عمق قضيب مدفون d في الأرض نفسها، اعتبر القياسات التي تُجرى على طول خط عمودي على القضيب. يوضّح الشكل الآتي النتيجة:



رسم بياني لزمن الانتقال t بدلالة موضع الكاشف x ، حيث $t_{\min} = 100 \text{ ns}$.

اشتق t بوصفه دالة في x ، وحدد d [3.5 نقطة].

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. في حد الفقد المنخفض المذكور،

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

2. أقصى عمق للكشف هو

$$D_{\max} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.$$

3. عندما يكون عمق القضيبين $h = 4 \text{ m}$ والمسافة الجانبية الفاصلة بينهما $s = 0.50 \text{ m}$ ،

$$f_{\min} \simeq \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

4. باختيار $x = 0$ فوق القضيب مباشرة،

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2} = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}}, \quad d = \frac{vt_{\min}}{2} \approx 5.0 \text{ m}.$$

الحل

1. سرعة الانتشار

تحقق نقطة ذات طور ثابت العلاقة

$$\omega t - \beta z = \text{ثابت}.$$

بالتفاضل نحصل على سرعة الطور:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

نعرف المعامل الصغير العديم الأبعاد

$$q = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad q^2 \ll 1.$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين،

$$\sqrt{1+q^2} = 1 + \frac{q^2}{2} + O(q^4).$$

ومن ثم تعطي المعادلة (2)

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(2 + \frac{q^2}{2} + O(q^4) \right) \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{q^2}{8} + O(q^4) \right).$$

بالاحتفاظ بالحد الرئيس،

$$\boxed{v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}}.$$

للأرض غير المغناطيسية، $\mu = \mu_0$. وعند هذه الرتبة، يتناسب β طردياً مع ω ، لذا يمكن إهمال التشتت، وتساوي سرعة المجموعة هذه القيمة أيضاً.

2. أقصى عمق للكشف

لحساب معامل التوهين، نحتفظ بأول حد غير صفري من المفكوك نفسه:

$$\alpha \simeq \omega \left[\frac{\mu \varepsilon}{2} \frac{q^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

إذن، عند هذه الرتبة، يكون معامل التوهين مستقلاً عن التردد.

لجسم يقع أسفل الهوائي مباشرة على عمق D ، تعطي المعادلة (1) نسبة سعة الموجة الساقطة إلى سعتها الابتدائية:

$$\frac{E_{\text{amp}}(D)}{E_0} = e^{-\alpha D}.$$

تحدد المسألة عتبة الإشارة الواصلة إلى الجسم، لذا فإن مسافة الانتشار التي تدخل في هذا الشرط هي D . وعند العمق الحدي،

$$e^{-\alpha D_{\text{max}}} = \frac{1}{e},$$

ومن ثم

$$D_{\text{max}} = \frac{1}{\alpha} \simeq \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}.$$

باستخدام

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-3} \text{ S/m}, \quad \varepsilon = 9(8.85 \times 10^{-12}) = 7.965 \times 10^{-11} \text{ F/m},$$

نحصل على

$$\alpha \simeq \frac{1.0 \times 10^{-3}}{2} \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{7.965 \times 10^{-11}}} = 6.28 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

وعليه،

$$\boxed{D_{\text{max}} = 15.9 \text{ m} \approx 16 \text{ m}.}$$

3. أدنى تردد للحصول على قدرة تمييز جانبية قدرها 50 cm

نعمل في المستوى الرأسي العمودي على القضيبين. لتكن قيمة عمقهما المشترك h ، والمسافة الجانبية الفاصلة بينهما s ، ولنأخذ موضع الهوائي والكاشف فوق القضيب الأول مباشرة.

المسافتان إلى القضييين في اتجاه واحد هما

$$r_1 = h, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

بما أن المرسل والكاشف يقعان عند النقطة نفسها، فإن الإشارتين المنعكستين تقطعان المسافتين $2r_1$ و $2r_2$. ومن ثم يكون فرق المسار بينهما

$$\Delta L = 2 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

باعتبار القضييين الموصلين عاكسين متكافئين، تُلغى إزاحة الطور المشتركة الناجمة عن الانعكاس عند حساب الفرق. ويكون فرق الطور عند الكاشف

$$\Delta\phi = \beta\Delta L = \frac{4\pi f}{v} \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right).$$

معيار التمييز المحدد هو $\Delta\phi \geq \pi$. ويتحقق أدنى تردد عند المساواة:

$$f_{\min} = \frac{v}{4 \left(\sqrt{h^2 + s^2} - h \right)}.$$

سرعة الموجة في هذه الأرض هي

$$v \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_0(9\epsilon_0)}} = 9.995 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

عند $h = 4 \text{ m}$ و $s = 0.50 \text{ m}$ ،

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h = \sqrt{4^2 + 0.50^2} - 4 = 0.0311289 \text{ m}.$$

إن،

$$f_{\min} \simeq \frac{9.995 \times 10^7}{4(0.0311289)} = 8.027 \times 10^8 \text{ Hz},$$

أو، بالتقريب إلى دقة مناسبة،

$$f_{\min} \approx 8.0 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}.$$

يعطي تقريب المسافة الفاصلة الصغيرة النتيجة المقربة نفسها:

$$\sqrt{h^2 + s^2} - h \simeq \frac{s^2}{2h} \implies f_{\min} \simeq \frac{vh}{2s^2}.$$

يقع التردد المطلوب ضمن المجال المذكور 10–1000 MHz. علاوة على ذلك، عند التردد المحسوب،

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi f_{\min} \epsilon} \right)^2 \simeq 6.2 \times 10^{-6} \ll 1,$$

لذا فإن تقريب الفقد المنخفض متسق. ويقع كلا القضييين أيضاً ضمن مدى الكشف الذي وُجد في الجزء 2.

4. منحني زمن الانتقال وعمق القضييب

نختار الإحداثي الأفقي $x = 0$ فوق القضييب المدفون مباشرة. في أرض متجانسة، تكون المسافة في اتجاه واحد من الهوائي إلى القضييب

$$r(x) = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

يشمل زمن الانتقال المقيس رحلتي الذهاب والإياب:

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + x^2}.$$

يتحقق أقصر مسار عند $x = 0$ ، مما يعطي

$$t_{\min} = \frac{2d}{v}.$$

وبالتالي،

$$d = \frac{vt_{\min}}{2} = \frac{(9.995 \times 10^7)(100 \times 10^{-9})}{2} \text{ m} = 4.998 \text{ m}.$$

إذن،

$$d \approx 5.0 \text{ m}.$$

بالتعويض بأدنى زمن انتقال في معادلة المنحنى نحصل على

$$t(x) = \sqrt{t_{\min}^2 + \frac{4x^2}{v^2}} \simeq (100 \text{ ns}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5.0 \text{ m}}\right)^2}.$$

هذا هو فرع الزمن الموجب للقطع الزائد

$$\frac{t^2}{t_{\min}^2} - \frac{x^2}{d^2} = 1.$$

وهو متناظر حول $x = 0$ ، ويبلغ زمن الانتقال قيمته الدنيا، وهي 100 ns، فوق القضيب مباشرة، ويزداد مع $|x|$. وعندما $|x| \gg d$ ،

$$t(x) \sim \frac{2|x|}{v}.$$

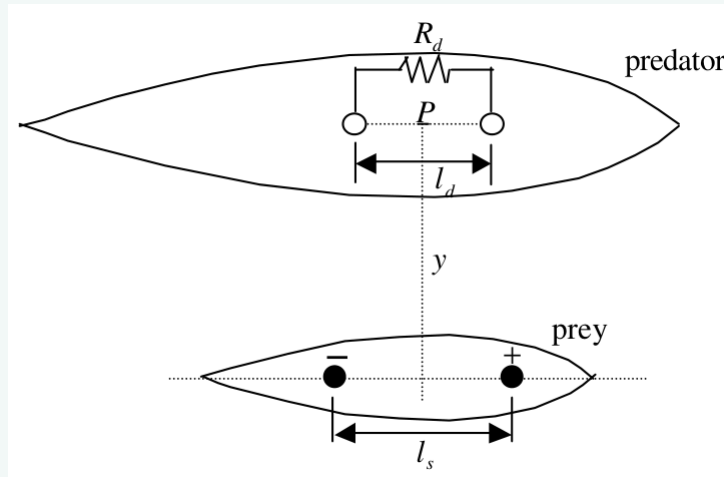
ولأن محور الزمن في الشكل يتجه إلى الأسفل، تظهر أزمنة الانتقال الأكبر في مواضع أدنى على الصفحة، كما هو موضح.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: استشعار الإشارات الكهربائية

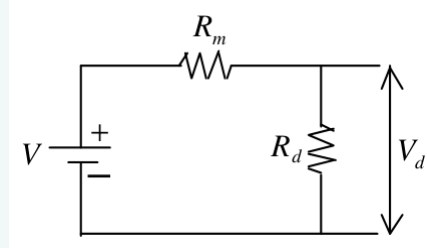
تمتلك بعض الحيوانات البحرية القدرة على اكتشاف كائنات أخرى على مسافة منها بفضل التيارات الكهربائية التي تولدها تلك الكائنات أثناء عمليات التنفس أو غيرها من العمليات التي تنطوي على انقباض العضلات. وتستخدم بعض الحيوانات المفترسة هذه الإشارة الكهربائية لتحديد مواقع فرائسها، حتى عندما تكون مدفونة تحت الرمال.

يمكن نمذجة الآلية الفيزيائية الكامنة وراء توليد التيار لدى الفريسة وكشفه لدى المفترس كما يوضح الشكل 1-11. يسري التيار الذي تولده الفريسة بين كرتين ذواتي جهد موجب وسالب في جسم الفريسة. وتبلغ المسافة بين مركزي الكرتين l_s ، ونصف قطر كل منهما r_s ، وهو أصغر بكثير من l_s . والمقاومية الكهربائية لماء البحر هي ρ . افترض أن مقاومة جسم الفريسة تساوي مقاومة ماء البحر المحيط بها، مما يعني إمكانية إهمال الحد المحيط بالفريسة في الشكل.



الشكل 11-1. نموذج يصف كشف المفترس للقدرة الكهربائية الآتية من فريسة.

لوصف كشف المفترس للقدرة الكهربائية الآتية من الفريسة، يُنمذج الكاشف على نحو مماثل بكترتين على جسم المفترس تلامسان ماء البحر المحيط به، ويقع الزوج المكوّن منهما موازياً لزوج الكرتين في جسم الفريسة. تفصل بينهما مسافة l_d ، ونصف قطر كل منهما r_d ، وهو أصغر بكثير من l_d . في هذه الحالة، يقع مركز الكاشف على مسافة y فوق المصدر مباشرة، ويكون الخط الواصل بين الكرتين موازياً للمجال الكهربائي كما يوضح الشكل 11-1. وكل من l_s و l_d أصغر بكثير أيضاً من y . ويُفترض أن شدة المجال الكهربائي ثابتة على امتداد الخط الواصل بين الكرتين. ومن ثم يشكّل الكاشف منظومة دائرة مغلقة تصل بين الفريسة وماء البحر المحيط والمفترس، كما يوضح الشكل 11-2.



الشكل 11-2. منظومة الدارة المغلقة المكافئة التي تضم المفترس المستشعر والفريسة وماء البحر المحيط.

في الشكل، يمثل V فرق الجهد بين كرتي الكاشف الناشئ عن المجال الكهربائي الذي تولّده الفريسة، وتمثّل R_m المقاومة الداخلية الناشئة عن ماء البحر المحيط. كذلك يمثّل V_d و R_d ، على الترتيب، فرق الجهد بين كرتي الكاشف ومقاومة عنصر الكشف داخل المفترس.

الأسئلة:

1. أوجد متجه كثافة التيار $\vec{j}$ (التيار لكل وحدة مساحة) الناشئ عن مصدر تيار نقطي I_s على مسافة r في وسط لانهائي. [1.5 درجة]
2. استناداً إلى القانون $\vec{E} = \rho \vec{j}$ ، أوجد شدة المجال الكهربائي $\vec{E}_p$ في منتصف المسافة بين كرتي الكشف (عند النقطة P) لتيار معطى I_s يسري بين كرتين في جسم الفريسة [2.0 درجة].
3. أوجد، للتيار نفسه I_s ، فرق الجهد بين كرتي المصدر (V_s) في الفريسة [1.5 درجة]. وأوجد المقاومة بين كرتي المصدر (R_s) [0.5 درجة] والقدرة التي ينتجها المصدر (P_s) [0.5 درجة].
4. أوجد R_m [0.5 درجة] و V_d [1.0 درجة] في الشكل 11-2، واحسب أيضاً القدرة المنتقلة من المصدر إلى الكاشف (P_d) [0.5 درجة].
5. أوجد القيمة المثلى لـ R_d التي تؤدي إلى أقصى قدرة مكتشفة [1.5 درجة]، وأوجد أيضاً هذه القدرة القصوى [0.5 درجة].

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن اتجاه $\hat{x}$ من الكرة السالبة للفريسة نحو كرتها الموجبة. فروق الجهد أدناه مقادير موجبة. وتحفظ النتائج بالحدود الرائدة في ظل الافتراضات المذكورة

$$r_s \ll l_s, \quad r_d \ll l_d, \quad l_s, l_d \ll y.$$

لا تعطي المسألة قيماً عددية للمعلمات، لذا تكون الإجابات رمزية.

1. عندما يكون $\hat{r}$ متجهاً بعيداً عن المصدر النقطي،

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{r}.$$

2. يتجه المجال من جهة المصدر الموجب نحو جهة المصدر السالب:

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{\mathbf{x}}.$$

3. يُعطى فرق جهد المصدر ومقاومته وقدرته بالعلاقات

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}, \quad R_s \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}, \quad P_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. تُعطى مقاومة ماء البحر وفرق جهد الكاشف في حالة الدارة المفتوحة بالعلاقين

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}, \quad V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}.$$

وبالتالي،

$$V_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V, \quad P_d = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

5. تتحقق أقصى قدرة مكتشفة عند

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

وتبلغ قيمتها

$$P_{d,\text{max}} = \frac{V^2}{4R_m} \simeq \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6} \simeq P_s \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

الحل

1. كثافة التيار لمصدر تيار نقطي

في وسط متجانس ومتساوي الخواص ولانهائي، يقتضي التناظر الكروي أن تكون كثافة التيار شعاعية وأن يكون لها المقدار نفسه في كل موضع على كرة مركزها المصدر.

يعطي انحفاظ التيار

$$I_s = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 j(r).$$

ومن ثم،

$$\vec{j}(r) = \frac{I_s}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

بالنسبة إلى مصدر موجب، يتجه التيار إلى الخارج؛ أما مصرف يسحب التيار نفسه فتكون إشارته معاكسة. ووحدة كثافة التيار في النظام الدولي للوحدات هي A m^{-2} .

2. المجال الكهربائي عند P

نضع منتصف المسافة بين كرتي الفريسة عند نقطة الأصل. تقع الكرة الموجبة عند $x = l_s/2$ ، والكرة السالبة عند $x = -l_s/2$ ، وتقع P عند $(0, y)$.

بما أن الكرتين صغيرتان مقارنة بالمسافة الفاصلة بينهما وبُعدهما عن P، نستبدلهما بمصدر نقطي $+I_s$ ومصرف نقطي $-I_s$. وتبلغ المسافة المشتركة بين كل منهما و P

$$R = \sqrt{y^2 + \frac{l_s^2}{4}}.$$

وفقاً لمبدأ التراكب،

$$\begin{aligned}\vec{j}(P) &= \frac{I_s}{4\pi R^3} \left[\left(-\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) - \left(\frac{l_s}{2} \hat{x} + y \hat{y} \right) \right] \\ &= -\frac{I_s l_s}{4\pi R^3} \hat{x}.\end{aligned}$$

تتلاشى المركبتان الرأسيتان، بينما تتضافر المركبتان الأفقيتان.

باستخدام الصيغة المحلية لقانون أوم، $\vec{E} = \rho \vec{j}$ ،

$$\vec{E}_p = -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi(y^2 + l_s^2/4)^{3/2}} \hat{x}.$$

هذا التعبير دقيق ضمن تقريب المصدر النقطي. وعندما يكون $l_s \ll y$ ،

$$\boxed{\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \hat{x}}.$$

إذن تقع P على الخط الاستوائي لثنائي قطب تيارى، يتناقص مجاله وفقاً لـ y^{-3} .

3. فرق جهد المصدر ومقاومته وقدرته

بالنسبة إلى مصدر نقطي منفرد، يُعطى المجال الكهربائي الشعاعي بالعلاقة

$$E_r(r) = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2}.$$

باتخاذ الجهد عند اللانهاية مساوياً للصفر،

$$\phi(r) = \int_r^\infty E_r(r') dr' = \frac{\rho I_s}{4\pi r}.$$

يولد مصرف لتيار I_s جهداً يساوي سالب هذا الجهد.

عند كل من كرتي المصدر، يكون مقدار مساهمتها الذاتية في جهد سطحها

$$\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

تكون مساهمة الكرة الأخرى من رتبة $\rho I_s / (4\pi l_s)$ ، أي إن نسبتها إلى المساهمة الذاتية هي r_s / l_s ، وتُهمل في الرتبة الرائدة. ومن ثم

$$\phi_+ \simeq \frac{\rho I_s}{4\pi r_s}, \quad \phi_- \simeq -\frac{\rho I_s}{4\pi r_s}.$$

وعليه، يكون فرق الجهد

$$\boxed{V_s = \phi_+ - \phi_- \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}}.$$

واستكمالاً للعرض، فإن الاحتفاظ بالجهد المتبادل لأحاديي القطب يعطي

$$V_s \simeq \frac{\rho I_s}{2\pi} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{l_s} \right),$$

حيث يكون الحد الثاني مهماً في ظل الافتراض المذكور.

تُستنتج المقاومة المقاسة بين كرتي المصدر من قانون أوم:

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} \simeq \frac{\rho}{2\pi r_s}.$$

القدرة الكهربائية التي تزود بها الفريسة هي

$$P_s = I_s V_s = I_s^2 R_s \simeq \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}.$$

4. مقاومة ماء البحر وفرق جهد الكاشف والقدرة المكتشفة

يدخل التيار المار عبر الكاشف إلى الماء المحيط عند إحدى كرتي الكاشف ويخرج منه عند الأخرى. ونُستخرج مقاومة هذا المسار بتطبيق الجزء 3 على كرتين نصف قطر كل منهما r_d ، تفصل بينهما مسافة l_d . وبما أن $r_d \ll l_d$ ،

$$R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

من الناحية الفيزيائية، يساهم كل تماس كروي صغير بمقاومة انتشار للتيار مقدارها $\rho/(4\pi r_d)$.

يكون المجال الكهربائي للفريسة منتظماً تقريباً على امتداد الكاشف لأن $l_d \ll y$. وتكون كرة الكاشف اليمنى عند جهد أعلى، لذا يُعطى فرق الجهد في حالة الدارة المفتوحة بالعلاقة

$$\begin{aligned} V &= \phi_{\text{right}} - \phi_{\text{left}} = - \int_{\text{left}}^{\text{right}} \vec{E}_p \cdot d\vec{l} \\ &\simeq |\vec{E}_p| l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3}. \end{aligned}$$

في الدارة المكافئة في الشكل 2-11، يعطي قانون كيرشوف للجهد

$$I_d = \frac{V}{R_m + R_d}.$$

ومن ثم،

$$V_d = I_d R_d = \frac{R_d}{R_m + R_d} V \simeq \frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \frac{R_d}{R_d + \rho/(2\pi r_d)}.$$

القدرة المبذّدة في عنصر الكشف هي

$$P_d = I_d^2 R_d = \frac{V_d^2}{R_d} = \frac{V^2 R_d}{(R_m + R_d)^2}.$$

وبدلالة المعلمات المعطاة،

$$P_d \simeq \frac{\rho^2 I_s^2 l_s^2 l_d^2}{16\pi^2 y^6} \frac{R_d}{[R_d + \rho/(2\pi r_d)]^2}.$$

5. المقاومة المثلى للكاشف والقدرة القصوى

لتيار المصدر والترتيب الهندسي المعطيين، يكون كل من V و R_m ثابتاً. وباشتقاق القدرة المكتشفة بالنسبة إلى R_d ،

$$\frac{dP_d}{dR_d} = V^2 \frac{R_m - R_d}{(R_m + R_d)^3}.$$

تكون المشتقة موجبة عندما $R_d < R_m$ ، وسالبة عندما $R_d > R_m$. لذا تتحقق القيمة القصوى عندما

$$R_{d,\text{opt}} = R_m \simeq \frac{\rho}{2\pi r_d}.$$

وهذا هو شرط انتقال القدرة القصوى.

عند هذه المقاومة، يكون $V_d = V/2$ ، مما يعطي

$$P_{d,\max} = \frac{V^2}{4R_m}.$$

وبالتعويض نحصل على

$$\begin{aligned} P_{d,\max} &\simeq \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{4\pi y^3} \right)^2 \frac{2\pi r_d}{4\rho} \\ &= \frac{\rho I_s^2 l_s^2 l_d^2 r_d}{32\pi y^6}. \end{aligned}$$

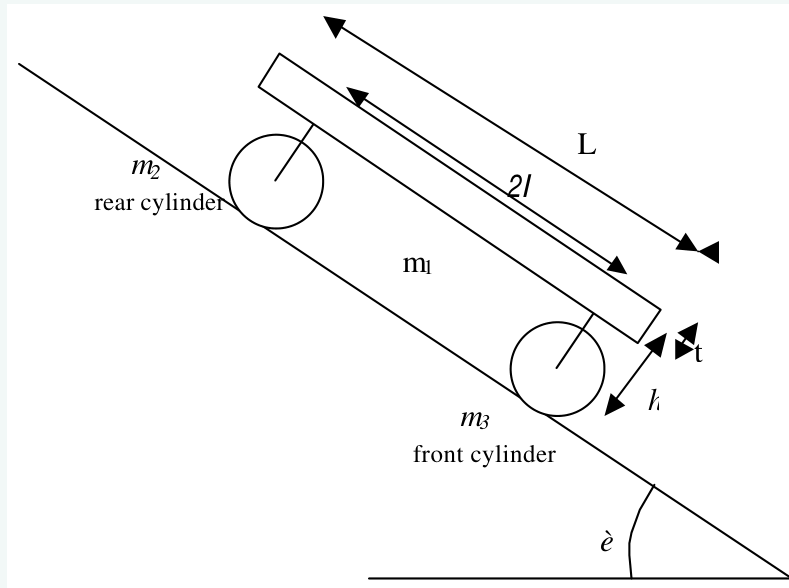
وباستخدام قدرة المصدر من الجزء 3، يمكن أيضاً كتابة ذلك على الصورة

$$\frac{P_{d,\max}}{P_s} \simeq \frac{r_s r_d l_s^2 l_d^2}{16y^6}.$$

ينشأ الاعتماد على y^{-6} من تربيع مجال ثنائي القطب، الذي يتناقص وفقاً لـ y^{-3} .

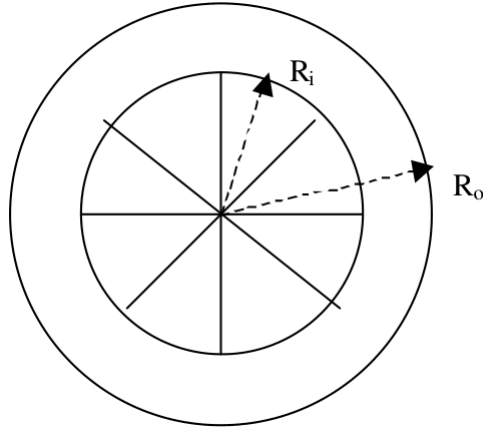
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مركبة ثقيلة تتحرك على طريق مائل



الشكل 1-III: نموذج مبسط لمركبة ثقيلة تتحرك على طريق مائل.

يمثل الشكل أعلاه نموذجاً مبسطاً لمركبة ثقيلة (مدحلة طرق) لها أسطوانة خلفية وأخرى أمامية تقومان مقام عجلتيها على طريق مائل بزاوية ميل θ (يُرمز إليها في الشكل بالرمز θ) كما هو موضح في الشكل 1-III. لكل من الأسطوانتين كتلة كلية ثمانية قضبان شعاعية كتلتها الكلية $0.2M$. كتلة الهيكل السفلي الذي يحمل جسم المركبة مهملة. ويمكن تمثيل الأسطوانة بالنموذج الموضح في الشكل 2-III. تتحرك المركبة إلى أسفل الطريق تحت تأثير قوتي الجاذبية والاحتكاك. وتوضع الأسطوانتان الأمامية والخلفية بصورة متناظرة بالنسبة إلى المركبة.



الشكل 2-III: نموذج مبسط للأسطوانتين.

معاملا الاحتكاك السكوني والحركي بين الأسطوانة والطريق هما μ_s و μ_k على الترتيب. كتلة جسم المركبة $5M$ ، وطوله L ، وسُمكه t . المسافة بين الأسطوانتين الأمامية والخلفية هي $2l$ ، بينما المسافة من مركز الأسطوانة إلى قاعدة جسم المركبة هي h . افترض أن احتكاك التدرج بين الأسطوانة ومحورها مهملاً.

الأسئلة:

1. احسب عزم القصور الذاتي لأي من الأسطوانتين [1.5 درجة].
2. ارسم جميع القوى المؤثرة على الجسم، والأسطوانة الأمامية، والأسطوانة الخلفية. اكتب معادلات الحركة لكل جزء منها [2.5 درجة].
3. يُفترض أن المركبة تنطلق من السكون، ثم تتحرك بحرية تحت تأثير الجاذبية. اذكر جميع أنواع الحركة الممكنة للنظام، واشتق تسارعاتها بدلالة الكميات الفيزيائية المعطاة [4.0 درجات].
4. افترض أن المركبة، بعد أن تقطع مسافة d بتدرج محض انطلاقاً من السكون، تدخل مقطعاً من الطريق تنخفض فيه جميع معاملات الاحتكاك إلى قيم ثابتة أصغر، هي μ'_s و μ'_k ، بحيث تبدأ الأسطوانتان بالانزلاق. احسب السرعتين الخطية والزاوية لكل أسطوانة بعد أن تقطع المركبة مسافة كلية مقدارها s مترًا. نفترض هنا أن d و s أكبر بكثير من أبعاد المركبة [2.0 درجة].

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لنرمز إلى زاوية الميل بالرمز θ ، ولنعرّف

$$R = R_o, \quad b = h + \frac{t}{2}, \quad \kappa = \frac{262}{375}, \quad q = \frac{5b}{7l}.$$

يشير الدليلان السفليان r, f إلى الخلف والأمام. يُعد التسارع الخطي موجباً نحو أسفل المنحدر، ويُعد التسارع الزاوي موجباً في اتجاه التدرج نحو أسفل المنحدر.

1. عزم القصور الذاتي لأي من الأسطوانتين

$$I = \kappa MR^2 = \frac{262}{375} MR^2 \simeq 0.699 MR^2.$$

وحدته في النظام الدولي للوحدات هي kg m^2 .

2. معادلات الحركة

لتكن مركبتا قوة المحور المؤثرة على الأسطوانة i هما P_i نحو أسفل المنحدر و Q_i نحو الطريق. ولتكن القوة العمودية التي يؤثر بها الطريق عليها، و f_i قوة الاحتكاك المؤثرة عليها نحو أعلى المنحدر. هذه مركبات مرجعية ذات إشارة بالنسبة إلى الجسم والهيكل السفلي عديم الكتلة،

$$\begin{aligned} 5Ma &= 5Mg \sin \theta - P_r - P_f, \\ Q_r + Q_f &= 5Mg \cos \theta, \\ l(Q_f - Q_r) &= b(P_r + P_f). \end{aligned}$$

وبالنسبة إلى كل أسطوانة،

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i, \quad N_i = Mg \cos \theta + Q_i, \quad I\alpha_i = Rf_i.$$

ومن ثم،

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - f_r - f_f,$$

$$N_{r,f}(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta \mp q(g \sin \theta - a)].$$

3. حالات التدرج والانزلاق

للاختصار، نعرف

$$\alpha_i^{\text{sl}}(a) = \frac{\mu_k N_i(a)}{\kappa M R}.$$

α_f	α_r	التسارع الخطي المشترك a	الأسطوانة الأمامية	الأسطوانة الخلفية
a_0/R	a_0/R	$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} \simeq 0.8336g \sin \theta$	تتدرج	تتدرج
a_{SR}/R	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SR}})$	$a_{\text{SR}} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}$	تتدرج	تنزلق
$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{RS}})$	a_{RS}/R	$a_{\text{RS}} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}$	تنزلق	تتدرج
$\alpha_f^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$	$\alpha_r^{\text{sl}}(a_{\text{SS}})$	$a_{\text{SS}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$	تنزلق	تنزلق

هذه هي معادلات حالات التلامس الأربع. وتتطلب كل منها $N_r, N_f \geq 0$ ، إلى جانب

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i \quad \text{للأسطوانة المتدرجة}$$

$$a > R\alpha_i^{\text{sl}} \quad \text{للأسطوانة المنزلقة نحو أسفل المنحدر انطلاقاً من السكون}$$

تصف المساواة الحدود الفاصلة بين الحالات.

تتدرج الأسطوانتان انطلاقاً من السكون إذا كان

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

تصل الأسطوانة الخلفية إلى حد الاحتكاك السكوني أولاً. لذا فإن فقدان التماسك عند الانتقال من فرع تدرج الأسطوانتين يؤدي إلى انزلاق الخلفية وحدها أو مباشرة إلى انزلاق الاثنتين؛ أما انزلاق الأمامية وحدها فهو حالة التلامس المختلة البديلة المشروطة، وليس أول فقدان للتماسك في ذلك الفرع.

4. السرعات بعد دخول المقطع ذي الاحتكاك الأقل

عندما $s \geq d$ ، نضع

$$v_d = \sqrt{2a_0d}, \quad a_1 = g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta),$$

$$v = \sqrt{v_d^2 + 2a_1(s-d)}, \quad \Delta\tau = \frac{2(s-d)}{v+v_d}.$$

عندئذ

$$v_r = v_f = v,$$

$$\omega_{r,f} = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R} (1 \mp q\mu'_k) \Delta\tau.$$

تخص إشارة الطرح الأسطوانة الخلفية. وحدات السرعات الخطية هي m s^{-1} ، ووحدات السرعات الزاوية هي rad s^{-1} .

الحل

1. عزم القصور الذاتي

نعدّ الغلاف منتظمًا، وكل قضيب شعاعي قضيبًا رقيقًا منتظمًا يمتد من المحور إلى R_i .

كتلة الغلاف هي $0.8M$ ، ولذلك يكون عزم قصوره الذاتي حول محور الأسطوانة

$$I_{\text{shell}} = \frac{1}{2}(0.8M)(R^2 + R_i^2).$$

كتلة كل قضيب شعاعي هي $0.2M/8$. والقضيب المنتظم الذي طوله R_i ، ويدور حول محور يمر بأحد طرفيه ويعامد القضيب، له عزم قصور ذاتي مقداره $mR_i^2/3$. ومن ثم

$$I_{\text{spokes}} = 8 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{0.2M}{8} \right) R_i^2 \right] = \frac{0.2M}{3} R_i^2.$$

باستخدام $R_i = 0.8R$

$$I = MR^2 \left[\frac{0.8}{2}(1 + 0.8^2) + \frac{0.2}{3}(0.8^2) \right]$$

$$= MR^2 \left(\frac{82}{125} + \frac{16}{375} \right).$$

إذن

$$I = \frac{262}{375} MR^2 = \kappa MR^2.$$

2. مخططات القوى ومعادلات الحركة

نختار المحور x على امتداد الطريق نحو أسفل المنحدر، والمحور y عموديًا على الطريق وموجهًا بعيدًا عنه.

نستخدم نموذج المركبة الصلبة المقصود: تبقى الأسطوانتان على تماس مع الطريق المستقيم، ويكون لمركزيهما التسارع نفسه a ، ويبقى الجسم موازيًا للطريق. ومن ثم يكون تسارعه الزاوي صفرًا. يقع مركز كتلة الجسم في منتصف المسافة بين المحورين، وعلى مسافة عمودية

$$b = h + \frac{t}{2}$$

فوق الخط الواصل بين المحورين.

ينبغي أن تُظهر مخططات القوى ما يأتي.

- الجسم، بما فيه الهيكل السفلي عديم الكتلة: الوزن $5Mg$ ، متجهًا رأسيًا إلى أسفل عند مركز كتلته؛ وعند موضع كل محور، قوة مركبتها $P_i -$ على امتداد الطريق و $Q_i +$ عموديًا عليه.

- الأسطوانة الخلفية: الوزن Mg ، متجهًا رأسيًا إلى أسفل ومارًا بمركزها؛ ومركبتا قوة المحور P_r نحو أسفل المنحدر و Q_r نحو الطريق؛ ورد فعل الطريق N_r ، عموديًا على الطريق عند نقطة التلامس؛ والاحتكاك f_r ، نحو أعلى المنحدر عند نقطة التلامس.
- الأسطوانة الأمامية: القوى المناظرة Mg, P_f, Q_f, N_f, f_f .

أسهم قوى المحور تحدد اتجاهات مرجعية: فقد تكون إحدى المركبات ذات الإشارة سالبة. يتجه الاحتكاك نحو أعلى المنحدر في حالات الانزلاق نحو أسفل المنحدر المدروسة هنا، كما يوفر عزم القوة اللازم للتدحرج نحو أسفل المنحدر.

يعطي قانون نيوتن الثاني للجسم

$$5Ma = 5Mg \sin \theta - P_r - P_f$$

و

$$Q_r + Q_f = 5Mg \cos \theta.$$

عند أخذ عزوم القوى حول مركز كتلة الجسم، يكون إحداثيا موضعى المحورين الموازيان للطريق $+l, -l$ ، وإحداثيهما العمودي $-b$. ويعطي انعدام التسارع الزاوي

$$l(Q_f - Q_r) - b(P_r + P_f) = 0.$$

إذاً

$$l(Q_f - Q_r) = b(P_r + P_f).$$

بالنسبة إلى الأسطوانة i ، تعطي الحركة الانتقالية

$$Ma = Mg \sin \theta + P_i - f_i,$$

$$N_i - Mg \cos \theta - Q_i = 0.$$

لا يولد عزمًا حول محور الأسطوانة إلا احتكاك الطريق، لأن احتكاك المحامل مهمل:

$$I\alpha_i = Rf_i.$$

بجمع المعادلات الثلاث في اتجاه أسفل المنحدر، تُحذف قوى المحاور الداخلية:

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - (f_r + f_f).$$

تحقق ردود الفعل العمودية

$$N_r + N_f = 7Mg \cos \theta.$$

كذلك،

$$N_f - N_r = Q_f - Q_r = \frac{b}{l}(P_r + P_f).$$

وباستخدام معادلة الجسم في اتجاه أسفل المنحدر،

$$N_f - N_r = \frac{5Mb}{l}(g \sin \theta - a) = 7Mq(g \sin \theta - a).$$

ومن ثم

$$N_r(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)],$$

$$N_f(a) = \frac{7M}{2}[g \cos \theta + q(g \sin \theta - a)].$$

تتضمن هذه المعادلات انتقال الحمل نحو الأمام. وبصورة مكافئة،

$$N_f - N_r = q(f_r + f_f).$$

لا يدخل طول الجسم L في الحساب: فليس للجسم تسارع زاوي، ويتحدد مركز كتلته بالتناظر.

3. الحركات الممكنة وتسارعاتها

نفترض الترتيب المعتاد

$$0 \leq \mu_k \leq \mu_s.$$

بالنسبة إلى أسطوانة تتدحرج دون انزلاق،

$$a = R\alpha_i.$$

تقتضي معادلتها الدورانية عندئذ

$$f_i = \frac{I}{R^2}a = \kappa Ma.$$

يجب أن تحقق هذه القوة حد الاحتكاك السكوني

$$\kappa Ma \leq \mu_s N_i.$$

بالنسبة إلى أسطوانة تنزلق نقطة تماسها نحو أسفل المنحدر،

$$f_i = \mu_k N_i, \quad \alpha_i = \frac{\mu_k N_i}{\kappa MR}.$$

للتحقق من اتجاه الانزلاق، نعرّف سرعة نقطة تماس الأسطوانة بالنسبة إلى الطريق في اتجاه أسفل المنحدر:

$$u_i = v - R\omega_i.$$

عند الانطلاق من السكون، يعطي حل الانزلاق ذي التسارع الثابت

$$u_i = (a - R\alpha_i)\tau.$$

لذا فإن الاحتكاك الحركي المتجه نحو أعلى المنحدر لا يتسق مع الانزلاق نحو أسفل المنحدر إلا إذا كان

$$a > R\alpha_i.$$

تتطلب جميع الصيغ أدناه أيضاً أن تكون ردود الفعل العمودية غير سالبة. ويشير انعدام رد فعل إلى احتمال فقدان التلامس؛ وبعد تجاوز ذلك الحد، لا يعود النموذج المفترض، القائم على نقطتي تلامس وعدم دوران المركبة إلى الأمام أو الخلف، صالحاً.

تتدحرج الأسطوانتان دون انزلاق.

هنا

$$f_r = f_f = \kappa Ma.$$

تصبح المعادلة المجمعة في اتجاه أسفل المنحدر

$$7Ma = 7Mg \sin \theta - 2\kappa Ma.$$

ومن ثم

$$a_0 = \frac{7g \sin \theta}{7 + 2\kappa} = \frac{2625}{3149}g \sin \theta \simeq 0.8336g \sin \theta,$$

و

$$\alpha_r = \alpha_f = \frac{a_0}{R}.$$

الاحتكاك المطلوب عند كل من نقطتي التلامس هو

$$f_0 = \frac{7\kappa Mg \sin \theta}{7 + 2\kappa}.$$

بوضع

$$\eta = \frac{2\kappa}{7 + 2\kappa},$$

تكون ردود الفعل

$$N_{r,f}^{(0)} = \frac{7Mg}{2}(\cos \theta \mp q\eta \sin \theta).$$

بما أن $N_r^{(0)} \leq N_f^{(0)}$ ، فإن نقطة التلامس الخلفية تفرض الشرط الأشد للاحتكاك السكوني:

$$f_0 \leq \mu_s N_r^{(0)}.$$

وبإعادة الترتيب نحصل على

$$\eta(1 + q\mu_s) \tan \theta \leq \mu_s,$$

أو

$$\tan \theta \leq \frac{(7 + 2\kappa)\mu_s}{2\kappa(1 + q\mu_s)}.$$

للتحقق بصورة مستقلة، تكون الطاقة الحركية في التدرج المحض

$$K = \frac{1}{2}(7M)v^2 + 2\left(\frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}(7 + 2\kappa)Mv^2.$$

وبمساواة زيادتها بالنقص في طاقة الوضع الثقالية نحصل على القيمة نفسها لـ a_0 .

تنزلق الأسطوانة الخلفية؛ وتندرج الأسطوانة الأمامية.

الآن

$$f_r = \mu_k N_r(a), \quad f_f = \kappa Ma.$$

ومن ثم

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_r(a).$$

بالتعويض عن رد الفعل العمودي،

$$(7 + \kappa)a = 7g \sin \theta - \frac{7\mu_k}{2}[g \cos \theta - q(g \sin \theta - a)].$$

وبتجميع الحدود التي تحتوي على a ،

$$a_{SR} = \frac{7g[(2 + q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa + 7q\mu_k}.$$

يكون التسارعان الزاويان

$$\alpha_r = \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa MR}, \quad \alpha_f = \frac{a_{SR}}{R}.$$

شرطا الاتساق هما

$$a_{SR} > \frac{\mu_k N_r(a_{SR})}{\kappa M}, \quad \kappa Ma_{SR} \leq \mu_s N_f(a_{SR}).$$

يجعل الأول نقطة التلامس الخلفية تنزلق نحو أسفل المنحدر؛ ويتيح الثاني للأسطوانة الأمامية أن تظل متدحرجة.

هذا هو الفرع المختلط الذي ينبغي اختباره عندما تفقد الأسطوانة الخلفية تماسكها السكوني. وإذا لم تستطع الأسطوانة الأمامية توفير الاحتكاك السكوني المطلوب، فلا بد أن تنزلق الأسطوانتان.

تندرج الأسطوانة الخلفية؛ وتنزلق الأسطوانة الأمامية.

استكمالاً للحالات، تحقق تركيبة التلامس المختلطة الأخرى

$$f_r = \kappa Ma, \quad f_f = \mu_k N_f(a).$$

إنَّ

$$(7 + \kappa)Ma = 7Mg \sin \theta - \mu_k N_f(a),$$

مما يعطي

$$a_{RS} = \frac{7g[(2 - q\mu_k) \sin \theta - \mu_k \cos \theta]}{14 + 2\kappa - 7q\mu_k}.$$

يكون التسارعان الزاويان في هذه الحالة

$$\alpha_r = \frac{a_{RS}}{R}, \quad \alpha_f = \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa MR}.$$

وشرطا اتساقها هما

$$\kappa Ma_{RS} \leq \mu_s N_r(a_{RS}), \quad a_{RS} > \frac{\mu_k N_f(a_{RS})}{\kappa M}.$$

هذا حل مشروط لحالة انزلاق. وهو لا يصف كون الأسطوانة الأمامية أول أسطوانة تفقد التماسك انطلاقاً من فرع تدحرج الأسطوانتين، لأن ذلك الفرع يتطلب احتكاكاً متساوياً عند نقطتي التلامس، بينما يكون رد الفعل العمودي عند الأمامية أكبر.

تنزلق الأسطوانتان.

في هذه الحالة،

$$f_r + f_f = \mu_k(N_r + N_f) = 7\mu_k Mg \cos \theta.$$

ومن ثم

$$a_{SS} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta).$$

بما أن

$$g \sin \theta - a_{SS} = \mu_k g \cos \theta,$$

تُختزل ردود الفعل العمودية إلى

$$N_{r,f}^{SS} = \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu_k).$$

ومن ثم

$$\alpha_{r,f} = \frac{7\mu_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu_k).$$

للأسطوانة الأمامية التسارع الزاوي الأكبر. ولذلك فإن الشرط الأشد لانزلاق نقطتي التلامس نحو أسفل المنحدر انطلاقاً من السكون هو

$$a_{SS} > R\alpha_f.$$

عندما $0 \leq \theta < \pi/2$ ، يصبح هذا الشرط

$$\tan \theta > \mu_k \left[1 + \frac{7}{2\kappa}(1 + q\mu_k) \right].$$

ويطلب الحفاظ على نقطتي التلامس أيضاً

$$q\mu_k \leq 1.$$

إذا كان $\mu_k = 0$ ، فإن الأسطوانتين تنزلان بحركة انتقالية محضة انطلاقاً من السكون:

$$a = g \sin \theta, \quad \alpha_r = \alpha_f = 0.$$

من الضروري التمييز بين بدء الانزلاق واستمراره: فالاحتكاك السكوني يحدد ما إذا كان التلامس يفقد التماسك، بينما تحدد الشروط الحركية أعلاه ما إذا كانت حالة الانزلاق المفترضة متسقة. ولا ينبغي إحلال حل يعتمد على الاحتكاك الحركي محل حل متاح دون انزلاق لمجرد أن $\mu_k < \mu_s$.

4. الحركة على المقطع ذي الاحتكاك الأقل

خلال المسافة الابتدائية d المقطوعة بتدرج محض، يكون التسارع a_0 . وعند الانطلاق من السكون،

$$v_d = \sqrt{2a_0d}, \quad \omega_{r,d} = \omega_{f,d} = \frac{v_d}{R}.$$

نهمل الفترة الانتقالية القصيرة التي تكون فيها أسطوانة واحدة فقط قد وصلت إلى السطح الجديد، باستخدام تقريب المسافات الكبيرة المذكور. ولا يحدث تغير اندفاعي في السرعة الخطية أو الزاوية.

بمجرد أن تنزلق الأسطوانتان على السطح الجديد، نستبدل μ_k بـ μ'_k في النتائج السابقة لانزلاق الأسطوانتين:

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta), \\ N'_{r,f} &= \frac{7Mg \cos \theta}{2}(1 \mp q\mu'_k), \\ \alpha'_{r,f} &= \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 \mp q\mu'_k). \end{aligned}$$

هذه الكميات ثابتة.

على امتداد المسافة المتبقية $s - d$ ،

$$v^2 = v_d^2 + 2a_1(s - d),$$

فتكون سرعة مركز كل من الأسطوانتين

$$v_r = v_f = \sqrt{\frac{14gd \sin \theta}{7 + 2\kappa} + 2g(\sin \theta - \mu'_k \cos \theta)(s - d)}.$$

يُستنتج الزمن المنقضي على هذا المقطع من السرعة المتوسطة:

$$s - d = \frac{v + v_d}{2} \Delta\tau,$$

ومن ثم

$$\Delta\tau = \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

يعطي تكامل التسارعين الزاويين الثابتين

$$\omega_r = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 - q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d},$$

$$\omega_f = \frac{v_d}{R} + \frac{7\mu'_k g \cos \theta}{2\kappa R}(1 + q\mu'_k) \frac{2(s - d)}{v + v_d}.$$

تتطلب فرضية بدء الأسطوانتين بالانزلاق وجود حالة متسقة من الانزلاق نحو أسفل المنحدر. فمباشرة بعد الدخول،

$$v - R\omega_i = (a_1 - R\alpha'_i)\Delta\tau,$$

ولذلك يكون الشرط $a_1 > R\alpha'_f$ ، إلى جانب كون ردود الفعل غير سالبة. يحدد معامل الاحتكاك السكوني المخفّض μ'_s فقدان التماسك، لكنه لا يدخل في السرعات اللاحقة بعد أن تصبح نقطتا التلامس في حالة انزلاق.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.