

IPhO 2001

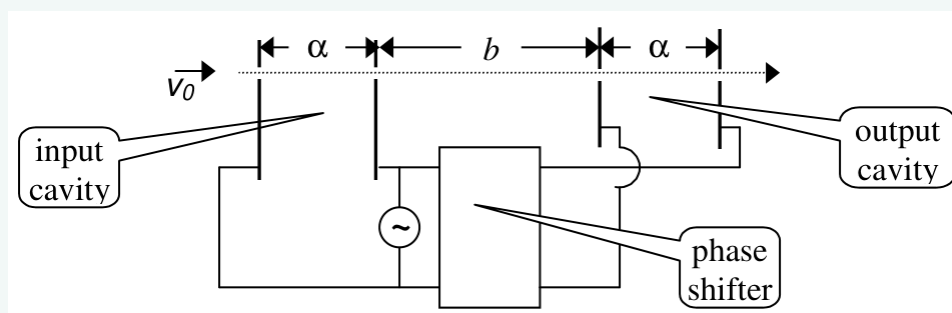
理论题与解答 · 土耳其安塔利亚 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/2001/

题目 1: 四道短题: 1a 速调管, 1b 分子间距, 1c 简易锯齿波信号发生器, 1d 原子束

1a) 速调管

速调管是一种用于放大甚高频信号的器件。速调管主要由两组相同的平行极板（谐振腔）组成，两组极板之间的距离为 b ，如图所示。



一束初速度为 v_0 的电子束穿过极板上的小孔，贯穿整个系统。将待放大的高频电压施加在两组极板上，并使两者之间具有一定的相位差（其中一个周期 T 对应于 2π 的相位），从而在谐振腔内产生水平方向的交变电场。当输入腔内的电场向右时，进入该腔的电子会减速；反之则加速，因此离开输入腔的电子会在一定距离处聚成电子群。如果将输出腔放置在聚束位置，只要适当选择其电场的相位，该腔内的电场就会从电子束中吸收功率。设电压信号为周期 $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s 的方波，在 $V = \pm 0.5$ 伏之间变化。电子的初速度为 $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s，荷质比为 $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg。距离 α 很小，以至于电子穿越谐振腔所需的时间可以忽略。计算下列各项，结果保留 4 位有效数字：

- 电子聚束处的距离 b 。将结果填写在答题纸上。[1.5 分]
- 移相器需要提供的相位差。将结果填写在答题纸上。[1.0 分]

1b) 分子间距

用 d_L 和 d_V 分别表示液态水和水蒸气中分子之间的平均距离。假设两相均处于 100°C 和大气压下，且水蒸气可视为理想气体。利用以下数据，计算比值 d_V/d_L ，并将结果填写在答题纸上。[2.5 分]

液态水的密度： $\rho_L = 1.0 \times 10^3$ kg/m³，

水的摩尔质量： $M = 1.8 \times 10^{-2}$ kg/mol

大气压： $P_a = 1.0 \times 10^5$ N/m²

气体常量： $R = 8.3$ J/mol·K

阿伏伽德罗常数： $N_A = 6.0 \times 10^{23}$ /mol

1c) 简易锯齿波信号发生器

在图 1 中的电容器 C 两端可以得到锯齿波电压 V_0 。 R 为可变电阻， V_i 为理想电池， SG 为由两个间距可调的电极构成的火花隙。当电极间电压超过击穿电压 V_f 时，电极间的空气被击穿，因而火花隙变为短路，并保持这一状态，直到火花隙两端的电压变得很小。

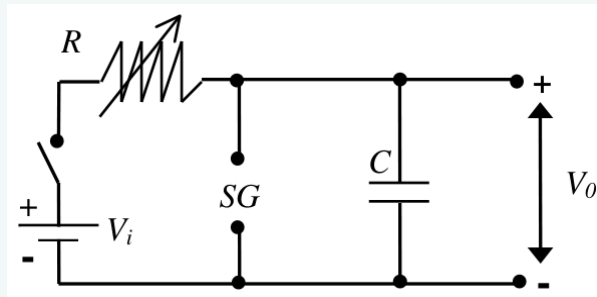


图 1

- 画出开关闭合后电压 V_0 随时间 t 变化的波形。[0.5 分]
- 要得到几乎线性变化的锯齿波电压 V_0 ，必须满足什么条件？将结果填写在答题纸上。[0.2 分]
- 在满足上述条件的情况下，推导波形周期 T 的简化表达式。将结果填写在答题纸上。[0.4 分]
- 若只改变周期，应调节什么（ R 和/或 SG ）？将结果填写在答题纸上。[0.2 分]
- 若只改变振幅，应调节什么（ R 和/或 SG ）？将结果填写在答题纸上。[0.2 分]
- 现另提供一个可调直流电源。设计并画出一个新电路，标明可获得图 2 所示电压波形 V_0' 的端子。[1.0 分]

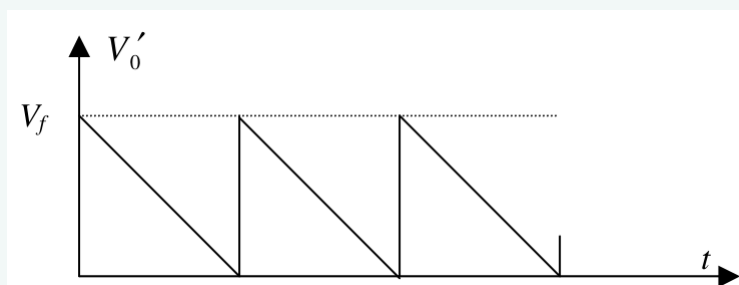
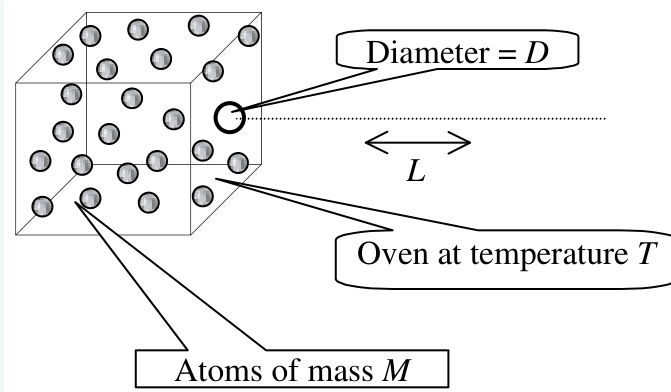


图 2

1d) 原子束

将一群原子加热到温度 T ，使其通过炉子一侧直径为 D 的小孔（原子尺度）沿水平方向射出，从而制备一束原子束。估算原子束沿其路径水平传播距离 L 后的直径。一个原子的质量为 M 。将结果填写在答题纸上。[2.5 分]



题目译自官方英文原文。

答案

- 1a(a):

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

- 1a(b): 输出电场的相位必须比输入电场滞后

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

(以 2π 为模)。等价地，也可以超前 $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$ 。输出电场使电子减速的半周期必须与电子群到达的时间重合。

- 1b:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

- 1c(a): 电压反复从约 0 按凹向下的指数曲线上升至 V_f ，随后几乎竖直下降至 0。每一段充电过程均满足

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right),$$

其中 τ 为自上一次放电以来经过的时间。

- 1c(b):

$$V_f \ll V_i.$$

- 1c(c):

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

- 1c(d): 只调节 R ，保持火花隙不变。

- 1c(e): 同时调节 SG 和 R ：改变火花隙以改变 V_f ，并调节 R ，使得在线性斜坡近似下

$$RV_f = \text{常量}$$

成立。

- **1c(f):** 将附加电源的电压设为 V_f ，并将其负极连接到原电路的下方导线。测量输出时，将输出正端接到附加电源的正极，将输出负端接到电容器的上端。于是

$$V'_0 = V_f - V_0,$$

得到从 V_f 下降至 0 的斜坡，随后突然返回 V_f 。

- **1d:** 取具有代表性的热运动速率 $v_{th} = \sqrt{3k_B T/M}$ ，由衍射得到的估算为

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

因此，当衍射展宽远大于初始直径时，

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

其中省略了一个取决于束宽定义方式的数值因子。

解答

1a) 速调管

(a) 聚束距离

用 e 表示电子电荷量的大小，并令 $U = 0.5$ V。按照题目的设定，忽略空间电荷效应以及电子穿越任一谐振腔所需的时间。

由非相对论能量守恒可得电子通过输入腔后的两种可能速率：

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

其中 v_s 和 v_f 分别为慢电子和快电子的速率。因此

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

选择输入电场，使其在 $0 \leq t < T/2$ 内使电子减速，在 $T/2 \leq t < T$ 内使电子加速。

在时刻 t_0 进入的慢电子与在 $t_0 + T/2$ 进入的快电子同时到达输出腔的条件为

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

因此，

$$b \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

从而

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

对于方波调制，这一条件使整个慢电子半周期束团与随后到来的快电子半周期束团在到达时间上重合。这是首次达到最大聚束程度的距离；电子群具有有限的持续时间，并非瞬时脉冲。

代入数值，并在最后一步之前保留更多位数，得到

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m.}$$

因此，保留四位有效数字，

$$\boxed{b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}}.$$

(b) 相位差

慢电子和快电子穿过漂移区的飞行时间分别为

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

慢电子束团到达输出腔的时间区间为

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

而随后的快电子束团到达输出腔的时间区间为

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

由于 $\tau_s - \tau_f = T/2$ ，这两个区间重合。

为了从电子束中提取能量，输出电场必须在电子群占据的整个半周期内指向右方，从而使电子减速。因此，输出电场的波形必须与延迟 τ_s 后的输入波形相同：

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

只有 τ_s/T 的小数部分起作用：

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

因此，输出电场所需的相位滞后为

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad.}$$

所以

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ}.$$

若将相位写成自变量中的加性项，即 $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$ ，则同一设置可表示为

$$\boxed{\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}}.$$

1b) 分子间距

对于分子数密度 n ，可通过给每个分子分配体积 d^3 来估算特征分子间距：

$$d \sim n^{-1/3}.$$

液体的分子数密度为

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

所以

$$d_L = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

对于理想水蒸气，

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

因此

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

取比值后，阿伏伽德罗常数消去：

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L RT}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

取 $T \simeq 373 \text{ K}$,

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[\frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

因此，按照所给数据的精度，

$$\boxed{\frac{d_V}{d_L} \simeq 12}.$$

相应的特征间距约为

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

1c) 简易锯齿波信号发生器

假设电容器初始时不带电，火花放电后的残余电压可以忽略，且放电时间远短于充电时间。

(a) 电压波形

当火花隙不导通时，由基尔霍夫电压定律可得

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

因此，

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

从 $V_0 = 0$ 开始充电，其解为

$$\boxed{V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right)}.$$

当 V_0 达到 V_f 时，火花隙导通，电容器迅速放电。随后火花隙恢复不导通状态，充电过程重新开始。

因此，所要求的示意图具有以下特征：

- 起点为 $(t, V_0) = (0, 0)$ 。
- 一段上升且凹向下的指数曲线，终点电压为 V_f 。
- 从 V_f 几乎竖直下降至 0。
- 以固定的时间间隔重复相同的过程。

如果没有发生击穿而继续充电，每一段充电曲线都会趋近渐近线 V_i 。持续振荡要求 $V_i > V_f$ ；否则电容器无法在有限时间内达到击穿阈值。

(b) 斜坡近似线性的条件

充电曲线的斜率为

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

要使它在整个 $0 \leq V_0 \leq V_f$ 范围内几乎保持不变, 需要满足

$$\boxed{V_f \ll V_i}.$$

此时

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC} \tau.$$

(c) 周期

忽略放电持续时间, 充电至阈值所需的精确时间可由下式求得:

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right).$$

因此,

$$T = RC \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

对于 $V_f/V_i \ll 1$, 利用 $-\ln(1-x) \simeq x$:

$$\boxed{T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}}.$$

等价地, 几乎恒定的充电电流 V_i/R 必须输送电荷量 CV_f , 由此可得到相同结果。

(d) 只改变周期

峰值电压由火花隙的击穿阈值 V_f 决定, 而充电时间与 R 成正比。

因此, 只调节 R , 保持 SG 不变。增大 R 会增大周期, 而不会改变峰峰值。

(e) 只改变振幅

峰峰值约为 V_f 。改变 SG 的电极间距即可改变这一阈值。

由于

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

保持周期不变要求

$$\boxed{R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}}.$$

因此, 必须同时调节 SG 和 R 。例如, 增大击穿电压时, 必须相应减小电阻以作补偿。

不采用线性近似时, 相应的精确条件为

$$R \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{常量}.$$

(f) 产生下降锯齿波的电路

将原电路的下方导线定义为节点 G , 电容器的上端定义为节点 A 。则

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

按以下方式连接：

1. 保留原振荡电路。
2. 将附加直流电源的负极连接到 G 。
3. 将该电源的电压调至 V_f ，并将其正极记为 B 。
4. 在 B 和 A 之间取新的输出， B 为正端， A 为负端。

采用高输入阻抗测量输出时，

$$V'_0 = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

在每个近似线性的充电区间内，

$$V'_0 \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

因此，输出从 V_f 开始，几乎线性地下降至 0，并在火花使电容器放电时跃变回 V_f 。这与图 2 所示的截距、斜率和跃变完全一致。

1d) 原子束

原子尺度的小孔会产生量子衍射。设 h 为普朗克常量， k_B 为玻尔兹曼常量。

由能量均分定理可得一个具有代表性的热运动速率：

$$\frac{1}{2} M v_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

从而

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = M v_{\text{th}} = \sqrt{3M k_B T}.$$

这里采用热运动的方均根速率作为代表速率；进行估算不要求出射出原子速度的完整分布。

相应的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3M k_B T}}.$$

对于宽度为 D 的孔，特征衍射半角满足

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

这是因为偏转角 θ 会在孔的两侧之间产生量级为 $D\theta$ 的程差；当这一程差与 λ 相当时，就会出现显著的衍射。

在小角度情况下，传播距离 L 后，原子束半径约增加 $L\theta$ 。因此，直径的一个简单估算为

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

或

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3M k_B T}}.$$

当展宽较小时，初始孔径不可忽略。当衍射占主导时，

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_BT}}$$

其中省略了量级为一的数值因子。

若采用更具体的定义，理想圆孔的第一个衍射极小值出现在 $\theta \simeq 1.22\lambda/D$ 处。因此，其远场中央亮斑的直径为

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_BT}}.$$

小角度估算要求 $\lambda/D \ll 1$ 。如果这一比值不小，射出的波就会大幅发散。

解答已与官方解答核对。

题目 2：双星系统

a) 众所周知，大多数恒星组成双星系统。一类双星系统由一颗质量为 m_0 、半径为 R 的普通恒星和一颗质量为 M 、质量更大且结构致密的中子星组成，两者相互绕转。在以下所有讨论中，均忽略地球的运动。对这样一个双星系统的观测给出了以下信息：

- 普通恒星的最大角位移为 $\Delta\theta$ ，中子星的最大角位移为 $\Delta\phi$ （见图 1）。
- 完成这些最大位移所需的时间为 τ 。
- 普通恒星的辐射特征表明，其表面温度为 T ，单位时间内入射到地球表面单位面积上的辐射能量为 P 。
- 该辐射中的钙谱线波长与其正常波长 λ_0 相差 $\Delta\lambda$ ，这一差异仅由普通恒星的引力场引起。（在此计算中，可以认为光子的有效质量为 $h/c\lambda$ 。）

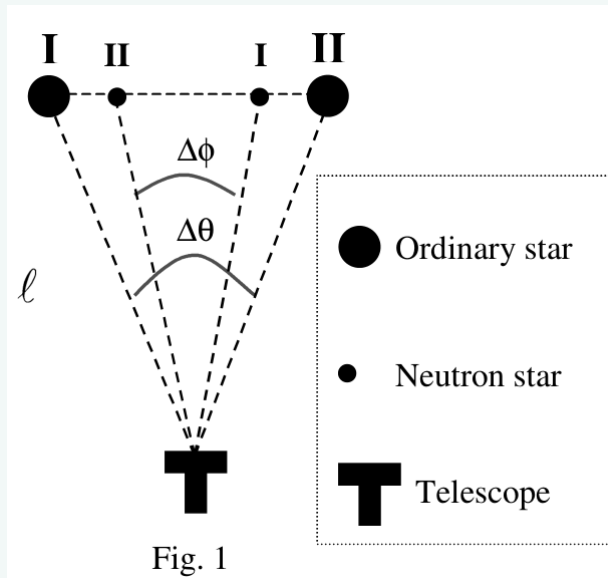


图 1

求地球到该系统的距离 ℓ 的表达式，仅用观测量和普通常数表示。将结果抄写在答题纸上。[7 分]

b) 假设 $M \gg m_0$ ，因此普通恒星基本上沿半径为 r_0 的圆轨道绕中子星运动。假设普通恒星开始朝中子星喷出气体，气体相对于普通恒星的速率为 v_0 （见图 2）。假设在本题中中子星的引力占主导地位，并忽略普通恒星轨道的变化，求图 2 所示的最短距离 r_f 。将结果抄写在答题纸上。[3 分]

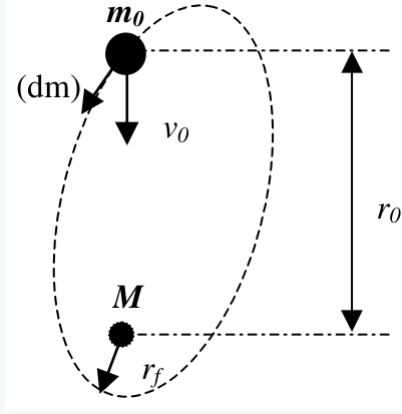


图 2

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 角位移以弧度表示时,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

其中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数。对轨道的具体解释见下文。

- b)

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

解答

a)

我们采用牛顿轨道动力学、小角度近似、普通恒星的黑体辐射以及弱场引力红移。与该系统到地球的距离相比，系统本身的尺度可以忽略。

将图 1 理解为圆形双星轨道，观测到的角位移范围跨越两端的极限位置。因此， τ 为轨道周期的一半：

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

设 a_0 和 a_N 分别为普通恒星和中子星绕共同质心运动的轨道半径。由于角位移范围对应整个轨道直径，

$$a_0 = \frac{\ell\Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell\Delta\phi}{2}.$$

因此，两星之间的距离为

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

由质心关系可得

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

相对运动轨道的开普勒第三定律为

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

联立这些方程，得

$$Gm_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

接下来，普通恒星的光度为

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

假设辐射是各向同性的，且恒星与地球之间的吸收可以忽略，则

$$P = \frac{L}{4\pi\ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

所以

$$R = \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

最后，考虑光子因引力而损失的能量。光子发射时的能量和近似有效质量为

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

光子从恒星表面传播到地球时，相对于 R 而言，地球可视为位于无穷远处，光子损失的能量为

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

因此，

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

当 $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ 时，

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

因此，由正的引力红移可确定

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

令式 (1) 与式 (3) 相等，并约去一个因子 ℓ ，得

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

取正平方根，得

$$\ell = \frac{2\sqrt{2} c \tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}.$$

引力常数被约去，是因为轨道动力学和红移测量的都是 Gm_0 。除 $c\tau$ 外，所有因子均为无量纲量。

b)

由于 $M \gg m_0$ ，可将中子星视为静止。普通恒星的圆轨道速率由下式得到：

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

气体微元继承了这一切向速率，并额外获得了大小为 v_0 、沿径向向内的速度。因此，其初始速度分量为

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

忽略普通恒星的引力，气体在中子星的中心引力场中运动。其单位质量的角动量 j 和单位质量的机械能 ε 守恒：

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

在最近点处，径向速度为零。若该处的切向速率为 v_f ，则由角动量守恒得

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

再由能量守恒得

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

整理得

$$v_0^2 = v_c^2 \left(\frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

气体最初向内运动，因此其最近距离满足 $r_f \leq r_0$ 。所以取

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

由此得到

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

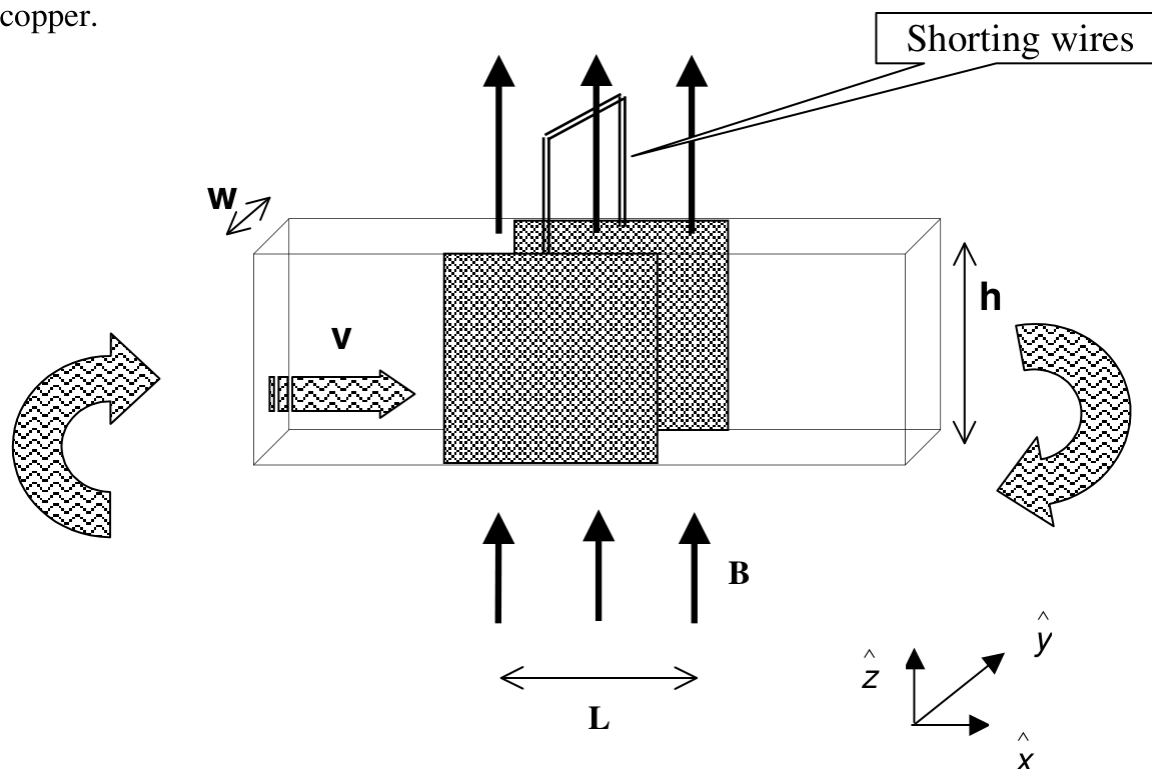
当 $v_0 = 0$ 时，该结果正确地给出原来的圆轨道，即 $r_f = r_0$ 。当 $v_0 < v_c$ 时，气体轨迹为图中所示的椭圆；当 $v_0 = v_c$ 时为抛物线；当 $v_0 > v_c$ 时为双曲线；最近距离的公式在这三种情况下均成立。

解答已与官方解答核对。

题目 3：磁流体动力（MHD）发电机

一根水平放置、首尾相接的矩形塑料管，其宽度为 w ，高度为 h ，管内充满电阻率为 ρ 的汞。涡轮机产生压强增量 P ，驱动该流体以恒定速率 v_0 流动。管道中一段长度为 L 的管段，其两个相对的竖直管壁由铜制成。

copper.



实际流体的运动十分复杂。为简化问题，作如下假设：

- 尽管流体具有黏性，但其速率在整个横截面上均匀一致。
- 流体的速率始终与作用在流体上的合外力成正比。
- 流体不可压缩。

这两个管壁通过外部导线短接，并且仅在这一管段内施加竖直向上的匀强磁场 $\mathbf{B}$ 。装置如上图所示，图中的单位矢量 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 将用于解答。

- 求磁场对流体施加的力（用 L 、 B 、 h 、 w 、 ρ 和速度 v 表示）。[2.0 分]
- 推导施加磁场后流体的新速率 v 的表达式（用 v_0 、 P 、 L 、 B 和 ρ 表示）。[3.0 分]
- 推导为使速率增大至原来的值 v_0 ，涡轮机必须额外提供的功率的表达式。将结果抄写到答题纸上。[2.0 分]
- 现在撤去磁场，并将汞换成以速率 v_0 流动的水。沿流动方向向长度为 L 的管段发射一束单一频率的电磁波。水的折射率为 n ，且 $v_0 \ll c$ 。推导流体运动对进入和离开管段 L 的波之间的相位差所作贡献的表达式。将结果抄写到答题纸上。[3.0 分]

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 磁力方向与流动方向相反：

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho}v\hat{x}.$$

• b)

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

• c) 当速率恢复为 v_0 时, 由于磁场的存在, 相对于原来无磁场时的功率, 所需的额外功率为

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

若以 (b) 中减速后的运行状态为基准, 则涡轮机功率的总增量为

$$\Delta \mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 + P w h (v_0 - v).$$

• d) 设 $\omega = 2\pi f$ 为实验室参考系中的角频率, 并将通过该管段的相位滞后定义为 $\Phi = kL$ 。保留至 v_0/c 的一阶项,

$$\delta\Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega L v_0}{c^2} (n^2 - 1) = -\frac{2\pi f L v_0}{c^2} (n^2 - 1).$$

因此, 流动使相位滞后减小。出射波相应的相位超前量具有相同的大小, 符号为正。

解答

a) 流体受到的磁力

流体速度和外加磁场分别为

$$\mathbf{v} = v\hat{x}, \quad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

因此,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\hat{y}.$$

运动电荷载流子所受的磁力因而在两个铜壁之间驱动电流沿 $-\hat{y}$ 方向通过汞, 这里的电流方向取正电荷运动的方向。

两个管壁的间距为 w , 因此动生电动势的大小为

$$\mathcal{E} = vBw.$$

电流在汞中流经的距离为 w , 导电横截面积为 Lh 。因此, 其电阻为

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

忽略铜壁和短接导线的电阻, 电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

汞中这一电流所受的力为

$$\mathbf{F}_B = I(-w\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -IwB\hat{x}.$$

于是

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2 h w}{\rho} v \hat{x}.$$

其方向与流体速度方向相反，符合磁制动的预期。

b) 施加磁场后的速率

设管道的横截面积为

$$A = wh.$$

涡轮机产生的压强增量提供驱动力

$$F_P = PA.$$

对于定常运动，所假设的速率与外加驱动力成正比的关系，等价于存在一个线性黏性阻力 κv 。施加磁场之前，

$$PA = \kappa v_0,$$

所以

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

施加磁场后，保持相同的压强增量 P ，定常状态下的力平衡方程为

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2 A}{\rho} v = 0.$$

代入 κ 的表达式，得到

$$PA = \left(\frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2 A}{\rho} \right) v.$$

约去 A 并求解，得

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

当 $B \rightarrow 0$ 时，该结果趋于 v_0 ，且磁场始终使速率减小。

c) 涡轮机的额外功率

当速率恢复为 v_0 时，黏性阻力恢复到原来的值，

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

涡轮机还必须克服磁力

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0.$$

因此，所需的压强增量为

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

对于不可压缩流动，由压强增量提供的机械功率等于压强增量乘以体积流量：

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} Av.$$

因此，速率恢复后的总功率为

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left(P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) Av_0 = PA v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

原来无磁场时的功率为 $\mathcal{P}_0 = PA v_0$ 。因此，在相同速率下，因磁制动而需要的额外功率为

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

这等于汞中的焦耳热功率：

$$I^2 R = \left(\frac{v_0 B L h}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{L h} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2,$$

这验证了能量平衡。

如果“额外功率”是相对于 (b) 中减速后的状态而言，结果则有所不同。在该状态下，涡轮机仅提供

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = PA v.$$

相对于该运行状态，功率增量为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 + P w h (v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}} \right). \end{aligned}$$

第二项对应于速率增大时，黏性耗散恢复至原来水平所需的功率。

d) 水的运动对相位差的贡献

将给定的折射率 n 视为常数，忽略色散。在水的静止参考系中，波的相速度为

$$u' = \frac{c}{n}.$$

水以速率 v_0 沿波的传播方向运动。由相对论速度叠加公式可得实验室参考系中的相速度

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u' v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

展开并保留至 v_0/c 的一阶项，

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

系数 $1 - 1/n^2$ 称为菲涅耳拖曳系数。

对于实验室参考系中写成如下形式的单色波

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

从入口到出口的相位滞后为

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

波源确定了实验室参考系中的频率 ω 。

将相速度的倒数展开，

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

因此

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

对于静止的水，

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

相减，得到

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

等价地，用实验室参考系中的真空波长 $\lambda_0 = c/f$ 表示，

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi L v_0}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

负号表示沿流动方向传播时，相位滞后减小。如果将相位差定义为出口相位减去入口相位，则其变化量的符号相反。

解答已与官方解答核对。