

IPhO 2001

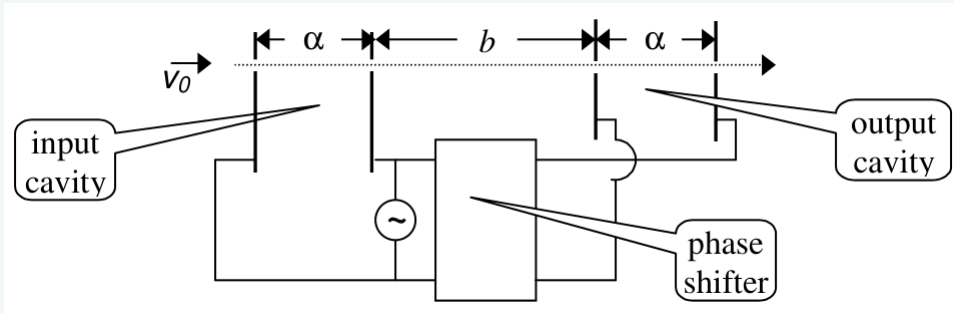
Teorik sorular ve çözümler · Antalya, Türkiye · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2001/

Soru 1: Dört kısa problem: 1a Klistron, 1b Moleküller arası uzaklık, 1c Basit testere dişi sinyal üretici, 1d Atom demeti

1a) KLİSTRON

Klistronlar, çok yüksek frekanslı sinyalleri yükseltmek için kullanılan aygıtlardır. Bir klistron temel olarak, şekilde gösterildiği gibi aralarında b uzaklığı bulunan, birbirinin aynı iki paralel levha çiftinden (kavite) oluşur.



Başlangıç sürati v_0 olan bir elektron demeti, levhalardaki küçük deliklerden geçerek tüm sistemi kat eder. Yükseltilecek yüksek frekanslı gerilim, iki levha çiftine aralarında belirli bir faz farkı olacak şekilde uygulanır (burada T periyodu 2π faza karşılık gelir); böylece kaviteelerde yatay, yönü dönüşümlü olarak değişen elektrik alanlar oluşur. Elektrik alan sağa doğruyken giriş kavitesine giren elektronlar yavaşlatılır, alan ters yöndeyken ise hızlandırılır; böylece çıkan elektronlar belirli bir uzaklıkta demetçikler oluşturur. Çıkış kavitesi demetçiklerin oluştuğu noktaya yerleştirilirse, bu kavitedeki elektrik alan, fazı uygun seçilmek koşuluyla demetten güç soğurur. Gerilim sinyalinin, $V = \pm 0.5$ volt değerleri arasında değişen, $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s periyotlu bir kare dalga olduğunu kabul edin. Elektronların başlangıç hızı $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s, yüklerinin kütlelerine oranı ise $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg değerindedir. α uzaklığı, kavitelerdeki geçiş süresi ihmal edilebilecek kadar küçüktür. 4 anlamlı basamak kullanarak aşağıdakileri hesaplayın:

- Elektronların demetçikler oluşturduğu b uzaklığı. Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [1.5 puan]
- Faz kaydırıcının sağlaması gereken faz farkı. Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [1.0 puan]

1b) MOLEKÜLLER ARASI UZAKLIK

d_L ve d_V , sırasıyla sıvı fazdaki ve buhar fazındaki su molekülleri arasındaki ortalama uzaklıkları gösterebilir. Her iki fazın da 100°C sıcaklıkta ve atmosfer basıncında olduğunu, buharın ise ideal gaz gibi davrandığını varsayın. Aşağıdaki verileri kullanarak d_V/d_L oranını hesaplayın ve sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [2.5 puan]

Sıvı fazdaki suyun yoğunluğu: $\rho_L = 1.0 \times 10^3$ kg/m³,

Suyun molar kütlesi: $M = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$

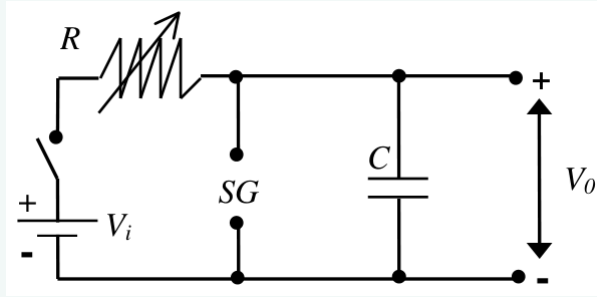
Atmosfer basıncı: $P_a = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Gaz sabiti: $R = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

Avogadro sayısı: $N_A = 6.0 \times 10^{23} / \text{mol}$

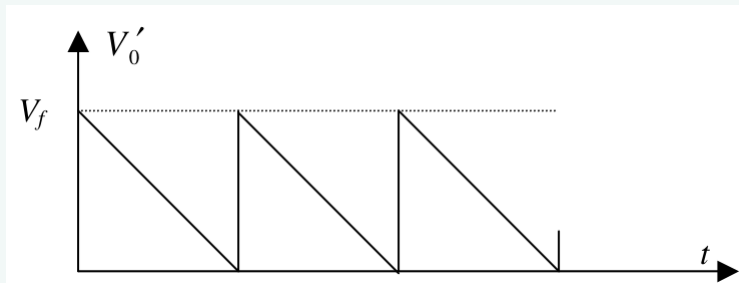
1c) BASİT TESTERE DİŞİ SİNYAL ÜRETECİ

Şekil 1'deki C kondansatörünün uçları arasında testere dişi biçiminde bir V_0 gerilimi elde edilebilir. R değişken bir direnç, V_i ideal bir pil, SG ise aralarındaki uzaklık ayarlanabilen iki elektrottan oluşan bir kıvılcım aralığıdır. Elektrotlar arasındaki gerilim ateşleme gerilimi V_f 'yi aştığında, elektrotlar arasındaki hava elektriksel olarak delinir; böylece aralık kısa devre hâline gelir ve uçları arasındaki gerilim çok küçük bir değere inene kadar bu durumda kalır.



Şekil 1

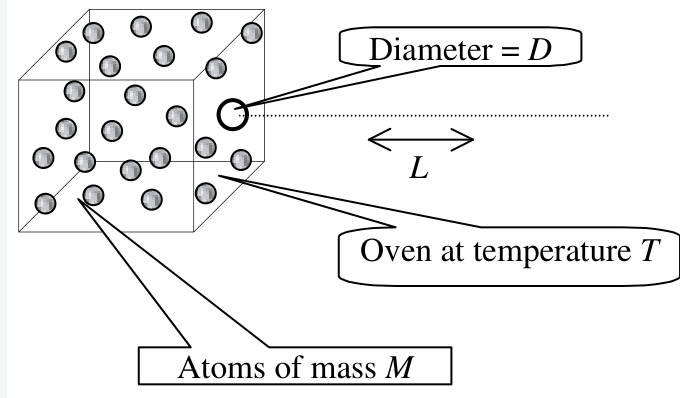
- Anahtar kapatıldıktan sonra V_0 geriliminin t zamanına göre dalga biçimini çizin. [0.5 puan]
- Yaklaşık olarak doğrusal değişen testere dişi biçiminde bir V_0 gerilimi elde etmek için hangi koşul sağlanmalıdır? Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [0.2 puan]
- Bu koşulun sağlandığını kabul ederek dalga biçiminin T periyodu için basitleştirilmiş bir ifade türetin. Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [0.4 puan]
- Yalnızca periyodu değiştirmek için neyi (R ve/veya SG) değiştirmelisiniz? Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [0.2 puan]
- Yalnızca genliği değiştirmek için neyi (R ve/veya SG) değiştirmelisiniz? Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [0.2 puan]
- Size ek bir ayarlanabilir doğru gerilim kaynağı veriliyor. Şekil 2'de gösterilen V_0' gerilim dalga biçimini elde edeceğiniz uçları belirterek yeni bir devre tasarlayın ve çizin. [1.0 puan]



Şekil 2

1d) ATOM DEMETİ

Bir atom topluluğu T sıcaklığına kadar ısıtılıp atomların fırının bir yanındaki D çaplı küçük (atomik boyutlarda) bir delikten yatay olarak çıkmaları sağlanarak bir atom demeti hazırlanır. Demetin, yolu boyunca yatay doğrultuda L uzaklığını kat ettikten sonraki çapını tahmin edin. Bir atomun kütlesi M 'dir. Sonucunuzu **cevap formuna** yazın. [2.5 puan]



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- 1a(a):

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

- 1a(b): Çıkış alanının giriş alanına göre **faz gecikmesi**

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

değerinde, 2π modunda olmalıdır. Eşdeğer olarak, $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$ önde olabilir. Çıkışın yavaşlatıcı yarım çevrimi, gelen demetçikle çakışmalıdır.

- 1b:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

- 1c(a): Yaklaşık 0'dan V_f 'ye kadar tekrarlanan, aşağı doğru içbükey üstel yükselişler ve bunları izleyen, 0'a kadar neredeyse düşey inişler. Her yüklenme parçası

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right),$$

biçimindedir; burada τ , son boşalmadan bu yana geçen süredir.

- 1c(b):

$$V_f \ll V_i.$$

- 1c(c):

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

- **1c(d):** Kivılcım aralığını sabit tutarak **yalnızca** R 'yi değiştirin.
- **1c(e): Hem SG 'yi hem de R 'yi** değiştirin: V_f 'yi değiştirmek için aralığı değiştirin ve doğrusal rampa yaklaşımında

$$RV_f = \text{sabit}$$

olacak şekilde R 'yi ayarlayın.

- **1c(f):** Ek kaynağın negatif ucunu özgün devrenin alt iletken hattına bağlayıp gerilimini V_f 'ye ayarlayın. Çıkışı, pozitif ucu ek kaynağın pozitif ucunda ve negatif ucu kondansatörün üst ucunda olacak şekilde ölçün. Bu durumda

$$V'_0 = V_f - V_0,$$

olur; böylece V_f 'den 0'a inen bir rampa ve ardından V_f 'ye ani bir dönüş elde edilir.

- **1d:** Temsilî bir ısı sürat olarak $v_{th} = \sqrt{3k_B T/M}$ kullanıldığında, kırınımaya dayalı tahmin

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

olur. Dolayısıyla, kırınımın etkisi başlangıç çapına baskın olduğunda,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

elde edilir; burada demet genişliği için benimsenen tanıma bağlı sayısal bir çarpan göz ardı edilmiştir.

Çözüm

1a) Klistron

(a) Demetçik oluşma uzaklığı

e , elektron yükünün büyüklüğünü gösterebilir ve $U = 0.5 \text{ V}$ olsun. Soruda amaçlandığı üzere, uzay yükü etkilerini ve her iki kavitedeki geçiş süresini ihmal edin.

Görelî olmayan enerji korunumu, giriş kavitesinden sonraki iki olası sürati verir:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

burada v_s ve v_f , yavaş ve hızlı elektronların süratleridir. Dolayısıyla

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Giriş alanını, $0 \leq t < T/2$ aralığında elektronları yavaşlatacak, $T/2 \leq t < T$ aralığında ise hızlandıracak şekilde seçin.

t_0 anında giren yavaş bir elektron ile $t_0 + T/2$ anında giren hızlı bir elektron, şu koşul sağlandığında çıkışa birlikte ulaşır:

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

Bu nedenle,

$$b \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

buradan da

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

Kare dalga modülasyonunda bu koşul, yavaş yarım çevrim paketinin tamamının varış zamanlarının, onu izleyen hızlı yarım çevrim paketinin varış zamanlarıyla örtüşmesini sağlar. Bu, demetçik oluşumunun en yüksek düzeye ulaştığı ilk uzaklıktır; demetçik anlık bir darbe değil, sonlu süreli bir pakettir.

Son adıma kadar ek basamaklar korunarak değerler yerine konulduğunda

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m.}$$

elde edilir. Böylece, dört anlamlı basamakla,

$$b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

(b) Faz farkı

Yavaş ve hızlı elektronların sürüklenme bölgesini geçiş süreleri

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

şeklinde. Yavaş paket çıkışa

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

aralığında ulaşırken, onu izleyen hızlı paket

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

aralığında ulaşır. $\tau_s - \tau_f = T/2$ olduğundan bu aralıklar çakışır.

Demetten enerji çekebilmek için, çıkış elektrik alanı elektronların bulunduğu bu yarım çevrim boyunca sağa yönelmiş olmalı ve böylece elektronları yavaşlatmalıdır. Dolayısıyla çıkış alanının dalga biçimi, giriş dalga biçiminin τ_s kadar geciktirilmiş hâli olmalıdır:

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

Yalnızca τ_s/T 'nin kesirli kısmı önemlidir:

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

Bu nedenle gerekli çıkış faz gecikmesi

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad.}$$

olur. Böylece

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ.$$

Faz bunun yerine $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$ biçiminde, argümana eklenen bir terim olarak yazılırsa, aynı ayar

$$\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}.$$

şeklindedir.

1b) Moleküller arası uzaklık

Moleküllerin sayı yoğunluğu n olduğunda, her moleküle d^3 hacmi ayrılarak moleküller arası karakteristik uzaklık tahmin edilir:

$$d \sim n^{-1/3}.$$

Sıvının sayı yoğunluğu

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

olduğundan

$$d_L = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

İdeal buhar için,

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

ve dolayısıyla

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

Oran alındığında Avogadro sayısı sadeleşir:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L RT}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

$T \simeq 373 \text{ K}$ kullanılarak,

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[\frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

Böylece, verilen verilerin hassasiyetiyle tutarlı olarak,

$$\frac{d_V}{d_L} \simeq 12.$$

Buna karşılık gelen karakteristik uzaklıklar yaklaşık olarak

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

değerindedir.

1c) Basit testere dişi sinyal üretici

Kondansatörün başlangıçta yüksüz olduğunu, kıvılcımdan sonra kalan gerilimin ihmal edilebilir olduğunu ve boşalmanın yüklenmeden çok daha kısa sürdüğünü varsayın.

(a) Gerilim dalga biçimi

Kıvılcım aralığı iletken değilken Kirchhoff'un gerilim yasası

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

bağıntılarını verir. Dolayısıyla,

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

$V_0 = 0$ 'dan başlayan yüklenme çözümü

$$V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right).$$

şeklinde. V_0 , V_f 'ye ulaştığında kıvılcım aralığı iletken hâle gelir ve kondansatörü hızla boşaltır. Ardından aralık yeniden yalıtkan hâle gelir ve yüklenme tekrar başlar.

Dolayısıyla istenen çizim şu özelliklere sahiptir:

- $(t, V_0) = (0, 0)$ noktasında bir başlangıç.
- V_f 'de sonlanan, yükselen ve aşağı doğru içbükey bir üstel parça.
- V_f 'den 0'a neredeyse düşey bir iniş.
- Düzenli aralıklarla aynı biçimin tekrarlanması.

Ateşleme olmadan devam etseydi, her yüklenme parçası V_i asimptotuna yaklaşırdı. Sürekli salınım için $V_i > V_f$ gerekir; aksi hâlde kondansatör sonlu bir sürede ateşleme eşiğine ulaşamaz.

(b) Yaklaşık doğrusal bir rampa için koşul

Yüklenme sırasındaki eğim

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

şeklinde. Bu eğimin $0 \leq V_0 \leq V_f$ aralığının tamamında yaklaşık sabit kalması için

$$V_f \ll V_i.$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC} \tau.$$

(c) Periyot

Boşalma süresi ihmal edildiğinde, eşiğe kadar yüklenmenin tam süresi

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)} \right).$$

bağıntısından bulunur. Böylece,

$$T = RC \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

$V_f/V_i \ll 1$ için $-\ln(1 - x) \simeq x$ yaklaşımı kullanılır:

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

Eşdeğer olarak, yaklaşık sabit olan V_i/R yüklenme akımı CV_f yükünü sağlamalıdır; bu da aynı sonucu verir.

(d) Yalnızca periyodun değiştirilmesi

Tepe gerilimi kıvılcım aralığının V_f eşiğiyle belirlenirken, yüklenme süresi R ile orantılıdır.

Bu nedenle, SG 'yi sabit tutarak **yalnızca R 'yi** değiştirin. R 'yi artırmak, tepeden tepeye genliği değiştirmeden periyodu artırır.

(e) Yalnızca genliğin değiştirilmesi

Tepeden tepeye genlik yaklaşık olarak V_f 'dir. Bu eşiği değiştirmek için SG 'nin elektrotları arasındaki uzaklığı değiştirin.

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

olduğundan, periyodu sabit tutmak için

$$R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}.$$

koşulu gerekir. Dolayısıyla **hem SG hem de R ayarlanmalıdır**. Örneğin, ateşleme geriliminin artırılması, bunu dengelemek üzere direncin azaltılmasını gerektirir.

Doğrusal yaklaşım kullanılmadığında, buna karşılık gelen tam koşul

$$R \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{sabit}.$$

şeklindedir.

(f) Azalan testere dişi için devre

Özgün devrenin alt iletken hattını G düğümü, kondansatörün üst ucunu ise A düğümü olarak tanımlayın. Bu durumda

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

Aşağıdaki bağlantıları yapın:

1. Özgün osilatör devresini koruyun.
2. Ek doğru gerilim kaynağının negatif ucunu G 'ye bağlayın.
3. Bu kaynağı V_f 'ye ayarlayın ve pozitif ucunu B olarak adlandırın.
4. Yeni çıkışı B ile A arasından, **pozitif uç B 'de** ve **negatif uç A 'da** olacak şekilde alın.

Yüksek empedanslı bir çıkış ölçümü için,

$$V_0' = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

Yaklaşık doğrusal olan her yüklenme aralığında,

$$V_0' \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T} \right).$$

Dolayısıyla çıkış V_f 'den başlar, yaklaşık doğrusal olarak 0'a iner ve kıvılcım kondansatörü boşalttığında yeniden V_f 'ye sıçrar. Bunlar, Şekil 2'de gösterilen eksen kesişimleri, eğimler ve sıçramalarla tam olarak aynıdır.

1d) Atom demeti

Atomik ölçekteki açıklık kuantum kırınımına yol açar. h Planck sabiti, k_B ise Boltzmann sabiti olsun.

Temsilî bir ısı sürat, enerjinin eşit paylaşımı ilkesinden bulunur:

$$\frac{1}{2}Mv_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2}k_B T,$$

buradan

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = Mv_{\text{th}} = \sqrt{3Mk_B T}.$$

elde edilir. Burada temsilî sürat olarak karekök ortalama kare ısı sürat kullanılır; bir tahmin yapmak için çıkan atomların hız dağılımının tamamını belirlemek gerekmez.

Buna karşılık gelen de Broglie dalga boyu

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3Mk_B T}}.$$

şeklindedir. Genişliği D olan bir açıklık için karakteristik kırınım yarı açısı

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

bağıntısını sağlar. Bunun nedeni, θ açısal sapmasının açıklık boyunca $D\theta$ mertebesinde bir yol farkı oluşturmasıdır; bu fark λ ile karşılaştırılabilir olduğunda belirgin kırınım meydana gelir.

Küçük açılar için, L uzaklığı boyunca ilerleme demetin yarıçapını yaklaşık $L\theta$ kadar artırır. Dolayısıyla basit bir çap tahmini

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

veya

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

şeklindedir. Yayılma küçük olduğunda başlangıçtaki açıklık çapı önem taşır. Kırınım baskın olduğunda,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}}$$

elde edilir; burada bir mertebesindeki sayısal çarpanlar göz ardı edilmiştir.

Daha belirli bir tanım kullanılırsa, ideal bir dairesel açıklığın ilk kırınım minimumu $\theta \simeq 1.22\lambda/D$ açısında oluşur. Bu nedenle uzak alandaki merkezî diskin çapı

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

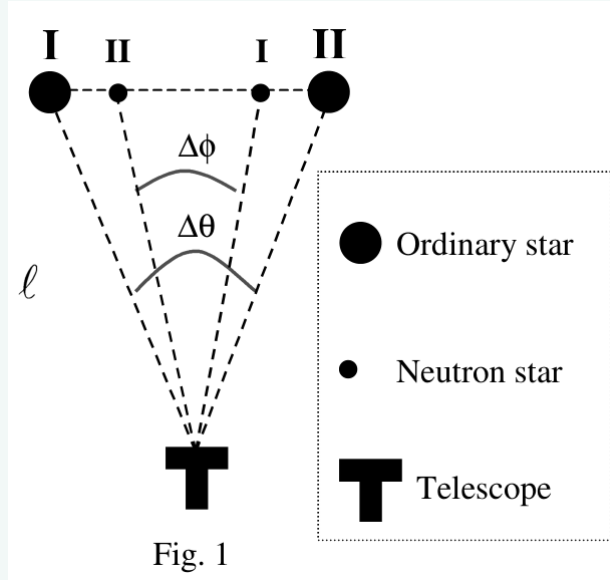
olur. Küçük açı tahminleri $\lambda/D \ll 1$ koşulunu gerektirir. Bu oran küçük değilse, çıkan dalga geniş bir açıyla ıraksar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Çift Yıldız Sistemi

a) Yıldızların çoğunun çift yıldız sistemleri oluşturduğu iyi bilinmektedir. Bir çift yıldız sistemi türü, birbirlerinin çevresinde dolanan, kütlesi m_0 ve yarıçapı R olan normal bir yıldız ile kütlesi M olan, daha büyük kütleli, kompakt bir nötron yıldızından oluşur. Aşağıdaki tüm işlemlerde Dünya'nın hareketini ihmal ediniz. Böyle bir çift yıldız sisteminin gözlemlerinden şu bilgiler elde edilmektedir:

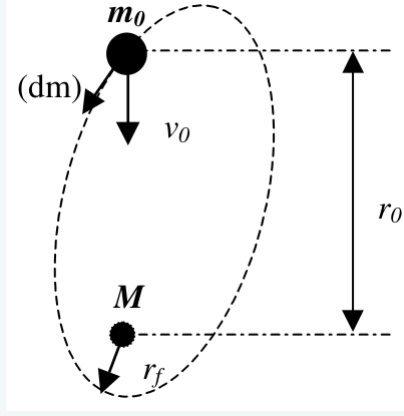
- Normal yıldızın maksimum açısal yer değiştirmesi $\Delta\theta$, nötron yıldızıninki ise $\Delta\phi$ 'dir (bkz. Şekil 1).
- Bu maksimum yer değiştirmeler için geçen süre τ 'dur.
- Normal yıldızın ışınım özellikleri, yüzey sıcaklığının T olduğunu ve Dünya yüzeyindeki birim alana birim zamanda ulaşan ışınım enerjisinin P olduğunu göstermektedir.
- Bu ışınımdaki kalsiyum çizgisinin dalga boyu, yalnızca normal yıldızın kütleçekim alanı nedeniyle, normal dalga boyu λ_0 'dan $\Delta\lambda$ kadar farklıdır. (Bu hesaplamada fotonun $h/c\lambda$ etkin kütlesine sahip olduğu düşünülebilir.)



Şekil 1

Dünya'dan bu sisteme olan ℓ uzaklığı için yalnızca gözlenen nicelikler ve evrensel sabitler cinsinden bir ifade bulunuz. Sonucunuzu **cevap formuna** yazınız. [7 puan]

b) $M \gg m_0$ olduğunu, dolayısıyla normal yıldızın esas olarak nötron yıldızının çevresinde r_0 yarıçaplı çembersel bir yörüngede dolandığını varsayınız. Normal yıldızın, nötron yıldızına doğru, normal yıldıza göre v_0 süratiyle gaz salmaya başladığını varsayınız (bkz. Şekil 2). Bu problemde baskın kütleçekim kuvvetinin nötron yıldızından kaynaklandığını varsayarak ve normal yıldızın yörüngesindeki değişimleri ihmal ederek Şekil 2'de gösterilen en yakın yaklaşma uzaklığı r_f 'yi bulunuz. Sonucunuzu **cevap formuna** yazınız. [3 puan]



Şekil 2

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Açısal yer değiştirmeler radyan cinsinden olmak üzere,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

burada σ , Stefan–Boltzmann sabitidir. Yörüngeye ilişkin yorum aşağıda belirtilmiştir.

- b)

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}$$

Çözüm

a)

Newton mekaniğine dayalı yörünge dinamiğini, küçük açı yaklaşımını, normal yıldızın kara cisim ışınlamını ve zayıf alan yaklaşımında kütleçekimsel kırmızıya kaymayı kullanıyoruz. Sistemin boyutları, Dünya'ya uzaklığına kıyasla ihmal edilebilir düzeydedir.

Şekil 1'i, gözlenen açısal yer değiştirmelerin karşılıklı uç konumlar arasını kapsadığı çembersel bir çift yıldız yörüngesi olarak yorumlayalım. Böylece τ , yörünge periyodunun yarısıdır:

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

Normal yıldızın ve nötron yıldızının ortak kütle merkezleri çevresindeki yörünge yarıçapları sırasıyla a_0 ve a_N olsun. Açısal yer değiştirmeler çapların tamamına karşılık geldiğinden,

$$a_0 = \frac{\ell\Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell\Delta\phi}{2}.$$

Dolayısıyla aralarındaki uzaklık

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

Kütle merkezi bağıntısı şunu verir:

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

Bağıl yörünge için Kepler'in üçüncü yasası

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

Bu denklemleri birleştirirsek,

$$Gm_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

Şimdi, normal yıldızın ışıınım gücü

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Işıının izotropik olduğunu ve yıldız ile Dünya arasındaki soğurmanın ihmal edilebilir olduğunu varsayarsak,

$$P = \frac{L}{4\pi\ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

dolayısıyla

$$R = \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Son olarak, fotonun kütleçekim nedeniyle uğradığı enerji kaybını ele alalım. Yayımlandığı andaki enerjisi ve yaklaşık etkin kütlesi

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

Yıldızın yüzeyinden, R 'ye kıyasla fiilen sonsuz uzaklıkta olan Dünya'ya giderken kaybettiği enerji

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

Bunun sonucunda,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

$\Delta\lambda \ll \lambda_0$ için,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Böylece pozitif kütleçekimsel kırmızıya kayma şu bağıntıyı belirler:

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

(1) ile (3)'ü eşitleyip bir ℓ çarpanını sadeleştirirsek,

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

Pozitif karekökü alırsak,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}.$$

Hem yörünge dinamiği hem de kırmızıya kayma Gm_0 'ı ölçtüğünden kütleçekim sabiti sadeleşir. $c\tau$ dışındaki tüm çarpanlar boyutsuzdur.

b)

$M \gg m_0$ olduğundan nötron yıldızını durağan kabul edelim. Normal yıldızın çembersel yörüngedeki sürati şu bağıntıdan bulunur:

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Bir gaz elemanı bu teğetsel sürati korur ve buna ek olarak içeri doğru v_0 radyal süratini kazanır. Dolayısıyla başlangıçtaki hız bileşenleri

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

Normal yıldızın kütleçekimi ihmal edildiğinde gaz, nötron yıldızının merkezî kütleçekim alanında hareket eder. Gazın birim kütle başına açısal momentumu j ve birim kütle başına mekanik enerjisi ε korunur:

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

En yakın yaklaşma noktasında radyal hız sıfır olur. Buradaki teğetsel sürat v_f ise açısal momentumun korunumu şunu verir:

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

Enerjinin korunumundan ise

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

Yeniden düzenlersek,

$$v_0^2 = v_c^2 \left(\frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

Gaz başlangıçta içeri doğru hareket ettiğinden en yakın yaklaşma uzaklığı $r_f \leq r_0$ koşulunu sağlar. Bu nedenle

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

seçimini yaparız; buradan

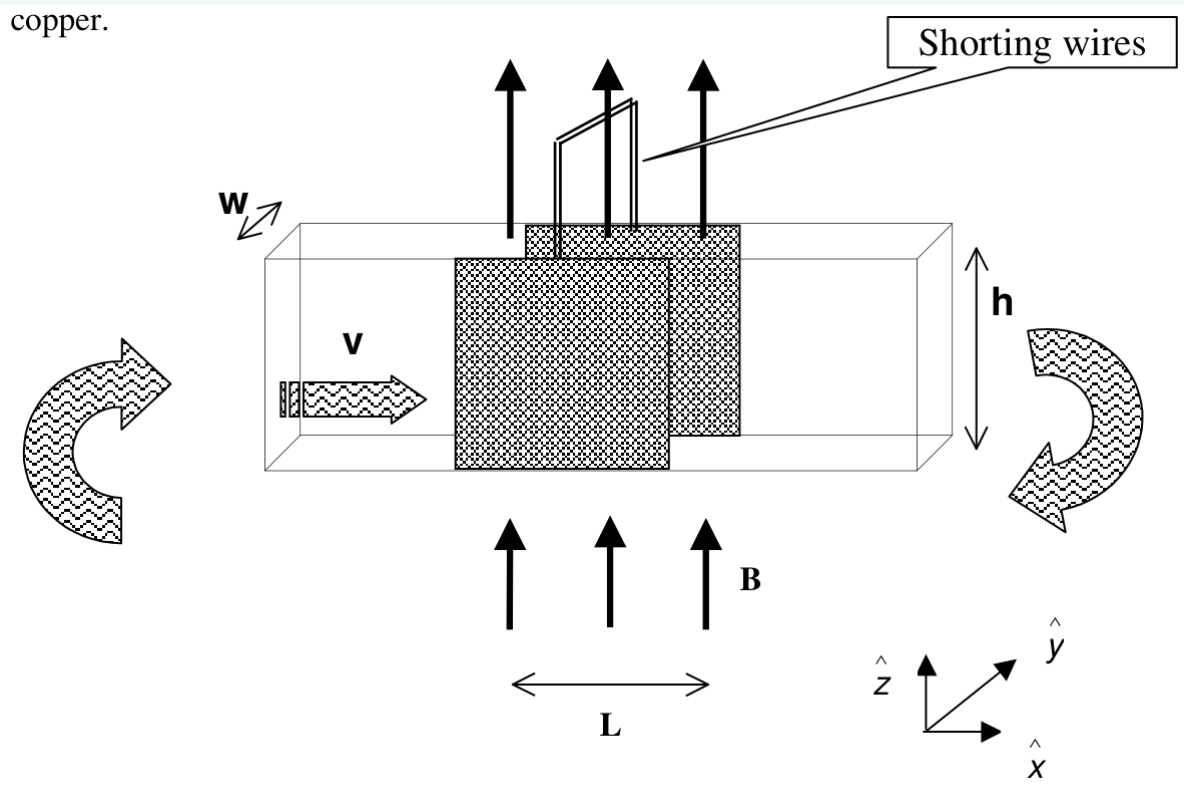
$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

$v_0 = 0$ için bu sonuç, beklendiği gibi başlangıçtaki çembersel yörüngeyi, $r_f = r_0$, verir. Gazın yörüngesi $v_0 < v_c$ olduğunda şekilde çizildiği gibi eliptik, $v_0 = v_c$ olduğunda parabolik ve $v_0 > v_c$ olduğunda hiperboliktir; en yakın yaklaşma uzaklığı formülü her üç durumda da geçerlidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Manyetohidrodinamik (MHD) Jeneratör

Genişliği w ve yüksekliği h olan, kendi üzerine kapanan yatay, dikdörtgen kesitli bir plastik boru, öz direnci ρ olan cıva ile doldurulmuştur. Bu akışkanı sabit v_0 süratiyle hareket ettiren bir türbin, P basınç farkı oluşturur. Borunun L uzunluğundaki bir bölümünün karşılıklı iki düşey duvarı bakırdan yapılmıştır.



Gerçek bir akışkanın hareketi oldukça karmaşıktır. Durumu basitleştirmek için aşağıdaki varsayımları yapıyoruz:

- Akışkan viskoz olmasına rağmen, sürati tüm kesit boyunca aynıdır.
- Akışkanın sürati, üzerine etkiyen net dış kuvvetle her zaman doğru orantılıdır.
- Akışkan sıkıştırılamazdır.

Bu duvarlar dışarıdan elektriksel olarak kısa devre edilmiştir ve yalnızca bu bölümde, düşey olarak yukarı yönelmiş düzgün bir $\mathbf{B}$ manyetik alanı uygulanmaktadır. Düzenek, çözümde kullanılacak $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ birim vektörleriyle birlikte yukarıdaki şekilde gösterilmiştir.

a) Manyetik alan nedeniyle akışkana etkiyen kuvveti (L , B , h , w , ρ ve v hızı cinsinden) bulunuz. [2.0 puan]

b) Manyetik alan uygulandıktan sonra akışkanın yeni v sürati için (v_0 , P , L , B ve ρ cinsinden) bir ifade türetiniz. [3.0 puan]

c) Sürati başlangıçtaki v_0 değerine çıkarmak için türbinin sağlaması gereken ek güç için bir ifade türetiniz. Sonucunuzu **cevap formuna** yazınız. [2.0 puan]

d) Şimdi manyetik alan kapatılıyor ve cıvanın yerine v_0 süratiyle akan su konuluyor. Tek frekanslı bir elektromanyetik dalga, L uzunluğundaki bölüm boyunca akış yönünde gönderiliyor. Suyun kırılma indisi n olup $v_0 \ll c$ koşulu sağlanmaktadır. Akışkanın hareketinin, L bölümüne giren ve bu bölümden çıkan dalgalar arasındaki faz farkına katkısı için bir ifade türetiniz. Sonucunuzu **cevap formuna** yazınız. [3.0 puan]

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Manyetik kuvvet akışa karşı koyar:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

- b)

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}}.$$

- c) Sürat yeniden v_0 değerine getirildiğinde, manyetik alan nedeniyle gereken ve başlangıçtaki alansız durumda harcanan güce eklenen güç

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2.$$

olur. Bunun yerine (b)'deki yavaşlamış çalışma durumu referans alınırsa, türbin gücündeki toplam artış

$$\Delta \mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2 + Pwh(v_0 - v).$$

olur.

- d) $\omega = 2\pi f$ laboratuvar sistemindeki açısal frekans olsun ve bölüm boyunca oluşan faz gecikmesini $\Phi = kL$ olarak tanımlayalım. v_0/c 'nin birinci mertebesine kadar,

$$\delta\Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega Lv_0}{c^2}(n^2 - 1) = -\frac{2\pi fLv_0}{c^2}(n^2 - 1).$$

Dolayısıyla akış, faz gecikmesini azaltır. Çıkan dalganın buna karşılık gelen faz ilerlemesi aynı büyüklükte ve pozitif işaretlidir.

Çözüm

a) Akışkana etkiyen manyetik kuvvet

Akışkanın hızı ve uygulanan manyetik alan

$$\mathbf{v} = v\hat{x}, \quad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\hat{y}.$$

Bu nedenle, hareketli yük taşıyıcılarına etkiyen manyetik kuvvet, cıva içinde bakır duvarlar arasında $-\hat{y}$ yönünde bir konvansiyonel akım oluşturur.

Duvarlar arasındaki uzaklık w olduğundan, hareketten kaynaklanan elektromotor kuvvetin büyüklüğü

$$\mathcal{E} = vBw.$$

olur. Akım, iletken kesit alanı Lh olan cıva içinde w uzaklığı boyunca ilerler. Dolayısıyla direnci

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

olur. Bakır duvarların ve kısa devre tellerinin direnci ihmal edildiğinde akım

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

olur.

Cıva içindeki bu akıma etkiyen kuvvet

$$\mathbf{F}_B = I(-w\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -IwB\hat{x}.$$

olur. Buradan

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

elde edilir. Manyetik frenlemede beklendiği gibi, kuvvetin yönü akışkanın hızına zıttır.

b) Manyetik alan uygulandıktan sonraki sürat

Borunun kesit alanı

$$A = wh.$$

olsun. Türbinin oluşturduğu basınç artışı, akışkanı hareket ettiren

$$F_P = PA.$$

kuvvetini sağlar.

Sürat ile uygulanan hareket ettirici kuvvet arasında varsayılan doğru orantı, kararlı hareket için doğrusal bir κv viskoz direnç kuvvetine eşdeğerdir. Manyetik alan uygulanmadan önce,

$$PA = \kappa v_0,$$

olduğundan

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

elde edilir.

Alan uygulandığında ve aynı P basınç artışı korunduğunda, kararlı durumdaki kuvvet dengesi

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2 A}{\rho} v = 0.$$

şeklindedir. κ yerine ifadesi yazılırsa

$$PA = \left(\frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2 A}{\rho} \right) v.$$

elde edilir. A sadeleştirilip çözülürse,

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

Sonuç, $B \rightarrow 0$ iken v_0 'a yaklaşır ve alan sürati her zaman azaltır.

c) Türbinin sağlaması gereken ek güç

Sürat yeniden v_0 değerine getirildiğinde, viskoz direnç kuvveti başlangıçtaki değerine döner:

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

Türbin ayrıca

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0.$$

manyetik kuvvetini de yenmelidir. Dolayısıyla gerekli basınç artışı

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

olur.

Sıkıştırılmaz akışta, bir basınç artışının sağladığı mekanik güç, basınç artışı ile hacimsel debinin çarpımına eşittir:

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} A v.$$

Bu nedenle, sürat başlangıçtaki değerine getirildiğinde toplam güç

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left(P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) A v_0 = P A v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

olur.

Başlangıçtaki alansız durumda güç $\mathcal{P}_0 = P A v_0$ idi. Dolayısıyla, aynı süratte manyetik frenleme nedeniyle gereken ek güç

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

olur.

Bu, cıvadaki Joule ısınmasına eşittir:

$$I^2 R = \left(\frac{v_0 B L h}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{L h} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2,$$

bu da enerji dengesini doğrular.

"Ek güç", (b)'deki yavaşlamış duruma göre ölçülürse bir farklılık ortaya çıkar. O durumda türbin yalnızca

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = PA v.$$

gücünü sağlar. Bu çalışma durumuna göre artış

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 + P w h (v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}} \right). \end{aligned}$$

olur. İkinci terim, sürat arttıkça viskoz etkiler nedeniyle enerji kayıp hızının başlangıçtaki değerine geri dönmesini hesaba katar.

d) Suyun hareketinin faz farkına katkısı

Dispersiyonu ihmal ederek, verilen n kırılma indisini sabit kabul edelim. Suyun durgun olduğu referans sisteminde dalga hızı

$$u' = \frac{c}{n}.$$

olur.

Su, yayılma doğrultusunda v_0 süratiyle hareket eder. Görelî hız toplama bağıntısı, laboratuvar sistemindeki faz hızını

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u' v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

olarak verir. v_0/c 'nin birinci mertebesine kadar açılım yapılırsa,

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

$1 - 1/n^2$ katsayısı, Fresnel sürüklenme katsayısıdır.

Laboratuvar sisteminde

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

şeklinde yazılan tek renkli bir dalga için, girişten çıkışa faz gecikmesi

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

olur. Kaynak, laboratuvar sistemindeki ω frekansını sabitler.

Hızın tersinin açılımı yapılırsa,

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Böylece

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Durgun su için,

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

Çıkarma işlemiyle,

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Eşdeğer olarak, laboratuvar sistemindeki boşluk dalga boyu $\lambda_0 = c/f$ kullanıldığında,

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi Lv_0}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

Negatif işaret, akış yönündeki yayılmada faz gecikmesinin azaldığını gösterir. Faz farkı, çıkış fazı eksi giriş fazı olarak tanımlanırsa, değişiminin işareti ters olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.