

IPhO 2001

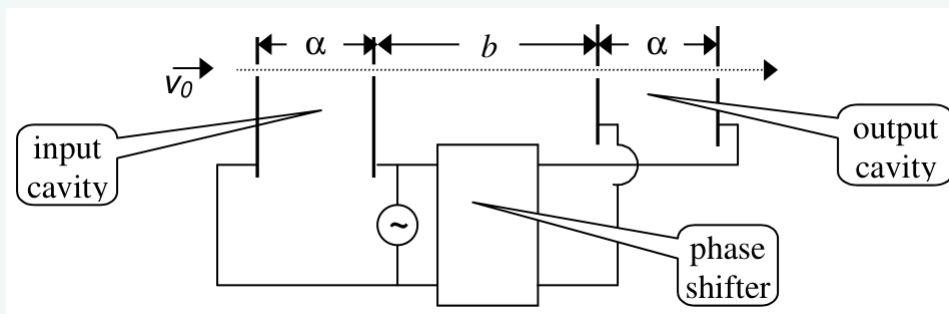
Теоретические задачи и решения · Анталя, Турция · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iph/2001/

Задача 1: Четыре короткие задачи: 1a Клистрон, 1b Межмолекулярное расстояние, 1c Простой генератор пилообразного сигнала, 1d Атомный пучок

1a) КЛИСТРОН

Клистроны — это устройства, используемые для усиления сигналов очень высокой частоты. В простейшем случае клистрон состоит из двух одинаковых пар параллельных пластин (резонаторов), расположенных на расстоянии b друг от друга, как показано на рисунке.



Пучок электронов с начальной скоростью v_0 проходит через всю систему сквозь небольшие отверстия в пластинах. Усиливаемое высокочастотное напряжение подаётся на обе пары пластин с некоторой разностью фаз между ними (при этом периоде T соответствует фаза 2π), создавая в резонаторах горизонтальные переменные электрические поля. Электроны, входящие во входной резонатор в тот момент, когда электрическое поле направлено вправо, замедляются, и наоборот, так что электроны, вышедшие из резонатора, на некотором расстоянии образуют сгустки. Если выходной резонатор поместить в точку образования сгустков, электрическое поле в нём будет отбирать энергию у пучка при соответствующем выборе фазы. Пусть сигнал напряжения представляет собой меандр с периодом $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s, принимающий значения $V = \pm 0.5$ вольт. Начальная скорость электронов равна $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s, а отношение заряда к массе равно $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg. Расстояние α настолько мало, что временем пролёта через резонаторы можно пренебречь. Сохраняя 4 значащие цифры, вычислите:

а) расстояние b , на котором электроны образуют сгустки. Перенесите результат в **бланк ответов**. [1.5 балла]

б) необходимую разность фаз, которую должен обеспечивать фазовращатель. Перенесите результат в **бланк ответов**. [1.0 балла]

1b) МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОЕ РАССТОЯНИЕ

Пусть d_L и d_V обозначают средние расстояния между молекулами воды в жидкой и паровой фазах соответственно. Считайте, что обе фазы находятся при температуре 100°C и атмосферном давлении, а пар ведёт себя как идеальный газ. Используя приведённые ниже данные, вычислите отношение d_V/d_L и перенесите результат в **бланк ответов**. [2.5 балла]

Плотность воды в жидкой фазе: $\rho_L = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,

Молярная масса воды: $M = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$

Атмосферное давление: $P_a = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Газовая постоянная: $R = 8.3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$

Число Авогадро: $N_A = 6.0 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

1c) ПРОСТОЙ ГЕНЕРАТОР ПИЛООБРАЗНОГО СИГНАЛА

Пилообразное напряжение V_0 можно получить на конденсаторе C на рис. 1. Здесь R — переменный резистор, V_i — идеальная батарея, а SG — искровой разрядник, состоящий из двух электродов с регулируемым расстоянием между ними. Когда напряжение между электродами превышает напряжение пробоя V_f , воздух между ними пробивается, и разрядник замыкает цепь накоротко, оставаясь в этом состоянии до тех пор, пока напряжение на нём не станет очень малым.

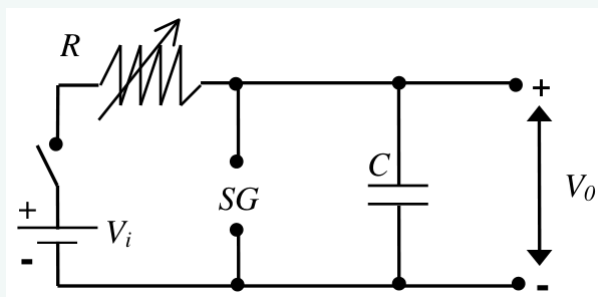


Рисунок 1

а) Изобразите график зависимости напряжения V_0 от времени t после замыкания ключа. [0.5 балла]

б) Какое условие должно выполняться, чтобы получить пилообразное напряжение V_0 , изменяющееся почти линейно? Перенесите результат в **бланк ответов**. [0.2 балла]

в) При выполнении этого условия выведите упрощённое выражение для периода T сигнала. Перенесите результат в **бланк ответов**. [0.4 балла]

г) Что следует изменять (R и/или SG), чтобы изменять только период? Перенесите результат в **бланк ответов**. [0.2 балла]

д) Что следует изменять (R и/или SG), чтобы изменять только амплитуду? Перенесите результат в **бланк ответов**. [0.2 балла]

е) Вам дан дополнительный регулируемый источник постоянного напряжения. Разработайте и нарисуйте новую схему, указав выводы, между которыми можно получить напряжение V'_0 с формой сигнала, показанной на рис. 2. [1.0 балла]

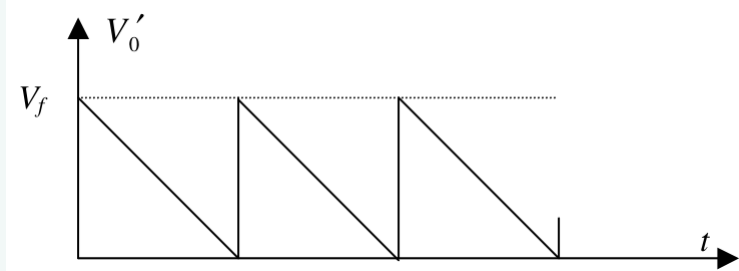
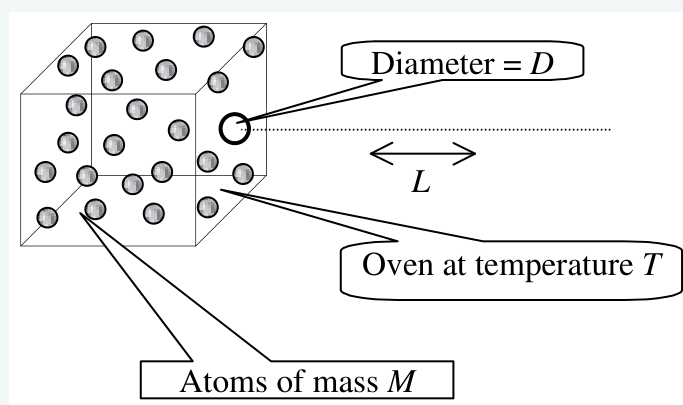


Рисунок 2

1d) АТОМНЫЙ ПУЧОК

Атомный пучок получают, нагревая совокупность атомов до температуры T и позволяя им вылетать горизонтально через небольшое отверстие (атомных размеров) диаметром D в одной из стенок печи. Оцените диаметр пучка после того, как он пройдёт по горизонтали расстояние L вдоль своей траектории. Масса атома равна M . Перенесите результат в **бланк ответов**. [2.5 балла]



Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 1a(a):

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

- 1a(b): Выходное поле должно **отставать** по фазе от входного на

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

по модулю 2π . Эквивалентно, оно может опережать его на $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$.
Тормозящий полупериод выходного поля должен совпадать с приходом сгустка.

- 1b:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

- **1c(a):** Повторяющиеся экспоненциальные подъёмы с уменьшающимся наклоном от приблизительно 0 до V_f , за которыми следуют почти вертикальные спады до 0. Каждый участок зарядки описывается выражением

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)}\right),$$

где τ — время, прошедшее с последнего разряда.

- **1c(b):**

$$V_f \ll V_i.$$

- **1c(c):**

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

- **1c(d):** Изменять **только** R , оставляя искровой промежуток неизменным.
- **1c(e):** Изменять **и** SG , **и** R : изменять зазор, чтобы изменить V_f , и подбирать R так, чтобы

$$RV_f = \text{постоянная}$$

в приближении линейного нарастания напряжения.

- **1c(f):** Установить напряжение дополнительного источника равным V_f , соединив его отрицательный вывод с нижней шиной исходной схемы. Измерять выходное напряжение, подключив положительный измерительный вывод к положительному выводу дополнительного источника, а отрицательный — к верхнему выводу конденсатора. Тогда

$$V'_0 = V_f - V_0,$$

что даёт нисходящий участок от V_f до 0, за которым следует резкий возврат к V_f .

- **1d:** При использовании характерной тепловой скорости $v_{th} = \sqrt{3k_B T/M}$ дифракционная оценка имеет вид

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

Поэтому, когда дифракционное уширение значительно превышает начальный диаметр,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

с точностью до численного множителя, зависящего от принятого определения ширины пучка.

Решение

1а) Клистрон

(а) Расстояние образования сгустков

Обозначим через e модуль заряда электрона и положим $U = 0.5 \text{ V}$. Пренебрежём эффектами пространственного заряда и временем пролёта через каждый из резонаторов, как предполагается в условии задачи.

Нерелятивистский закон сохранения энергии даёт два возможных значения скорости после входного резонатора:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

где v_s и v_f — скорости медленных и быстрых электронов. Следовательно,

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$
$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Выберем входное поле так, чтобы оно тормозило электроны при $0 \leq t < T/2$ и ускоряло их при $T/2 \leq t < T$.

Медленный электрон, входящий в момент t_0 , и быстрый электрон, входящий в момент $t_0 + T/2$, достигают выхода одновременно, если

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

Поэтому

$$b \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

откуда

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

При модуляции меандром это условие обеспечивает совпадение времён прихода всего пакета медленных электронов, прошедших за один полупериод, с временами прихода следующего за ним пакета быстрых электронов. Это первое расстояние, на котором группировка в сгустки максимальна; сгусток имеет конечную длительность, а не представляет собой мгновенный импульс.

Подстановка с сохранением дополнительных цифр до последнего шага даёт

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m}.$$

Таким образом, с четырьмя значащими цифрами,

$$b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

(b) Разность фаз

Времена пролёта медленных и быстрых электронов через область дрейфа равны

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

Пакет медленных электронов достигает выхода в интервале

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

а следующий за ним пакет быстрых электронов — в интервале

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

Эти интервалы совпадают, поскольку $\tau_s - \tau_f = T/2$.

Чтобы отбирать энергию у пучка, выходное электрическое поле должно быть направлено вправо в течение всего полупериода, когда через резонатор проходят электроны, тормозя их. Поэтому оно должно воспроизводить входной сигнал с задержкой τ_s :

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

Имеет значение только дробная часть τ_s/T :

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

Поэтому требуемое отставание выходного поля по фазе равно

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ}.$$

Если же фазу записать как слагаемое в аргументе, $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$, той же настройке соответствует

$$\boxed{\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}}.$$

1b) Межмолекулярное расстояние

При концентрации молекул n характерное межмолекулярное расстояние оценивается путём отнесения каждой молекуле объёма d^3 :

$$d \sim n^{-1/3}.$$

Концентрация молекул в жидкости равна

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

поэтому

$$d_L = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

Для идеального пара

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

и, следовательно,

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

При вычислении отношения число Авогадро сокращается:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

Используя $T \simeq 373 \text{ K}$, получаем

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[\frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

Таким образом, с точностью, соответствующей исходным данным,

$$\boxed{\frac{d_V}{d_L} \simeq 12}.$$

Соответствующие характерные расстояния приблизительно равны

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

1с) Простой генератор пилообразного сигнала

Будем считать, что конденсатор изначально не заряжен, остаточное напряжение после искрового разряда пренебрежимо мало, а разряд занимает гораздо меньше времени, чем зарядка.

(а) Форма сигнала напряжения

Пока искровой разрядник не проводит ток, второе правило Кирхгофа даёт

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

Следовательно,

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

При начальном значении $V_0 = 0$ решение для зарядки имеет вид

$$\boxed{V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right)}.$$

Когда V_0 достигает V_f , искровой разрядник начинает проводить ток и быстро разряжает конденсатор. Затем разрядник перестаёт проводить ток, и зарядка начинается снова.

Таким образом, требуемый график содержит:

- Начальную точку $(t, V_0) = (0, 0)$.
- Возрастающий экспоненциальный участок с уменьшающимся наклоном, заканчивающийся при V_f .
- Почти вертикальный спад от V_f до 0.
- Одинаковые повторения через равные промежутки времени.

Если бы пробой не происходил, каждый участок зарядки приближался бы к асимптоте V_i . Для незатухающих колебаний необходимо $V_i > V_f$; иначе напряжение на конденсаторе не сможет достичь порога пробоя за конечное время.

(b) Условие почти линейного нарастания

Скорость нарастания напряжения при зарядке равна

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

Она остаётся почти постоянной во всём диапазоне $0 \leq V_0 \leq V_f$, если

$$V_f \ll V_i.$$

Тогда

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC} \tau.$$

(c) Период

Если пренебречь длительностью разряда, точное время зарядки до порога определяется уравнением

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right).$$

Таким образом,

$$T = RC \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

При $V_f/V_i \ll 1$ воспользуемся приближением $-\ln(1-x) \simeq x$:

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

Тот же результат можно получить, учитывая, что почти постоянный ток зарядки V_i/R должен перенести заряд CV_f .

(d) Изменение только периода

Максимальное напряжение задаётся порогом пробоя искрового разрядника V_f , тогда как время зарядки пропорционально R .

Поэтому следует изменять **только** R , оставляя SG неизменным. Увеличение R увеличивает период, не изменяя размах напряжения.

(e) Изменение только амплитуды

Размах напряжения приблизительно равен V_f . Чтобы изменить этот порог, следует изменить расстояние между электродами SG .

Поскольку

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

для сохранения постоянного периода необходимо

$$R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}.$$

Таким образом, **необходимо регулировать и SG , и R** . Например, увеличение напряжения пробоя требует компенсирующего уменьшения сопротивления.

Без линейного приближения соответствующее точное условие имеет вид

$$R \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{постоянная}.$$

(f) Схема для получения нисходящего пилообразного сигнала

Обозначим нижнюю шину исходной схемы как узел G , а верхний вывод конденсатора — как узел A . Тогда

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

Выполните следующие соединения:

1. Сохраните исходную схему генератора.
2. Подключите отрицательный вывод дополнительного источника постоянного напряжения к G .
3. Установите напряжение этого источника равным V_f и обозначьте его положительный вывод как B .
4. Снимайте новое выходное напряжение между B и A , причём **положительный вывод находится в B , а отрицательный — в A .**

При измерении выходного напряжения прибором с высоким входным сопротивлением

$$V'_0 = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

В течение каждого почти линейного участка зарядки

$$V'_0 \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T} \right).$$

Таким образом, выходное напряжение начинается со значения V_f , почти линейно падает до 0 и скачком возвращается к V_f , когда искровой разряд разряжает конденсатор. Именно такие значения в точках пересечения с осями, наклоны и скачки показаны на рис. 2.

1d) Атомный пучок

Отверстие атомных размеров вызывает квантовую дифракцию. Пусть h — постоянная Планка, а k_B — постоянная Больцмана.

Характерная тепловая скорость следует из теоремы о равнораспределении энергии:

$$\frac{1}{2} M v_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

откуда

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = M v_{\text{th}} = \sqrt{3M k_B T}.$$

Здесь в качестве характерной скорости используется средняя квадратичная тепловая скорость; для оценки не требуется учитывать полное распределение скоростей вылетающих атомов.

Соответствующая длина волны де Бройля равна

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3M k_B T}}.$$

Для отверстия шириной D характерный угол дифракционной расходимости относительно оси удовлетворяет соотношению

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Это следует из того, что отклонение на угол θ создаёт между краями отверстия разность хода порядка $D\theta$; заметная дифракция возникает, когда эта разность сравнима с λ .

При малых углах распространение на расстояние L увеличивает радиус пучка приблизительно на $L\theta$. Поэтому простая оценка диаметра имеет вид

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

или

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_BT}}.$$

Начальный диаметр отверстия существенен, когда уширение мало. Когда преобладает дифракция,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_BT}}$$

с точностью до численных множителей порядка единицы.

При более конкретном определении ширины первый дифракционный минимум идеального круглого отверстия наблюдается при $\theta \simeq 1.22\lambda/D$. Поэтому диаметр центрального диска в дальней зоне был бы равен

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_BT}}.$$

Для применимости оценок в приближении малых углов необходимо $\lambda/D \ll 1$. Если это отношение не мало, выходящая волна имеет большую угловую расходимость.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Двойная звёздная система

а) Хорошо известно, что большинство звёзд образуют двойные системы. Один из типов двойных систем состоит из обычной звезды массой m_0 и радиусом R и более массивной компактной нейтронной звезды массой M , обращающихся друг вокруг друга. Во всём дальнейшем пренебрегайте движением Земли. Наблюдения такой двойной системы дают следующую информацию:

- Максимальное угловое перемещение обычной звезды равно $\Delta\theta$, а нейтронной звезды — $\Delta\phi$ (см. рис. 1).
- Время, за которое происходят эти максимальные перемещения, равно τ .
- Характеристики излучения обычной звезды показывают, что температура её поверхности равна T , а энергия излучения, падающего на единицу площади поверхности Земли за единицу времени, равна P .

- Линия кальция в этом излучении смещена относительно своей нормальной длины волны λ_0 на величину $\Delta\lambda$ исключительно под действием гравитационного поля обычной звезды. (В этом расчёте можно считать, что фотон имеет эффективную массу $h/c\lambda$.)

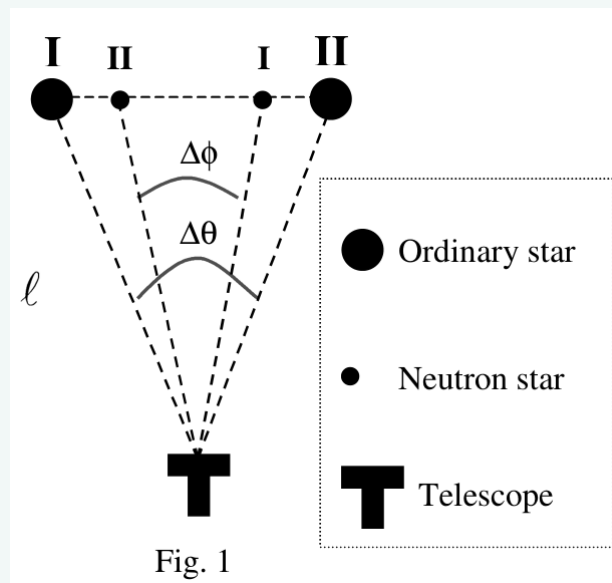


Рис. 1

Найдите выражение для расстояния ℓ от Земли до этой системы только через наблюдаемые величины и универсальные постоянные. Перенесите результат в **бланк ответов**. [7 баллов]

b) Предположим, что $M \gg m_0$, так что обычная звезда фактически обращается вокруг нейтронной звезды по круговой орбите радиусом r_0 . Предположим, что обычная звезда начинает испускать газ в направлении нейтронной звезды со скоростью v_0 относительно обычной звезды (см. рис. 2). Считая, что в этой задаче преобладает гравитационное притяжение нейтронной звезды, и пренебрегая изменениями орбиты обычной звезды, найдите расстояние наибольшего сближения r_f , показанное на рис. 2. Перенесите результат в **бланк ответов**. [3 балла]

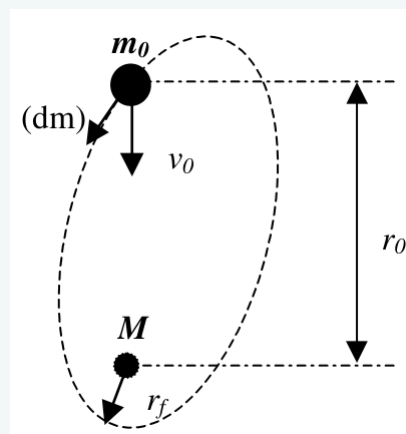


Рис. 2

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- а) Если угловые перемещения выражены в радианах,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана. Принятая интерпретация орбитального движения уточняется ниже.

- б)

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

Решение

а)

Используем ньютоновскую динамику орбитального движения, приближение малых углов, модель излучения обычной звезды как абсолютно чёрного тела и гравитационное красное смещение в слабом поле. Размеры системы пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием от неё до Земли.

Будем считать, что на рис. 1 изображена круговая орбита двойной системы, а наблюдаемые угловые перемещения соответствуют переходу между противоположными крайними положениями. Таким образом, τ равно половине орбитального периода:

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

Пусть a_0 и a_N — радиусы орбит обычной и нейтронной звёзд относительно их общего центра масс. Поскольку угловые перемещения соответствуют полным диаметрам орбит,

$$a_0 = \frac{\ell\Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell\Delta\phi}{2}.$$

Следовательно, расстояние между звёздами равно

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

Из соотношения для центра масс получаем

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

Третий закон Кеплера для относительной орбиты имеет вид

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$Gm_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

Далее, светимость обычной звезды равна

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Предполагая, что излучение изотропно, а поглощением между звездой и Землёй можно пренебречь, получаем

$$P = \frac{L}{4\pi \ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

откуда

$$R = \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Наконец, рассмотрим потерю энергии фотона в гравитационном поле. Его энергия при испускании и приближённое значение эффективной массы равны

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

При движении от поверхности звезды до Земли, которую в масштабе R можно считать находящейся на бесконечности, он теряет энергию

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

Следовательно,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

При $\Delta\lambda \ll \lambda_0$,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Таким образом, положительное гравитационное красное смещение определяет величину

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

Приравнявая (1) и (3) и сокращая на один множитель ℓ , получаем

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

Извлекая положительный квадратный корень, получаем

$$\ell = \frac{2\sqrt{2} c \tau}{\pi (\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}.$$

Гравитационная постоянная сокращается, поскольку и орбитальная динамика, и красное смещение позволяют определить Gm_0 . Все множители, кроме $c\tau$, безразмерны.

b)

Поскольку $M \gg m_0$, будем считать нейтронную звезду неподвижной. Скорость обычной звезды на круговой орбите определяется из соотношения

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Элемент газа сохраняет эту тангенциальную скорость и получает дополнительную радиальную скорость v_0 , направленную к центру. Поэтому начальные компоненты его скорости равны

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

Если пренебречь гравитационным притяжением обычной звезды, газ движется в центральном гравитационном поле нейтронной звезды. Его удельный момент импульса j и удельная механическая энергия ε сохраняются:

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

В точке наибольшего сближения радиальная скорость обращается в нуль. Если тангенциальная скорость в этой точке равна v_f , то закон сохранения момента импульса даёт

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$v_0^2 = v_c^2 \left(\frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

Вначале газ движется к центру, поэтому расстояние наибольшего сближения удовлетворяет условию $r_f \leq r_0$. Следовательно, выбираем

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

откуда

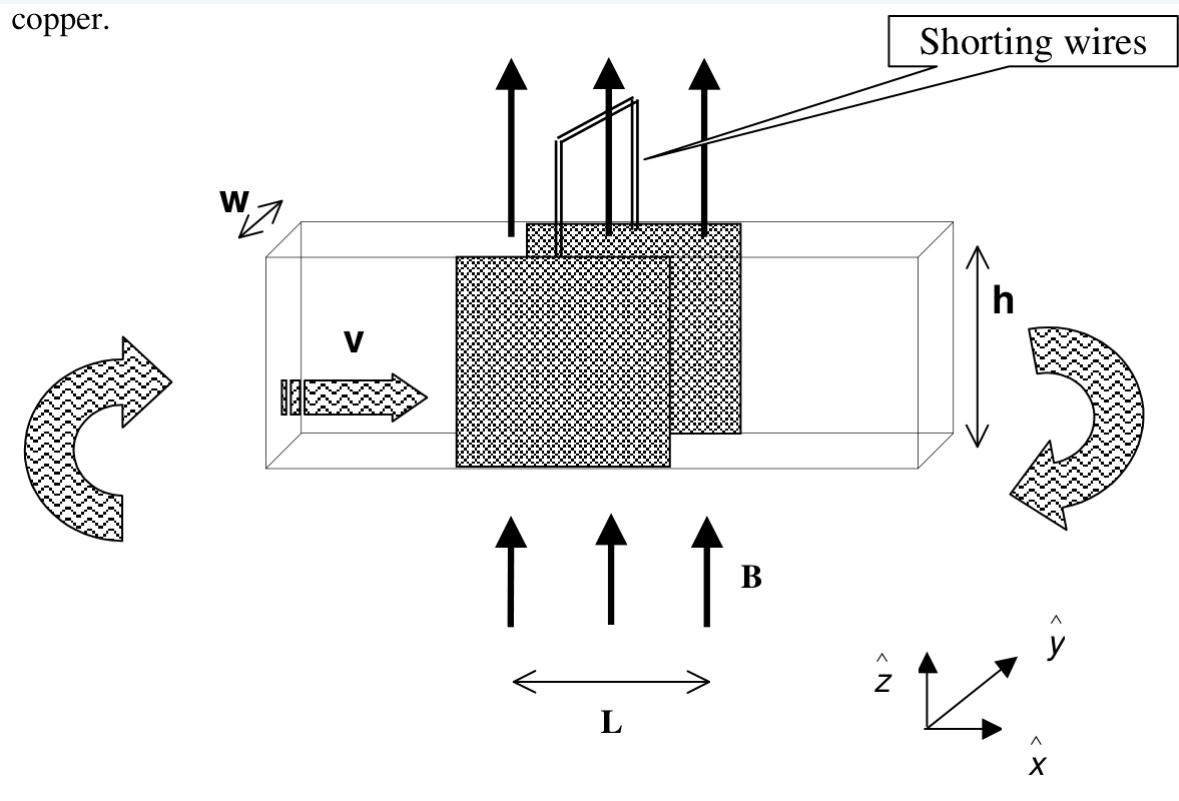
$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

При $v_0 = 0$ это, как и должно быть, даёт исходную круговую орбиту, $r_f = r_0$. Траектория газа является эллиптической, как показано на рисунке, при $v_0 < v_c$, параболической при $v_0 = v_c$ и гиперболической при $v_0 > v_c$; формула для расстояния наибольшего сближения справедлива во всех трёх случаях.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Магнитогидродинамический (МГД) генератор

Горизонтальная замкнутая пластиковая труба прямоугольного сечения шириной w и высотой h заполнена ртутью с удельным сопротивлением ρ . Турбина создаёт избыточное давление P , приводя эту жидкость в движение с постоянной скоростью v_0 . Две противоположные вертикальные стенки участка трубы длиной L изготовлены из меди.



Движение реальной жидкости очень сложно. Для упрощения задачи примем следующие предположения:

- Хотя жидкость вязкая, её скорость одинакова по всему поперечному сечению.
- Скорость жидкости всегда пропорциональна результирующей внешней силе, действующей на неё.
- Жидкость несжимаема.

Эти стенки замкнуты накоротко снаружи, и только на этом участке создаётся однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное вертикально вверх. Установка показана на рисунке выше вместе с единичными векторами $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, которые следует использовать в решении.

а) Найдите силу, действующую на жидкость со стороны магнитного поля (через L , B , h , w , ρ и скорость v) [2.0 балла]

б) Получите выражение для новой скорости v жидкости (через v_0 , P , L , B и ρ) после включения магнитного поля. [3.0 балла]

в) Получите выражение для дополнительной мощности, которую должна развивать турбина, чтобы увеличить скорость до её исходного значения v_0 . Перенесите результат в **бланк ответов**. [2.0 балла]

d) Теперь магнитное поле выключают, а ртуть заменяют водой, текущей со скоростью v_0 . Вдоль участка длиной L в направлении течения посылают монохроматическую электромагнитную волну. Показатель преломления воды равен n , причём $v_0 \ll c$. Получите выражение для вклада движения жидкости в разность фаз между волнами на входе и выходе участка L . Перенесите результат в **бланк ответов**. [3.0 балла]

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- a) Магнитная сила направлена против течения:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

- b)

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}}.$$

- c) При восстановленной скорости v_0 дополнительная мощность, необходимая из-за наличия магнитного поля сверх исходной мощности в отсутствие поля, равна

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2.$$

Если же отсчёт ведётся от режима с пониженной скоростью из пункта (b), полное увеличение мощности турбины составляет

$$\Delta \mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2 + Pwh(v_0 - v).$$

- d) Пусть $\omega = 2\pi f$ — угловая частота в лабораторной системе отсчёта; определим фазовое запаздывание на участке как $\Phi = kL$. В первом порядке по v_0/c

$$\delta\Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega Lv_0}{c^2}(n^2 - 1) = -\frac{2\pi fLv_0}{c^2}(n^2 - 1).$$

Таким образом, течение уменьшает фазовое запаздывание. Соответствующее опережение по фазе выходящей волны имеет ту же величину и положительный знак.

Решение

а) Магнитная сила, действующая на жидкость

Скорость жидкости и приложенное магнитное поле равны

$$\mathbf{v} = v\hat{x}, \quad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\hat{y}.$$

Поэтому магнитная сила, действующая на движущиеся носители заряда, вызывает в ртути ток в направлении $-\hat{y}$, между медными стенками; здесь используется условное направление тока.

Расстояние между стенками равно w , поэтому электродвижущая сила движения по модулю равна

$$\mathcal{E} = vBw.$$

Ток проходит в ртути путь длиной w , а площадь проводящего поперечного сечения равна Lh . Поэтому сопротивление ртути равно

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

Пренебрегая сопротивлением медных стенок и замыкающих проводов, получаем силу тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

Сила, действующая на этот ток в ртути, равна

$$\mathbf{F}_B = I(-w\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -IwB\hat{x}.$$

Отсюда

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

Она направлена противоположно скорости жидкости, как и следует ожидать при магнитном торможении.

б) Скорость после включения магнитного поля

Обозначим площадь поперечного сечения трубы через

$$A = wh.$$

Перепад давления, создаваемый турбиной, обеспечивает движущую силу

$$F_P = PA.$$

Принятая пропорциональность между скоростью и приложенной движущей силой при установившемся движении эквивалентна линейной силе вязкого сопротивления κv . До включения магнитного поля

$$PA = \kappa v_0,$$

поэтому

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

При включённом поле и том же перепаде давления P баланс сил в установившемся режиме имеет вид

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2A}{\rho} v = 0.$$

Подстановка выражения для κ даёт

$$PA = \left(\frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2A}{\rho} \right) v.$$

Сокращая на A и решая уравнение, получаем

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

Результат стремится к v_0 при $B \rightarrow 0$, а поле всегда уменьшает скорость.

с) Дополнительная мощность турбины

При восстановленной скорости v_0 сила вязкого сопротивления возвращается к исходному значению:

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

Турбина должна также преодолевать магнитную силу

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0.$$

Таким образом, необходимый перепад давления равен

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

Для несжимаемой жидкости механическая мощность, передаваемая за счёт перепада давления, равна произведению этого перепада на объёмный расход:

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} Av.$$

Следовательно, полная мощность при восстановленной скорости равна

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left(P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) Av_0 = PA v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

Исходная мощность в отсутствие поля составляла $\mathcal{P}_0 = PA v_0$. Следовательно, дополнительная мощность, необходимая при той же скорости из-за магнитного торможения, равна

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

Она равна мощности джоулева тепловыделения в ртути:

$$I^2 R = \left(\frac{v_0 B L h}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{L h} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2,$$

что подтверждает баланс энергии.

Возникает различие, если «дополнительную мощность» отсчитывать от режима с пониженной скоростью из пункта (b). В этом режиме турбина развивает лишь мощность

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = PA v.$$

Увеличение мощности относительно этого рабочего режима равно

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 + Pwh(v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}} \right).\end{aligned}$$

Второе слагаемое учитывает восстановление исходной мощности вязкой диссипации по мере увеличения скорости.

d) Вклад движения воды в разность фаз

Будем считать заданный показатель преломления n постоянным, пренебрегая дисперсией. В системе отсчёта покоя воды фазовая скорость волны равна

$$u' = \frac{c}{n}.$$

Вода движется в направлении распространения волны со скоростью v_0 . Релятивистское сложение скоростей даёт фазовую скорость в лабораторной системе отсчёта

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u'v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

Разлагая до первого порядка по v_0/c , получаем

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Коэффициент $1 - 1/n^2$ — это коэффициент увлечения Френеля.

Для монохроматической волны, записанной в лабораторной системе отсчёта в виде

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

фазовое запаздывание от входа до выхода равно

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

Источник задаёт частоту ω в лабораторной системе отсчёта.

Разлагая обратную скорость, получаем

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Таким образом,

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Для неподвижной воды

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

Вычитая, получаем

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Эквивалентная запись через длину волны в вакууме в лабораторной системе отсчёта $\lambda_0 = c/f$ имеет вид

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi L v_0}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

Отрицательный знак означает уменьшение фазового запаздывания при распространении по течению. Если разность фаз определяется как фаза на выходе минус фаза на входе, её изменение имеет противоположный знак.

Решение проверено по официальному решению.