

# IPhO 2001

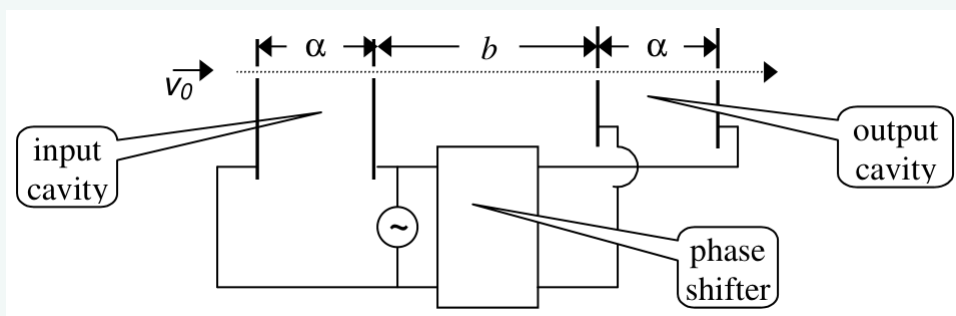
Problemas teóricos y soluciones · Antalya, Turquía · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2001/

## Problema 1: Cuatro problemas cortos: 1a Klistrón, 1b Distancia intermolecular, 1c Generador sencillo de señales de diente de sierra, 1d Haz atómico

### 1a) KLISTRÓN

Los klistrones son dispositivos utilizados para amplificar señales de muy alta frecuencia. Un klistrón consta básicamente de dos pares idénticos de placas paralelas (cavidades) separados por una distancia  $b$ , como se muestra en la figura.



Un haz de electrones con una rapidez inicial  $v_0$  atraviesa todo el sistema, pasando por pequeños orificios en las placas. La tensión de alta frecuencia que se desea amplificar se aplica a ambos pares de placas con una cierta diferencia de fase entre ellos (donde el período  $T$  corresponde a una fase de  $2\pi$ ), produciendo campos eléctricos alternos horizontales en las cavidades. Los electrones que entran en la cavidad de entrada cuando el campo eléctrico apunta hacia la derecha se frenan, y viceversa, de modo que los electrones que salen forman paquetes a una cierta distancia. Si la cavidad de salida se coloca en el punto de agrupamiento, el campo eléctrico en esta cavidad absorberá potencia del haz siempre que su fase se elija adecuadamente. Sea la señal de tensión una onda cuadrada con período  $T = 1.0 \times 10^{-9}$  s, que varía entre  $V = \pm 0.5$  voltios. La velocidad inicial de los electrones es  $v_0 = 2.0 \times 10^6$  m/s y la relación entre carga y masa es  $e/m = 1.76 \times 10^{11}$  C/kg. La distancia  $\alpha$  es tan pequeña que puede despreciarse el tiempo de tránsito por las cavidades. Conservando 4 cifras significativas, calcule:

- la distancia  $b$  a la que se agrupan los electrones. Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [1.5 puntos]
- la diferencia de fase necesaria que debe proporcionar el desfasador. Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [1.0 puntos]

### 1b) DISTANCIA INTERMOLECULAR

Sean  $d_L$  y  $d_V$  las distancias medias entre las moléculas de agua en la fase líquida y en la fase de vapor, respectivamente. Suponga que ambas fases se encuentran a  $100^\circ\text{C}$  y a presión atmosférica, y que el vapor se comporta como un gas ideal. Utilizando los siguientes datos, calcule la razón  $d_V/d_L$  y copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [2.5 puntos]

Densidad del agua en fase líquida:  $\rho_L = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,

Masa molar del agua:  $M = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$

Presión atmosférica:  $P_a = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Constante de los gases:  $R = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

Número de Avogadro:  $N_A = 6.0 \times 10^{23} / \text{mol}$

### 1c) GENERADOR SENCILLO DE SEÑALES DE DIENTE DE SIERRA

Puede obtenerse una tensión  $V_0$  con forma de onda de diente de sierra entre los bornes del condensador  $C$  de la Fig. 1.  $R$  es una resistencia variable,  $V_i$  es una batería ideal y  $SG$  es un explosor formado por dos electrodos cuya separación puede ajustarse. Cuando la tensión entre los electrodos supera la tensión de cebado  $V_f$ , se produce la ruptura dieléctrica del aire entre ellos; por tanto, el explosor se convierte en un cortocircuito y permanece así hasta que la tensión entre sus bornes se hace muy pequeña.

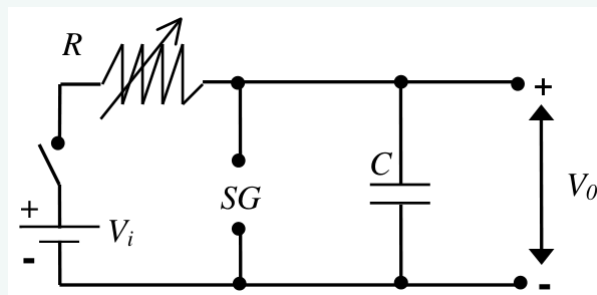


Figura 1

- Dibuje la forma de onda de la tensión  $V_0$  en función del tiempo  $t$ , después de cerrar el interruptor. [0.5 puntos]
- ¿Qué condición debe cumplirse para obtener una tensión  $V_0$  con forma de onda de diente de sierra que varíe casi linealmente? Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [0.2 puntos]
- Suponiendo que se cumple esta condición, deduzca una expresión simplificada para el período  $T$  de la forma de onda. Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [0.4 puntos]
- ¿Qué debe variar ( $R$  y/o  $SG$ ) para cambiar únicamente el período? Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [0.2 puntos]
- ¿Qué debe variar ( $R$  y/o  $SG$ ) para cambiar únicamente la amplitud? Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [0.2 puntos]
- Se le proporciona una fuente adicional de tensión continua ajustable. Diseñe y dibuje un nuevo circuito indicando los bornes entre los que obtendría la tensión  $V'_0$  con la forma de onda descrita en la Fig. 2. [1.0 puntos]

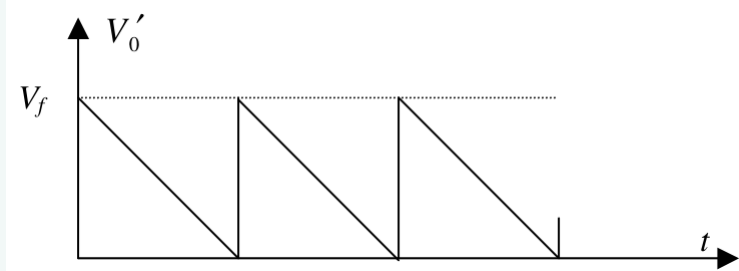
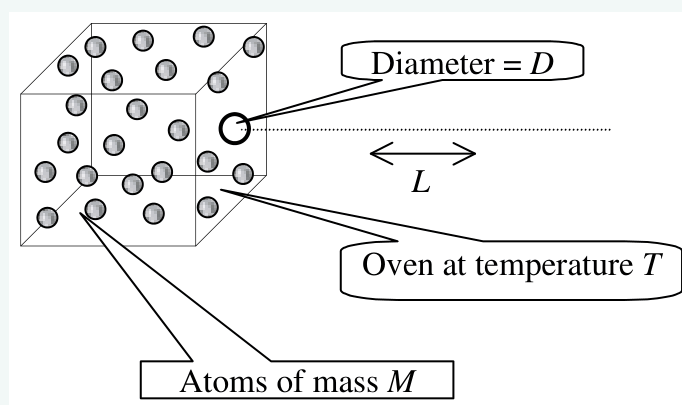


Figura 2

### 1d) HAZ ATÓMICO

Se prepara un haz atómico calentando un conjunto de átomos hasta una temperatura  $T$  y permitiendo que salgan horizontalmente a través de un pequeño orificio (de dimensiones atómicas) de diámetro  $D$  situado en un lado del horno. Estime el diámetro del haz después de que haya recorrido una longitud horizontal  $L$  a lo largo de su trayectoria. La masa de un átomo es  $M$ . Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [2.5 puntos]



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

- **1a(a):**

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

- **1a(b):** El campo de salida debe **retrasarse** respecto al campo de entrada en

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

módulo  $2\pi$ . De forma equivalente, puede adelantarse en  $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$ . El semiciclo de frenado de la salida debe coincidir con la llegada del paquete.

- **1b:**

$$\frac{d_V}{d_L} = \left( \frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

- **1c(a):** Subidas exponenciales repetidas, cóncavas hacia abajo, desde aproximadamente 0 hasta  $V_f$ , seguidas de caídas casi verticales hasta 0. Cada tramo de carga viene dado por

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)}\right),$$

donde  $\tau$  es el tiempo transcurrido desde la última descarga.

- **1c(b):**

$$V_f \ll V_i.$$

- **1c(c):**

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

- **1c(d):** Varíe **únicamente**  $R$ , manteniendo fijo el explosor.
- **1c(e):** Varíe **tanto**  $SG$  **como**  $R$ : cambie la separación entre los electrodos para cambiar  $V_f$  y ajuste  $R$  de modo que

$$RV_f = \text{constante}$$

en la aproximación de rampa lineal.

- **1c(f):** Ajuste la fuente adicional a  $V_f$ , con su borne negativo conectado al conductor inferior del circuito original. Mida la salida con el borne positivo de medida en el borne positivo de la fuente adicional y el borne negativo de medida en el borne superior del condensador. Entonces

$$V'_0 = V_f - V_0,$$

lo que produce una rampa descendente desde  $V_f$  hasta 0, seguida de un retorno brusco a  $V_f$ .

- **1d:** Utilizando una rapidez térmica representativa  $v_{th} = \sqrt{3k_B T/M}$ , la estimación por difracción es

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

Por tanto, cuando la difracción domina sobre el diámetro inicial,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

salvo un factor numérico que depende de la convención utilizada para la anchura del haz.

## Solución

### 1a) Klistrón

#### (a) Distancia de agrupamiento

Sea  $e$  el módulo de la carga del electrón y sea  $U = 0.5 \text{ V}$ . Despreciamos los efectos de carga espacial y el tiempo de tránsito por cada cavidad, tal como se pretende en el problema.

La conservación de la energía no relativista da las dos posibles rapidezces después de la cavidad de entrada:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

donde  $v_s$  y  $v_f$  son las rapidezces de los electrones lentos y rápidos. Por tanto,

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Elegimos el campo de entrada de modo que frene los electrones durante  $0 \leq t < T/2$  y los acelere durante  $T/2 \leq t < T$ .

Un electrón lento que entra en el instante  $t_0$  y un electrón rápido que entra en  $t_0 + T/2$  llegan juntos a la salida cuando

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

Por tanto,

$$b \left( \frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

de modo que

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

Para una modulación de onda cuadrada, esta condición hace que todo el paquete del semiciclo lento se solape en tiempo de llegada con el paquete del semiciclo rápido siguiente. Es la primera distancia de agrupamiento máximo; el paquete tiene una duración finita en lugar de ser un pulso instantáneo.

Al sustituir, conservando cifras adicionales hasta el último paso, se obtiene

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m}.$$

Así, con cuatro cifras significativas,

$$b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

## (b) Diferencia de fase

Los tiempos de vuelo de los electrones lentos y rápidos a través de la región de deriva son

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

El paquete lento llega a la salida durante

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

mientras que el paquete rápido siguiente llega durante

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

Estos intervalos coinciden porque  $\tau_s - \tau_f = T/2$ .

Para extraer energía del haz, el campo eléctrico de salida debe apuntar hacia la derecha durante todo este semiciclo ocupado, frenando así los electrones. Por tanto, su forma de onda debe reproducir la forma de onda de entrada con un retraso de  $\tau_s$ :

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

Solo importa la parte fraccionaria de  $\tau_s/T$ :

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

El retraso de fase necesario de la salida es, por tanto,

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad.}$$

Así,

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ}.$$

Si, en cambio, la fase se escribe como un término aditivo en el argumento,  $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$ , el mismo ajuste es

$$\boxed{\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}}.$$

## 1b) Distancia intermolecular

Para una densidad numérica de moléculas  $n$ , la separación intermolecular característica se estima asignando un volumen  $d^3$  a cada molécula:

$$d \sim n^{-1/3}.$$

La densidad numérica del líquido es

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

por lo que

$$d_L = \left( \frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

Para el vapor ideal,

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

y, por tanto,

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left( \frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

Al tomar la razón, se cancela el número de Avogadro:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left( \frac{\rho_L RT}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

Utilizando  $T \simeq 373 \text{ K}$ ,

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[ \frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

Así, de acuerdo con la precisión de los datos proporcionados,

$$\boxed{\frac{d_V}{d_L} \simeq 12}.$$

Las distancias características correspondientes son aproximadamente

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

### 1c) Generador sencillo de señales de diente de sierra

Suponemos que el condensador está inicialmente descargado, que la tensión residual después de una chispa es despreciable y que la descarga dura mucho menos que la carga.

#### (a) Forma de onda de la tensión

Mientras el explosor no conduce, la ley de tensiones de Kirchhoff da

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

En consecuencia,

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

Partiendo de  $V_0 = 0$ , la solución para la carga es

$$\boxed{V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)}\right)}.$$

Cuando  $V_0$  alcanza  $V_f$ , el explosor conduce y descarga rápidamente el condensador. A continuación, el explosor deja de conducir y la carga comienza de nuevo.

Por tanto, el dibujo solicitado presenta:

- Un punto inicial en  $(t, V_0) = (0, 0)$ .
- Un tramo exponencial creciente, cóncavo hacia abajo, que termina en  $V_f$ .
- Una caída casi vertical desde  $V_f$  hasta 0.
- Repeticiones idénticas a intervalos regulares.

Si continuara sin que se produjera el cebado, cada tramo de carga se acercaría a la asíntota  $V_i$ . Para mantener la oscilación se requiere  $V_i > V_f$ ; de lo contrario, el condensador no puede alcanzar el umbral de cebado en un tiempo finito.

#### (b) Condición para una rampa casi lineal

La pendiente durante la carga es

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

Se mantiene casi constante en todo el intervalo  $0 \leq V_0 \leq V_f$  si

$$\boxed{V_f \ll V_i}.$$

Entonces

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC} \tau.$$

### (c) Período

Despreciando la duración de la descarga, el tiempo exacto de carga hasta el umbral se obtiene de

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right).$$

Por tanto,

$$T = RC \ln \left( \frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

Para  $V_f/V_i \ll 1$ , utilizamos  $-\ln(1 - x) \simeq x$ :

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

De forma equivalente, la corriente de carga casi constante  $V_i/R$  debe suministrar la carga  $CV_f$ , lo que da el mismo resultado.

### (d) Cambio únicamente del período

La tensión de pico está fijada por el umbral del explosor  $V_f$ , mientras que el tiempo de carga es proporcional a  $R$ .

Por tanto, varíe **únicamente**  $R$ , manteniendo fijo  $SG$ . Al aumentar  $R$ , aumenta el período sin cambiar la amplitud pico a pico.

### (e) Cambio únicamente de la amplitud

La amplitud pico a pico es aproximadamente  $V_f$ . Cambie la separación entre los electrodos de  $SG$  para cambiar este umbral.

Como

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

mantener constante el período requiere

$$R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}.$$

Así pues, **deben ajustarse tanto  $SG$  como  $R$** . Por ejemplo, aumentar la tensión de cebado requiere una disminución compensatoria de la resistencia.

Sin la aproximación lineal, la condición exacta correspondiente es

$$R \ln \left( \frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{constante}.$$

### (f) Circuito para el diente de sierra descendente

Definimos el conductor inferior del circuito original como el nodo  $G$  y el borne superior del condensador como el nodo  $A$ . Entonces

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

Realice las siguientes conexiones:

1. Mantenga el circuito oscilador original.
2. Conecte el borne negativo de la fuente adicional de tensión continua a  $G$ .

3. Ajuste esta fuente a  $V_f$  y denomine  $B$  a su borne positivo.
4. Tome la nueva salida entre  $B$  y  $A$ , con el **positivo en  $B$**  y el **negativo en  $A$** .

Para una medida de la salida con alta impedancia,

$$V'_0 = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

Durante cada intervalo de carga casi lineal,

$$V'_0 \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

Así, la salida comienza en  $V_f$ , desciende casi linealmente hasta 0 y salta de nuevo a  $V_f$  cuando la chispa descarga el condensador. Estos son precisamente los cortes con los ejes, las pendientes y los saltos que se muestran en la Fig. 2.

### 1d) Haz atómico

La abertura de escala atómica produce difracción cuántica. Sean  $h$  la constante de Planck y  $k_B$  la constante de Boltzmann.

Una rapidez térmica representativa se obtiene a partir de la equipartición:

$$\frac{1}{2} M v_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

lo que da

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = M v_{\text{th}} = \sqrt{3M k_B T}.$$

Aquí se utiliza la rapidez térmica cuadrática media como rapidez representativa; una estimación no requiere determinar la distribución completa de las velocidades de salida.

La longitud de onda de de Broglie correspondiente es

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3M k_B T}}.$$

Para una abertura de anchura  $D$ , el semiángulo característico de difracción satisface

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Esto se debe a que una desviación angular  $\theta$  produce una diferencia de caminos del orden de  $D\theta$  entre los extremos de la abertura; la difracción es apreciable cuando esa diferencia es comparable con  $\lambda$ .

Para ángulos pequeños, la propagación a lo largo de una distancia  $L$  aumenta el radio del haz en aproximadamente  $L\theta$ . Por tanto, una estimación sencilla del diámetro es

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

o bien

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3M k_B T}}.$$

El diámetro inicial de la abertura importa cuando el ensanchamiento es pequeño. Cuando domina la difracción,

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}}$$

salvo factores numéricos del orden de la unidad.

Para una convención más específica, el primer mínimo de difracción de una abertura circular ideal se produce en  $\theta \simeq 1.22\lambda/D$ . Por tanto, el diámetro de su disco central en el campo lejano sería

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

Las estimaciones para ángulos pequeños requieren  $\lambda/D \ll 1$ . Si esta razón no es pequeña, la onda emergente presenta una gran divergencia.

La solución se comprobó con la solución oficial.

## Problema 2: Sistema estelar binario

**a)** Es bien sabido que la mayoría de las estrellas forman sistemas binarios. Un tipo de sistema binario está constituido por una estrella ordinaria de masa  $m_0$  y radio  $R$ , y una estrella de neutrones compacta y más masiva, de masa  $M$ , que giran una alrededor de la otra. En todo lo que sigue, ignore el movimiento de la Tierra. Las observaciones de un sistema binario de este tipo proporcionan la siguiente información:

- El desplazamiento angular máximo de la estrella ordinaria es  $\Delta\theta$ , mientras que el de la estrella de neutrones es  $\Delta\phi$  (véase la Fig. 1).
- El tiempo necesario para efectuar estos desplazamientos máximos es  $\tau$ .
- Las características de la radiación de la estrella ordinaria indican que su temperatura superficial es  $T$  y que la energía radiada que incide por unidad de área de la superficie terrestre y por unidad de tiempo es  $P$ .
- La línea del calcio en esta radiación difiere de su longitud de onda normal  $\lambda_0$  en una cantidad  $\Delta\lambda$ , debida únicamente al campo gravitatorio de la estrella ordinaria. (Para este cálculo, puede considerarse que el fotón tiene una masa efectiva de  $h/c\lambda$ .)

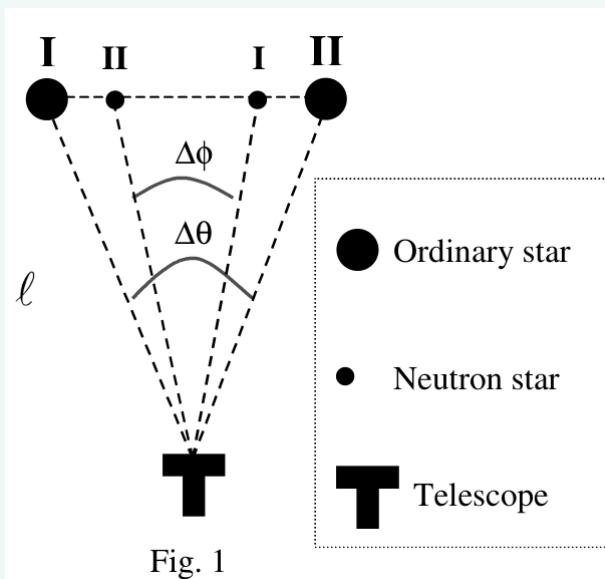


Fig. 1

Obtenga una expresión para la distancia  $\ell$  de la Tierra a este sistema, únicamente en función de las magnitudes observadas y de constantes universales. Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [7 puntos]

**b)** Suponga que  $M \gg m_0$ , de modo que la estrella ordinaria gira esencialmente alrededor de la estrella de neutrones en una órbita circular de radio  $r_0$ . Suponga que la estrella ordinaria comienza a emitir gas hacia la estrella de neutrones con una rapidez  $v_0$ , respecto de la estrella ordinaria (véase la Fig. 2). Suponiendo que la estrella de neutrones ejerce la fuerza gravitatoria dominante en este problema y despreciando los cambios orbitales de la estrella ordinaria, determine la distancia de máxima aproximación  $r_f$  indicada en la Fig. 2. Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [3 puntos]

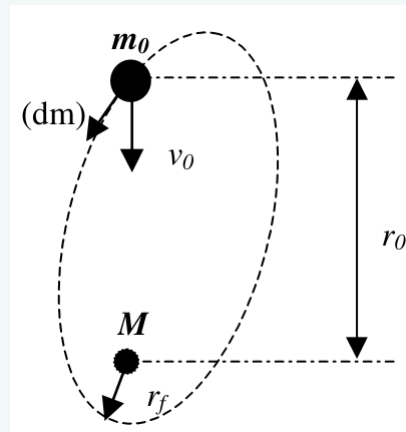


Fig. 2

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

- a)** Con los desplazamientos angulares expresados en radianes,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stefan–Boltzmann. La interpretación orbital se especifica a continuación.

- b)**

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}$$

## Solución

a)

Utilizamos la dinámica orbital newtoniana, la aproximación de ángulos pequeños, la radiación de cuerpo negro de la estrella ordinaria y el corrimiento gravitatorio al rojo en un campo débil. Las dimensiones del sistema son despreciables en comparación con su distancia a la Tierra.

Interpretamos la Fig. 1 como una órbita binaria circular cuyos desplazamientos angulares observados abarcan extremos opuestos. Por tanto,  $\tau$  es la mitad del período orbital:

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

Sean  $a_0$  y  $a_N$  los radios orbitales de la estrella ordinaria y de la estrella de neutrones alrededor de su centro de masas común. Como los desplazamientos angulares corresponden a diámetros completos,

$$a_0 = \frac{\ell \Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell \Delta\phi}{2}.$$

Por tanto, la separación es

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

La relación del centro de masas da

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

La tercera ley de Kepler para la órbita relativa es

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

Combinando estas ecuaciones,

$$G m_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

A continuación, la luminosidad de la estrella ordinaria es

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Suponiendo una emisión isotropa y una absorción despreciable entre la estrella y la Tierra,

$$P = \frac{L}{4\pi \ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

de modo que

$$R = \ell \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Por último, consideremos la pérdida de energía del fotón debida a la gravedad. Su energía en el momento de la emisión y su masa efectiva aproximada son

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

Al viajar desde la superficie estelar hasta la Tierra, situada efectivamente en el infinito en comparación con  $R$ , pierde una energía

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

En consecuencia,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

Para  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ,

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Así, el corrimiento gravitatorio al rojo positivo determina

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

Igualando (1) y (3) y cancelando un factor de  $\ell$ ,

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

Tomando la raíz cuadrada positiva,

$$\ell = \frac{2\sqrt{2} c \tau}{\pi (\Delta\theta + \Delta\phi)} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \Delta\phi} \right)^{1/2} \left( \frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}.$$

La constante gravitatoria se cancela porque tanto la dinámica orbital como el corrimiento al rojo miden  $Gm_0$ . Todos los factores, salvo  $c\tau$ , son adimensionales.

**b)**

Como  $M \gg m_0$ , tratamos la estrella de neutrones como estacionaria. La rapidez orbital circular de la estrella ordinaria se obtiene de

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Un elemento de gas hereda esta rapidez tangencial y recibe una rapidez radial adicional  $v_0$  dirigida hacia dentro. Por tanto, las componentes iniciales de su velocidad son

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

Despreciando la gravedad de la estrella ordinaria, el gas se mueve en el campo gravitatorio central de la estrella de neutrones. Su momento angular específico  $j$  y su energía mecánica específica  $\varepsilon$  se conservan:

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

En el punto de máxima aproximación, la velocidad radial se anula. Si la rapidez tangencial en ese punto es  $v_f$ , la conservación del momento angular da

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

La conservación de la energía da entonces

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

Reordenando,

$$v_0^2 = v_c^2 \left( \frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

El gas se mueve inicialmente hacia dentro, por lo que su distancia de máxima aproximación satisface  $r_f \leq r_0$ . Por tanto, elegimos

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

lo que conduce a

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

Para  $v_0 = 0$ , se obtiene correctamente la órbita circular original,  $r_f = r_0$ . La trayectoria del gas es elíptica, como se muestra en la figura, cuando  $v_0 < v_c$ , parabólica cuando  $v_0 = v_c$  e hiperbólica cuando  $v_0 > v_c$ ; la fórmula de la distancia de máxima aproximación es válida en los tres casos.

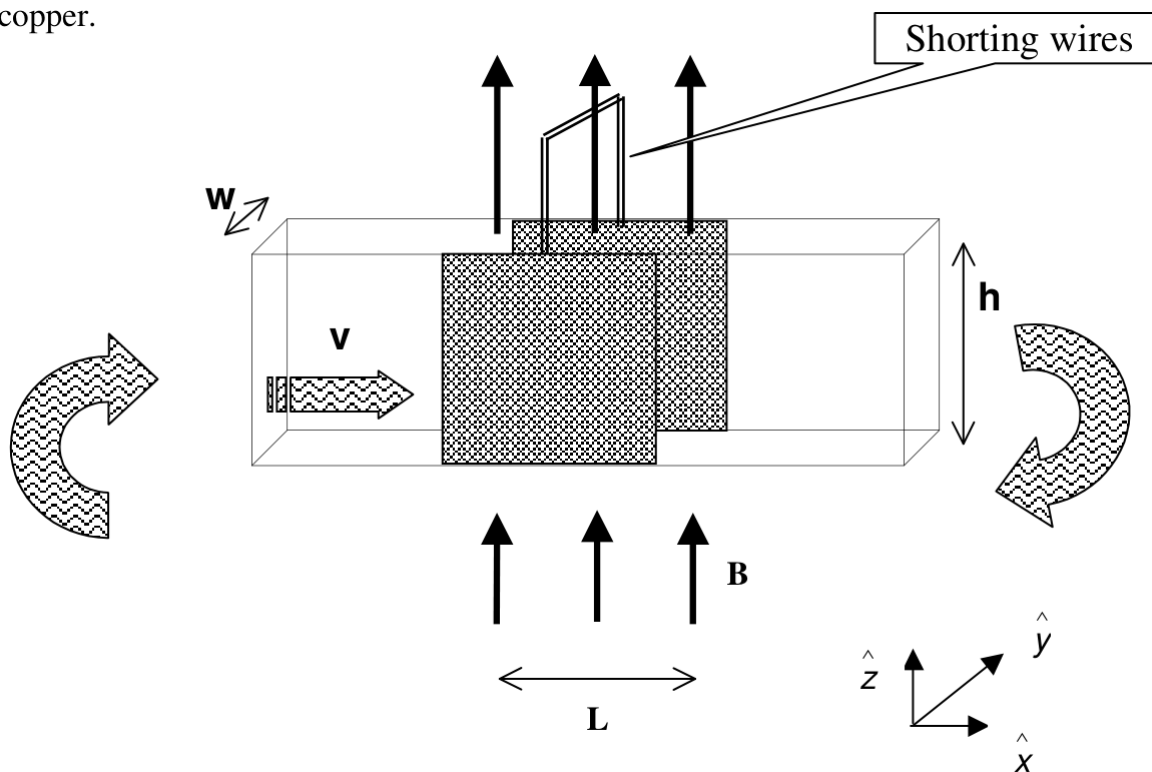
---

La solución se comprobó con la solución oficial.

### Problema 3: Generador magnetohidrodinámico (MHD)

Un tubo horizontal de plástico de sección rectangular, de anchura  $w$  y altura  $h$ , que forma un circuito cerrado, está lleno de mercurio de resistividad  $\rho$ . Una turbina produce una sobrepresión  $P$  que impulsa este fluido con una rapidez constante  $v_0$ . Las dos paredes verticales opuestas de un tramo del tubo de longitud  $L$  están hechas de cobre.

copper.



El movimiento de un fluido real es muy complejo. Para simplificar la situación, suponemos lo siguiente:

- Aunque el fluido es viscoso, su rapidez es uniforme en toda la sección transversal.
- La rapidez del fluido es siempre proporcional a la fuerza externa neta que actúa sobre él.
- El fluido es incompresible.

Estas paredes se cortocircuitan eléctricamente por el exterior y se aplica un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , dirigido verticalmente hacia arriba, solo en este tramo. El montaje se muestra en la figura anterior, junto con los vectores unitarios  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  que se utilizarán en la solución.

- Determine la fuerza que actúa sobre el fluido debida al campo magnético (en función de  $L$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $w$ ,  $\rho$  y la velocidad  $v$ ) [2.0 pts]
- Deduzca una expresión para la nueva rapidez  $v$  del fluido (en función de  $v_0$ ,  $P$ ,  $L$ ,  $B$  y  $\rho$ ) después de aplicar el campo magnético. [3.0 pts]
- Deduzca una expresión para la potencia adicional que debe suministrar la turbina para aumentar la rapidez hasta su valor original  $v_0$ . Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [2.0 pts]
- Ahora se desactiva el campo magnético y se sustituye el mercurio por agua que fluye con rapidez  $v_0$ . Se envía una onda electromagnética de una sola frecuencia a lo largo del tramo de longitud  $L$ , en el sentido del flujo. El índice de refracción del agua es  $n$ , y  $v_0 \ll c$ . Deduzca una expresión para la contribución del movimiento del fluido a la diferencia de fase entre las ondas que entran y salen del tramo  $L$ . Copie su resultado en la **hoja de respuestas**. [3.0 pts]

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

- a) La fuerza magnética se opone al flujo:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

- b)

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}}.$$

- c) Una vez restablecida la rapidez  $v_0$ , la potencia adicional necesaria debido al campo magnético, respecto de la potencia original en ausencia de campo, es

$$\Delta\mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2.$$

Si, en cambio, se toma como referencia el estado de funcionamiento con rapidez reducida de (b), el aumento total de la potencia de la turbina es

$$\Delta\mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2 + Pwh(v_0 - v).$$

- d) Sea  $\omega = 2\pi f$  la frecuencia angular en el laboratorio y definamos el retraso de fase a través del tramo como  $\Phi = kL$ . A primer orden en  $v_0/c$ ,

$$\delta\Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega Lv_0}{c^2}(n^2 - 1) = -\frac{2\pi fLv_0}{c^2}(n^2 - 1).$$

Por tanto, el flujo reduce el retraso de fase. El adelanto de fase correspondiente de la onda saliente tiene la misma magnitud y signo positivo.

## Solución

### a) Fuerza magnética sobre el fluido

La velocidad del fluido y el campo magnético aplicado son

$$\mathbf{v} = v\hat{x}, \quad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\hat{y}.$$

La fuerza magnética sobre los portadores de carga en movimiento genera, por tanto, una corriente convencional a través del mercurio en la dirección  $-\hat{y}$ , entre las paredes de cobre.

Las paredes están separadas por una distancia  $w$ , por lo que la fuerza electromotriz inducida por el movimiento tiene una magnitud

$$\mathcal{E} = vBw.$$

La corriente recorre una distancia  $w$  a través del mercurio, cuya sección transversal conductora tiene un área  $Lh$ . Por tanto, su resistencia es

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

Despreciando la resistencia de las paredes de cobre y de los cables que las cortocircuitan, la corriente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

La fuerza sobre esta corriente en el mercurio es

$$\mathbf{F}_B = I(-w\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -IwB\hat{x}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

Su sentido es opuesto al de la velocidad del fluido, como cabe esperar del frenado magnético.

### b) Rapidez después de aplicar el campo magnético

Sea el área de la sección transversal del tubo

$$A = wh.$$

El aumento de presión producido por la turbina proporciona la fuerza impulsora

$$F_P = PA.$$

La proporcionalidad supuesta entre la rapidez y la fuerza impulsora aplicada equivale, para un movimiento estacionario, a una resistencia viscosa lineal  $\kappa v$ . Antes de aplicar el campo magnético,

$$PA = \kappa v_0,$$

de modo que

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

Con el campo aplicado y el mismo aumento de presión  $P$ , el balance de fuerzas en régimen estacionario es

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2A}{\rho}v = 0.$$

Sustituyendo  $\kappa$ , se obtiene

$$PA = \left( \frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2A}{\rho} \right) v.$$

Cancelando  $A$  y despejando,

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}}}.$$

El resultado tiende a  $v_0$  cuando  $B \rightarrow 0$ , y el campo siempre reduce la rapidez.

### c) Potencia adicional de la turbina

Una vez restablecida la rapidez  $v_0$ , la resistencia viscosa vuelve a su valor original,

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

La turbina también debe vencer la fuerza magnética

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0.$$

Así, el aumento de presión necesario es

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

Para un flujo incompresible, la potencia mecánica suministrada por un aumento de presión es el producto de dicho aumento por el caudal volumétrico:

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} A v.$$

Por tanto, la potencia total una vez restablecida la rapidez es

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left( P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) A v_0 = P A v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

La potencia original en ausencia de campo era  $\mathcal{P}_0 = P A v_0$ . Por consiguiente, la potencia adicional necesaria a la misma rapidez debido al frenado magnético es

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

Esta es igual a la potencia disipada por efecto Joule en el mercurio:

$$I^2 R = \left( \frac{v_0 B L h}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{L h} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2,$$

lo que verifica el balance energético.

Hay una distinción si la «potencia adicional» se mide respecto del estado de rapidez reducida de (b). En ese estado, la turbina suministra únicamente

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = P A v.$$

El aumento respecto de ese estado de funcionamiento es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 + P w h (v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}} \right). \end{aligned}$$

El segundo término corresponde al restablecimiento de la disipación viscosa original al aumentar la rapidez.

#### d) Contribución del movimiento del agua a la diferencia de fase

Consideremos constante el índice de refracción dado  $n$ , despreciando la dispersión. En el sistema de referencia en reposo con el agua, la velocidad de fase de la onda es

$$u' = \frac{c}{n}.$$

El agua se mueve en el sentido de propagación con rapidez  $v_0$ . La composición relativista de velocidades da la velocidad de fase en el laboratorio

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u'v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

Desarrollando a primer orden en  $v_0/c$ ,

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0\right) \left(1 - \frac{v_0}{nc}\right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

El coeficiente  $1 - 1/n^2$  es el coeficiente de arrastre de Fresnel.

Para una onda monocromática en el laboratorio escrita como

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

el retraso de fase entre la entrada y la salida es

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

La fuente fija la frecuencia en el laboratorio  $\omega$ .

Desarrollando el inverso de la velocidad,

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Así,

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Para el agua en reposo,

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

Restando,

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

De forma equivalente, con la longitud de onda en el vacío medida en el laboratorio  $\lambda_0 = c/f$ ,

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi L v_0}{\lambda_0 c} (n^2 - 1).$$

El signo negativo indica una reducción del retraso de fase para la propagación en el sentido del flujo. Si la diferencia de fase se define como la fase de salida menos la fase de entrada, su variación tiene el signo opuesto.

---

La solución se comprobó con la solución oficial.