

IPhO 2001

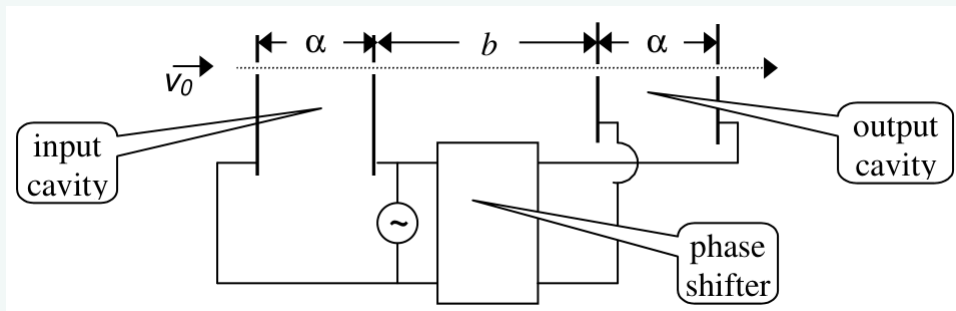
Theorieaufgaben und Lösungen · Antalya, Türkei · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/2001/

Aufgabe 1: Vier kurze Aufgaben: 1a Klystron, 1b Intermolekularer Abstand, 1c Einfacher Sägezahnsignalgenerator, 1d Atomstrahl

1a) KLYSTRON

Klystrons sind Geräte zur Verstärkung sehr hochfrequenter Signale. Ein Klystron besteht im Wesentlichen aus zwei identischen Paaren paralleler Platten (Resonatoren), die sich im Abstand b voneinander befinden, wie in der Abbildung dargestellt.



Ein Elektronenstrahl mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 durchläuft das gesamte System und tritt dabei durch kleine Löcher in den Platten. Die zu verstärkende hochfrequente Spannung wird mit einer bestimmten Phasendifferenz zwischen den beiden Plattenpaaren angelegt (wobei die Periodendauer T einer Phase von 2π entspricht) und erzeugt in den Resonatoren horizontale elektrische Wechselfelder. Elektronen, die in den Eingangsresonator eintreten, während das elektrische Feld nach rechts gerichtet ist, werden abgebremst und umgekehrt, sodass die austretenden Elektronen in einem bestimmten Abstand Pakete bilden. Wird der Ausgangsresonator an der Stelle der Paketbildung angeordnet, so nimmt das elektrische Feld in diesem Resonator Leistung aus dem Strahl auf, sofern seine Phase passend gewählt ist. Das Spannungssignal sei ein Rechtecksignal mit der Periodendauer $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s, das zwischen $V = \pm 0.5$ Volt wechselt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen beträgt $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s, und das Verhältnis von Ladung zu Masse ist $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg. Der Abstand α ist so klein, dass die Durchlaufzeit in den Resonatoren vernachlässigt werden kann. Berechnen Sie mit 4 signifikanten Stellen:

- den Abstand b , bei dem sich die Elektronen zu Paketen bündeln. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [1.5 Punkte]
- die erforderliche Phasendifferenz, die der Phasenschieber erzeugen muss. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [1.0 Punkte]

1b) INTERMOLEKULARER ABSTAND

d_L und d_V bezeichnen die mittleren Abstände zwischen Wassermolekülen in der flüssigen Phase beziehungsweise in der Dampfphase. Nehmen Sie an, dass beide Phasen bei 100°C und Atmosphärendruck vorliegen und sich der Dampf wie ein ideales Gas verhält. Berechnen Sie anhand der folgenden Daten das Verhältnis d_V/d_L und übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das

Antwortblatt. [2.5 Punkte]

Dichte von Wasser in der flüssigen Phase: $\rho_L = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,

Molare Masse von Wasser: $M = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$

Atmosphärendruck: $P_a = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Gaskonstante: $R = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

Avogadro-Konstante: $N_A = 6.0 \times 10^{23} / \text{mol}$

1c) EINFACHER SÄGEZAHNSIGNALGENERATOR

Am Kondensator C in Abb. 1 lässt sich eine Sägezahnspannung V_0 abgreifen. R ist ein veränderlicher Widerstand, V_i eine ideale Batterie und SG eine Funkenstrecke aus zwei Elektroden mit einstellbarem Abstand. Wenn die Spannung zwischen den Elektroden die Zündspannung V_f überschreitet, kommt es zu einem elektrischen Durchschlag der Luft zwischen den Elektroden. Die Funkenstrecke wird dadurch zu einem Kurzschluss und bleibt in diesem Zustand, bis die Spannung an ihr sehr klein geworden ist.

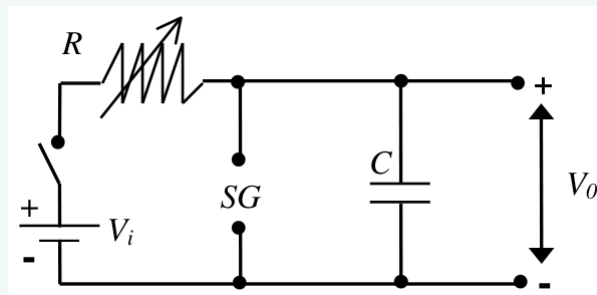


Abbildung 1

a) Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung V_0 in Abhängigkeit von t nach dem Schließen des Schalters. [0.5 Punkte]

b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit die Sägezahnspannung V_0 nahezu linear verläuft? Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt.** [0.2 Punkte]

c) Leiten Sie unter der Voraussetzung, dass diese Bedingung erfüllt ist, einen vereinfachten Ausdruck für die Periodendauer T des Signals her. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt.** [0.4 Punkte]

d) Was müssen Sie verändern (R und/oder SG), um nur die Periodendauer zu ändern? Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt.** [0.2 Punkte]

e) Was müssen Sie verändern (R und/oder SG), um nur die Amplitude zu ändern? Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt.** [0.2 Punkte]

f) Ihnen steht eine zusätzliche einstellbare Gleichspannungsquelle zur Verfügung. Entwerfen und zeichnen Sie eine neue Schaltung und kennzeichnen Sie die Anschlüsse, an denen Sie den in Abb. 2 dargestellten Spannungsverlauf V_0' erhalten würden. [1.0 Punkte]

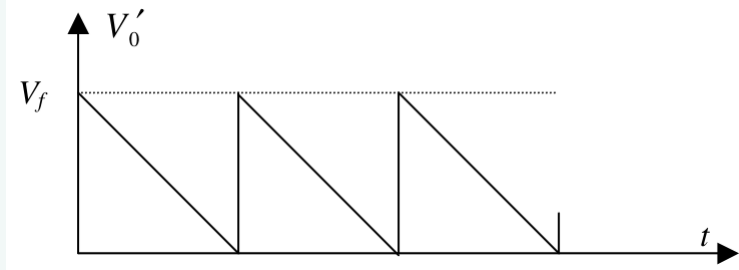
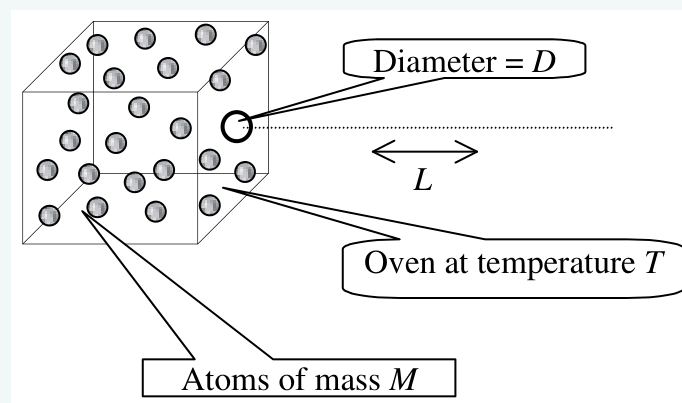


Abbildung 2

1d) ATOMSTRAHL

Ein Atomstrahl wird erzeugt, indem eine Ansammlung von Atomen auf die Temperatur T erhitzt wird und die Atome durch eine kleine Öffnung (mit atomaren Abmessungen) vom Durchmesser D in einer Seitenwand des Ofens horizontal austreten können. Schätzen Sie den Durchmesser des Strahls ab, nachdem er entlang seiner Bahn eine horizontale Strecke L zurückgelegt hat. Die Masse eines Atoms beträgt M . Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [2.5 Punkte]



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **1a(a):**

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

- **1a(b):** Das Ausgangsfeld muss dem Eingangsfeld um

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

modulo 2π **nacheilen**. Gleichwertig dazu kann es um $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$ **voreilen**. Die abbremssende Halbperiode des Ausgangsfelds muss mit dem eintreffenden Elektronenpaket zusammenfallen.

- **1b:**

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

- **1c(a):** Wiederholte, nach unten gekrümmte exponentielle Anstiege von ungefähr 0 bis V_f , gefolgt von nahezu senkrechten Abfällen auf 0. Jeder Ladeabschnitt wird beschrieben durch

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)}\right),$$

wobei τ die seit der letzten Entladung vergangene Zeit ist.

- **1c(b):**

$$V_f \ll V_i.$$

- **1c(c):**

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

- **1c(d):** Verändern Sie **nur** R und lassen Sie die Funkenstrecke unverändert.
- **1c(e):** Verändern Sie **sowohl** SG **als auch** R : Ändern Sie den Elektrodenabstand, um V_f zu ändern, und passen Sie R so an, dass in der Näherung eines linearen Anstiegs

$$RV_f = \text{konstant}$$

gilt.

- **1c(f):** Stellen Sie die zusätzliche Spannungsquelle auf V_f ein und verbinden Sie ihren Minuspol mit der ursprünglichen unteren Leitung. Messen Sie die Ausgangsspannung mit dem positiven Messanschluss am Pluspol der zusätzlichen Spannungsquelle und dem negativen Messanschluss am oberen Anschluss des Kondensators. Dann gilt

$$V'_0 = V_f - V_0,$$

wodurch eine abfallende Rampe von V_f auf 0 entsteht, gefolgt von einem abrupten Rücksprung auf V_f .

- **1d:** Mit einer repräsentativen thermischen Geschwindigkeit $v_{\text{th}} = \sqrt{3k_B T/M}$ ergibt die Abschätzung anhand der Beugung

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

Wenn somit die Beugungsaufweitung gegenüber dem Anfangsdurchmesser dominiert, gilt

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

bis auf einen Zahlenfaktor, der von der Definition der Strahlbreite abhängt.

Lösung

1a) Klystron

(a) Abstand der Paketbildung

e bezeichne den Betrag der Elektronenladung, und es sei $U = 0.5 \text{ V}$. Vernachlässigen Sie Raumladungseffekte und die Durchlaufzeit durch beide Resonatoren, wie in der Aufgabenstellung vorgesehen.

Aus der nichtrelativistischen Energieerhaltung ergeben sich die beiden möglichen Geschwindigkeiten nach dem Eingangsresonator:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

wobei v_s und v_f die langsame beziehungsweise schnelle Geschwindigkeit sind. Somit gilt

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$
$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Wählen Sie das Eingangsfeld so, dass es die Elektronen während $0 \leq t < T/2$ abbremst und während $T/2 \leq t < T$ beschleunigt.

Ein langsames Elektron, das zum Zeitpunkt t_0 eintritt, und ein schnelles Elektron, das bei $t_0 + T/2$ eintritt, erreichen den Ausgang gleichzeitig, wenn

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

Daher gilt

$$b \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

sodass

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

Bei einer Rechteckmodulation bewirkt diese Bedingung, dass sich das gesamte langsame Halbperiodenpaket hinsichtlich der Ankunftszeit mit dem nachfolgenden schnellen Halbperiodenpaket überlagert. Dies ist der erste Abstand maximaler Bündelung; das Paket hat eine endliche Dauer und ist kein augenblicklicher Impuls.

Durch Einsetzen, wobei zusätzliche Stellen bis zum letzten Rechenschritt beibehalten werden, ergibt sich

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m}.$$

Auf vier signifikante Stellen erhält man somit

$$b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

(b) Phasendifferenz

Die Flugzeiten der langsamen und schnellen Elektronen durch den Driftraum betragen

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

Das langsame Paket erreicht den Ausgang während des Zeitintervalls

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

während das nachfolgende schnelle Paket ihn in folgendem Zeitintervall erreicht:

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

Diese Intervalle stimmen überein, da $\tau_s - \tau_f = T/2$ gilt.

Um dem Strahl Energie zu entziehen, muss das elektrische Ausgangsfeld während dieser gesamten mit Elektronen besetzten Halbperiode nach rechts gerichtet sein und dadurch die Elektronen abbremsen. Sein zeitlicher Verlauf muss daher den Verlauf des Eingangsfelds um τ_s verzögert wiedergeben:

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

Nur der Nachkommaanteil von τ_s/T ist von Bedeutung:

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

Die erforderliche Phasenverzögerung des Ausgangsfelds beträgt daher

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ}.$$

Wird die Phase stattdessen als additiver Term im Argument geschrieben, $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$, entspricht dieselbe Einstellung

$$\boxed{\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}}.$$

1b) Intermolekularer Abstand

Bei einer molekularen Anzahldicke n lässt sich der charakteristische intermolekulare Abstand abschätzen, indem jedem Molekül ein Volumen d^3 zugeordnet wird:

$$d \sim n^{-1/3}.$$

Die Anzahldicke der Flüssigkeit ist

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

also gilt

$$d_L = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

Für den idealen Dampf gilt

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

und daher

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

Bei der Bildung des Verhältnisses kürzt sich die Avogadro-Konstante heraus:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

Mit $T \simeq 373 \text{ K}$ folgt

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[\frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

Entsprechend der Genauigkeit der gegebenen Daten ergibt sich somit

$$\boxed{\frac{d_V}{d_L} \simeq 12}.$$

Die zugehörigen charakteristischen Abstände betragen ungefähr

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

1c) Einfacher Sägezahnsignalgenerator

Es wird angenommen, dass der Kondensator anfangs ungeladen ist, die Restspannung nach einer Funkenentladung vernachlässigbar ist und die Entladung wesentlich weniger Zeit beansprucht als das Aufladen.

(a) Spannungsverlauf

Solange die Funkenstrecke nichtleitend ist, liefert die Kirchhoffsche Maschenregel

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

Folglich gilt

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

Ausgehend von $V_0 = 0$ lautet die Lösung für den Ladevorgang

$$\boxed{V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right)}.$$

Wenn V_0 den Wert V_f erreicht, wird die Funkenstrecke leitend und entlädt den Kondensator rasch. Anschließend wird die Funkenstrecke wieder nichtleitend, und der Ladevorgang beginnt erneut.

Die verlangte Skizze weist daher Folgendes auf:

- Einen Anfangspunkt bei $(t, V_0) = (0, 0)$.
- Einen ansteigenden, nach unten gekrümmten exponentiellen Abschnitt, der bei V_f endet.
- Einen nahezu senkrechten Abfall von V_f auf 0.
- Identische Wiederholungen in regelmäßigen Abständen.

Würde jeder Ladeabschnitt ohne Zündung fortgesetzt, würde er sich der Asymptote V_i annähern. Eine anhaltende Schwingung setzt $V_i > V_f$ voraus; andernfalls kann der Kondensator die Zündschwelle nicht in endlicher Zeit erreichen.

(b) Bedingung für einen nahezu linearen Anstieg

Die Steigung beim Aufladen beträgt

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

Sie bleibt im gesamten Bereich $0 \leq V_0 \leq V_f$ nahezu konstant, wenn

$$\boxed{V_f \ll V_i}.$$

Dann gilt

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC} \tau.$$

(c) Periodendauer

Unter Vernachlässigung der Entladedauer folgt die exakte Ladezeit bis zur Schwelle aus

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right).$$

Somit gilt

$$T = RC \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

Für $V_f/V_i \ll 1$ verwendet man $-\ln(1 - x) \simeq x$:

$$\boxed{T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}}.$$

Gleichwertig dazu muss der nahezu konstante Ladestrom V_i/R die Ladung CV_f zuführen, was zum selben Ergebnis führt.

(d) Änderung nur der Periodendauer

Die Spitzenspannung wird durch die Zündschwelle V_f der Funkenstrecke festgelegt, während die Ladezeit proportional zu R ist.

Verändern Sie daher **nur** R und lassen Sie SG unverändert. Eine Erhöhung von R verlängert die Periodendauer, ohne die Spitze-Spitze-Amplitude zu verändern.

(e) Änderung nur der Amplitude

Die Spitze-Spitze-Amplitude beträgt ungefähr V_f . Ändern Sie den Elektrodenabstand von SG , um diese Schwelle zu verändern.

Da

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

muss für eine konstante Periodendauer gelten:

$$\boxed{R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}}.$$

Somit **müssen sowohl SG als auch R angepasst werden**. Eine Erhöhung der Zündspannung erfordert beispielsweise eine entsprechende Verringerung des Widerstands.

Ohne die lineare Näherung lautet die entsprechende exakte Bedingung

$$R \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{konstant}.$$

(f) Schaltung für die abfallende Sägezahnspannung

Bezeichnen Sie die untere Leitung der ursprünglichen Schaltung als Knoten G und den oberen Anschluss des Kondensators als Knoten A . Dann gilt

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

Stellen Sie die folgenden Verbindungen her:

1. Behalten Sie die ursprüngliche Oszillatorschaltung bei.
2. Verbinden Sie den Minuspol der zusätzlichen Gleichspannungsquelle mit G .
3. Stellen Sie diese Spannungsquelle auf V_f ein und bezeichnen Sie ihren Pluspol mit B .
4. Greifen Sie die neue Ausgangsspannung zwischen B und A ab, mit **dem positiven Anschluss an B und dem negativen Anschluss an A .**

Bei einer hochohmigen Messung der Ausgangsspannung gilt

$$V'_0 = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

Während jedes nahezu linearen Ladeintervalls gilt

$$V'_0 \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

Die Ausgangsspannung beginnt somit bei V_f , fällt nahezu linear auf 0 und springt auf V_f zurück, wenn der Funke den Kondensator entlädt. Dies sind genau die in Abb. 2 dargestellten Achsenabschnitte, Steigungen und Sprünge.

1d) Atomstrahl

Die Öffnung mit atomaren Abmessungen bewirkt quantenmechanische Beugung. h sei die Plancksche Konstante und k_B die Boltzmann-Konstante.

Eine repräsentative thermische Geschwindigkeit folgt aus dem Gleichverteilungssatz:

$$\frac{1}{2} M v_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

woraus sich ergibt:

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = M v_{\text{th}} = \sqrt{3M k_B T}.$$

Hier wird die quadratisch gemittelte thermische Geschwindigkeit als repräsentative Geschwindigkeit verwendet; für eine Abschätzung muss die vollständige Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Atome nicht bestimmt werden.

Die zugehörige De-Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3M k_B T}}.$$

Für eine Öffnung der Breite D erfüllt der charakteristische Beugungshalbwinkel die Beziehung

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

Dies folgt daraus, dass eine Ablenkung um den Winkel θ über die Öffnung hinweg einen Gangunterschied der Größenordnung $D\theta$ erzeugt; merkliche Beugung tritt auf, wenn dieser Unterschied mit λ vergleichbar ist.

Für kleine Winkel vergrößert die Ausbreitung über die Strecke L den Strahlradius um ungefähr $L\theta$. Eine einfache Abschätzung des Durchmessers lautet daher

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

oder

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_BT}}.$$

Der anfängliche Öffnungsdurchmesser ist von Bedeutung, wenn die Aufweitung gering ist. Wenn die Beugung dominiert, gilt

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_BT}}$$

bis auf Zahlenfaktoren der Größenordnung eins.

Für eine konkretere Definition liegt das erste Beugungsminimum einer idealen kreisförmigen Öffnung bei $\theta \simeq 1.22\lambda/D$. Der Durchmesser ihres zentralen Beugungsscheibchens im Fernfeld wäre daher

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_BT}}.$$

Die Kleinwinkelabschätzungen setzen $\lambda/D \ll 1$ voraus. Ist dieses Verhältnis nicht klein, divergiert die austretende Welle stark.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Doppelsternsystem

a) Es ist allgemein bekannt, dass die meisten Sterne Doppelsternsysteme bilden. Eine Art von Doppelsternsystem besteht aus einem gewöhnlichen Stern mit der Masse m_0 und dem Radius R und einem massereicheren, kompakten Neutronenstern mit der Masse M , die einander umkreisen. Vernachlässigen Sie im gesamten Folgenden die Bewegung der Erde. Beobachtungen eines solchen Doppelsternsystems liefern die folgenden Informationen:

- Die maximale Winkelverschiebung des gewöhnlichen Sterns beträgt $\Delta\theta$, die des Neutronensterns hingegen $\Delta\phi$ (siehe Abb. 1).
- Die Zeit, die für diese maximalen Verschiebungen benötigt wird, beträgt τ .
- Die Strahlungseigenschaften des gewöhnlichen Sterns zeigen, dass seine Oberflächentemperatur T beträgt und dass die pro Zeiteinheit auf eine Flächeneinheit der Erdoberfläche auftreffende Strahlungsenergie P beträgt.
- Die Calciumlinie in dieser Strahlung weicht von ihrer normalen Wellenlänge λ_0 um den Betrag $\Delta\lambda$ ab, und zwar ausschließlich aufgrund des Gravitationsfeldes des gewöhnlichen Sterns. (Für diese Berechnung kann dem Photon eine effektive Masse von $h/c\lambda$ zugeschrieben werden.)

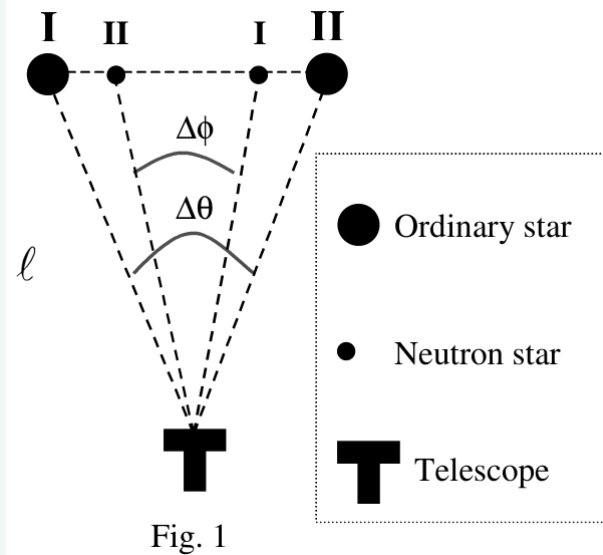


Abb. 1

Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Entfernung ℓ von der Erde zu diesem System, der ausschließlich die beobachteten Größen und universelle Konstanten enthält. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [7 Punkte]

b) Nehmen Sie an, dass $M \gg m_0$ gilt, sodass der gewöhnliche Stern im Wesentlichen den Neutronenstern auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 umkreist. Nehmen Sie an, dass der gewöhnliche Stern beginnt, Gas mit einer Geschwindigkeit v_0 relativ zum gewöhnlichen Stern in Richtung des Neutronensterns auszustoßen (siehe Abb. 2). Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Gravitationskraft des Neutronensterns in dieser Aufgabe dominiert, und unter Vernachlässigung der Bahnänderungen des gewöhnlichen Sterns den in Abb. 2 dargestellten kleinsten Abstand r_f . Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [3 Punkte]

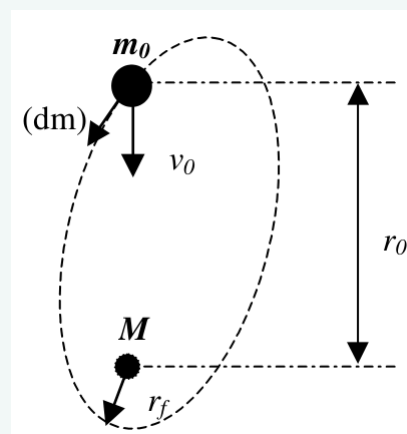


Abb. 2

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) Mit den Winkelverschiebungen im Bogenmaß gilt

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

wobei σ die Stefan–Boltzmann-Konstante ist. Die zugrunde gelegte Interpretation der Bahn wird weiter unten erläutert.

- b)

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

Lösung

a)

Wir verwenden die Newtonsche Bahndynamik, die Kleinwinkelnäherung, die Schwarzkörperstrahlung des gewöhnlichen Sterns und die gravitative Rotverschiebung im schwachen Feld. Die Abmessungen des Systems sind gegenüber seiner Entfernung von der Erde vernachlässigbar.

Wir interpretieren Abb. 1 als eine kreisförmige Doppelsternbahn, deren beobachtete Winkelverschiebungen sich zwischen gegenüberliegenden Extrempositionen erstrecken. Somit ist τ die Hälfte der Umlaufzeit:

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

Es seien a_0 und a_N die Bahnradien des gewöhnlichen Sterns beziehungsweise des Neutronensterns um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Da die Winkelverschiebungen den vollen Durchmessern entsprechen, gilt

$$a_0 = \frac{\ell\Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell\Delta\phi}{2}.$$

Der Abstand zwischen den Sternen beträgt daher

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

Aus der Schwerpunktbeziehung folgt

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

Das dritte Keplersche Gesetz für die Relativbahn lautet

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

Durch Kombination dieser Gleichungen erhalten wir

$$Gm_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

Als Nächstes betrachten wir die Leuchtkraft des gewöhnlichen Sterns:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Unter der Annahme isotroper Abstrahlung und vernachlässigbarer Absorption zwischen dem Stern und der Erde gilt

$$P = \frac{L}{4\pi \ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

also

$$R = \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Schließlich betrachten wir den gravitativen Energieverlust des Photons. Seine Energie bei der Emission und seine näherungsweise effektive Masse sind

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

Auf dem Weg von der Sternoberfläche zur Erde, die im Vergleich zu R praktisch im Unendlichen liegt, verliert es die Energie

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

Folglich gilt

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

Für $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ gilt

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Damit ergibt sich aus der positiven gravitativen Rotverschiebung

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (3) und Kürzen eines Faktors ℓ erhalten wir

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi (\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

Ziehen der positiven Quadratwurzel ergibt

$$\ell = \frac{2\sqrt{2} c \tau}{\pi (\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}.$$

Die Gravitationskonstante kürzt sich heraus, weil sowohl die Bahndynamik als auch die Rotverschiebung Gm_0 bestimmen. Alle Faktoren außer $c\tau$ sind dimensionslos.

b)

Da $M \gg m_0$ gilt, betrachten wir den Neutronenstern als ruhend. Die Geschwindigkeit des gewöhnlichen Sterns auf seiner Kreisbahn folgt aus

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

Ein Gaselement übernimmt diese Tangentialgeschwindigkeit und erhält zusätzlich eine nach innen gerichtete Radialgeschwindigkeit v_0 . Seine anfänglichen Geschwindigkeitskomponenten sind daher

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

Unter Vernachlässigung der Gravitation des gewöhnlichen Sterns bewegt sich das Gas im zentralen Gravitationsfeld des Neutronensterns. Sein spezifischer Drehimpuls j und seine spezifische mechanische Energie ε bleiben erhalten:

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

Am Punkt der größten Annäherung verschwindet die Radialgeschwindigkeit. Ist die Tangentialgeschwindigkeit dort v_f , so ergibt die Drehimpulserhaltung

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

Aus der Energieerhaltung folgt dann

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

Umformen ergibt

$$v_0^2 = v_c^2 \left(\frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

Das Gas bewegt sich anfangs nach innen, sodass für seinen kleinsten Abstand $r_f \leq r_0$ gilt. Wir wählen daher

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

woraus folgt

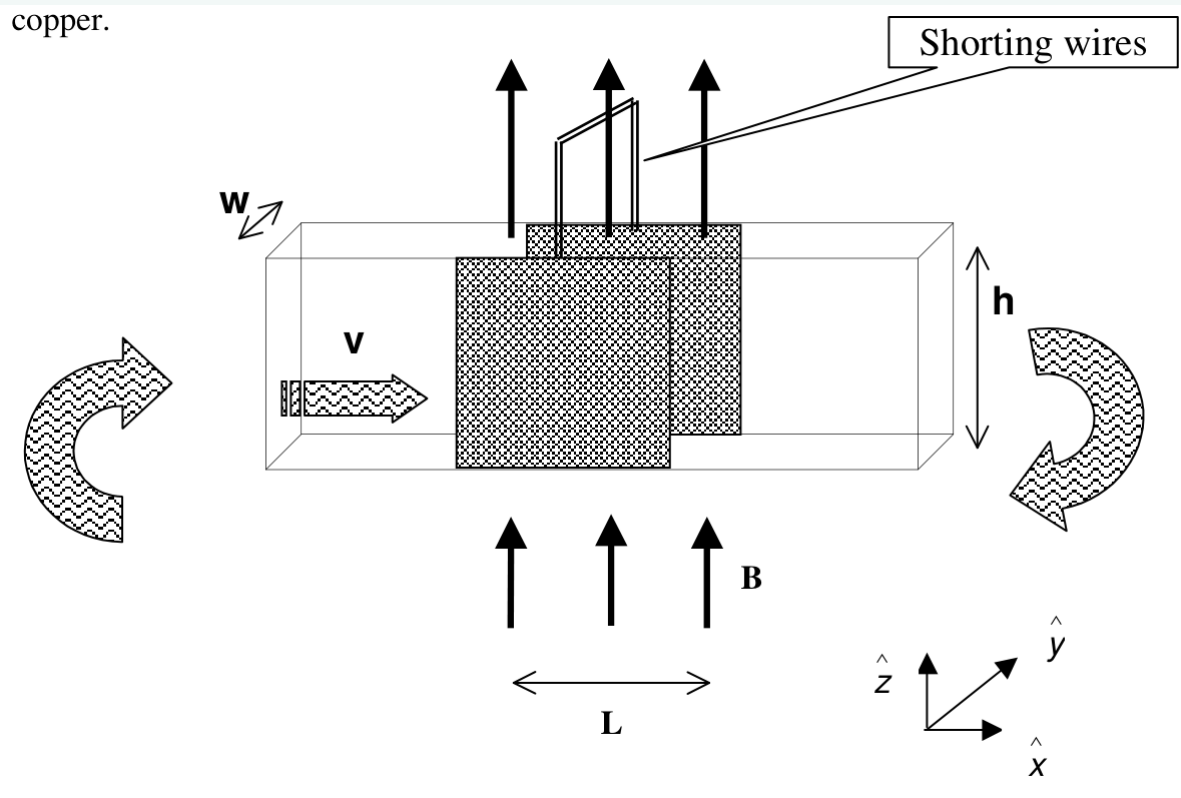
$$\boxed{r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

Für $v_0 = 0$ ergibt sich damit wie erwartet die ursprüngliche Kreisbahn, $r_f = r_0$. Die Bahn des Gases ist für $v_0 < v_c$ wie dargestellt elliptisch, für $v_0 = v_c$ parabolisch und für $v_0 > v_c$ hyperbolisch; die Formel für den kleinsten Abstand gilt in allen drei Fällen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Magnetohydrodynamischer (MHD) Generator

Ein horizontal verlaufendes, in sich geschlossenes Kunststoffrohr mit rechteckigem Querschnitt der Breite w und der Höhe h ist mit Quecksilber mit dem spezifischen elektrischen Widerstand ρ gefüllt. Eine Turbine erzeugt einen Überdruck P , der diese Flüssigkeit mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 antreibt. Die beiden gegenüberliegenden vertikalen Wände eines Rohrabschnitts der Länge L bestehen aus Kupfer.



Die Bewegung einer realen Flüssigkeit ist sehr komplex. Zur Vereinfachung nehmen wir Folgendes an:

- Obwohl die Flüssigkeit viskos ist, ist ihre Geschwindigkeit über den gesamten Querschnitt gleichförmig.
- Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist stets proportional zur resultierenden äußeren Kraft, die auf sie wirkt.
- Die Flüssigkeit ist inkompressibel.

Diese Wände werden außen elektrisch kurzgeschlossen, und nur in diesem Abschnitt wird ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}$ angelegt, das senkrecht nach oben gerichtet ist. Die Anordnung ist in der obigen Abbildung dargestellt, zusammen mit den Einheitsvektoren $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, die in der Lösung zu verwenden sind.

a) Bestimmen Sie die Kraft, die aufgrund des Magnetfelds auf die Flüssigkeit wirkt (in Abhängigkeit von L , B , h , w , ρ und der Geschwindigkeit v). [2.0 Punkte]

b) Leiten Sie einen Ausdruck für die neue Geschwindigkeit v der Flüssigkeit nach dem Anlegen des Magnetfelds her (in Abhängigkeit von v_0 , P , L , B und ρ). [3.0 Punkte]

c) Leiten Sie einen Ausdruck für die zusätzliche Leistung her, welche die Turbine aufbringen muss, um die Geschwindigkeit auf ihren ursprünglichen Wert v_0 zu erhöhen. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [2.0 Punkte]

d) Nun wird das Magnetfeld abgeschaltet und das Quecksilber durch Wasser ersetzt, das mit der Geschwindigkeit v_0 strömt. Eine elektromagnetische Welle mit einer einzigen Frequenz wird entlang des Abschnitts der Länge L in Strömungsrichtung ausgesandt. Der Brechungsindex von Wasser ist n , und es gilt $v_0 \ll c$. Leiten Sie einen Ausdruck für den Beitrag der Flüssigkeitsbewegung zur Phasendifferenz zwischen den in den Abschnitt L eintretenden und aus ihm austretenden Wellen her. Übertragen Sie Ihr Ergebnis auf das **Antwortblatt**. [3.0 Punkte]

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** Die magnetische Kraft wirkt der Strömung entgegen:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

- **b)**

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}}.$$

- **c)** Bei der wiederhergestellten Geschwindigkeit v_0 beträgt die aufgrund des Magnetfelds zusätzlich zur ursprünglichen Leistung ohne Magnetfeld benötigte Leistung

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2.$$

Wird stattdessen der verlangsamte Betriebszustand aus (b) als Bezug gewählt, beträgt die gesamte Erhöhung der Turbinenleistung

$$\Delta \mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2hw}{\rho} v_0^2 + Pwh(v_0 - v).$$

- **d)** Es sei $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz im Laborsystem, und die Phasenverzögerung über den Abschnitt sei als $\Phi = kL$ definiert. In erster Ordnung in v_0/c gilt

$$\delta\Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega Lv_0}{c^2}(n^2 - 1) = -\frac{2\pi fLv_0}{c^2}(n^2 - 1).$$

Die Strömung verringert somit die Phasenverzögerung. Der entsprechende Phasenvorlauf der austretenden Welle hat denselben Betrag und ein positives Vorzeichen.

Lösung

a) Magnetische Kraft auf die Flüssigkeit

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und das angelegte Magnetfeld sind

$$\mathbf{v} = v\hat{x}, \quad \mathbf{B} = B\hat{z}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\hat{y}.$$

Die magnetische Kraft auf die bewegten Ladungsträger treibt daher einen Strom in technischer Stromrichtung durch das Quecksilber zwischen den Kupferwänden in $-\hat{y}$ -Richtung.

Der Abstand zwischen den Wänden beträgt w , sodass die elektromotorische Kraft der Bewegungsinduktion den Betrag

$$\mathcal{E} = vBw$$

hat. Der Strom durchläuft im Quecksilber eine Strecke w bei einer leitenden Querschnittsfläche Lh . Der elektrische Widerstand beträgt daher

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

Vernachlässigt man den Widerstand der Kupferwände und der Kurzschlussdrähte, so beträgt die Stromstärke

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

Die Kraft auf diesen Strom im Quecksilber ist

$$\mathbf{F}_B = I(-w\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -IwB\hat{x}.$$

Damit folgt

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

Sie ist der Geschwindigkeit der Flüssigkeit entgegengerichtet, wie bei einer magnetischen Bremswirkung zu erwarten ist.

b) Geschwindigkeit nach dem Anlegen des Magnetfelds

Die Querschnittsfläche des Rohrs sei

$$A = wh.$$

Die von der Turbine erzeugte Druckerhöhung liefert die antreibende Kraft

$$F_P = PA.$$

Die angenommene Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und angelegter Antriebskraft ist bei stationärer Bewegung gleichbedeutend mit einer linearen viskosen Widerstandskraft κv . Vor dem Anlegen des Magnetfelds gilt

$$PA = \kappa v_0,$$

also

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

Bei angelegtem Magnetfeld und derselben Druckerhöhung P lautet das stationäre Kräftegleichgewicht

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2 A}{\rho} v = 0.$$

Einsetzen von κ ergibt

$$PA = \left(\frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2 A}{\rho} \right) v.$$

Nach Kürzen von A und Auflösen folgt

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

Für $B \rightarrow 0$ nähert sich das Ergebnis v_0 , und das Magnetfeld verringert die Geschwindigkeit stets.

c) Zusätzliche Turbinenleistung

Bei der wiederhergestellten Geschwindigkeit v_0 nimmt die viskose Widerstandskraft wieder ihren ursprünglichen Wert an:

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

Die Turbine muss außerdem die magnetische Kraft

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0$$

überwinden. Die erforderliche Druckerhöhung beträgt somit

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

Bei einer inkompressiblen Strömung ist die durch eine Druckerhöhung zugeführte mechanische Leistung gleich dem Produkt aus Druckerhöhung und Volumenstrom:

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} Av.$$

Daher beträgt die Gesamtleistung bei der wiederhergestellten Geschwindigkeit

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left(P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) Av_0 = PA v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

Die ursprüngliche Leistung ohne Magnetfeld war $\mathcal{P}_0 = PA v_0$. Die bei derselben Geschwindigkeit aufgrund der magnetischen Bremswirkung zusätzlich benötigte Leistung beträgt folglich

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

Dies entspricht der jouleschen Wärmeleistung im Quecksilber:

$$I^2 R = \left(\frac{v_0 B L h}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{L h} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2,$$

womit die Energiebilanz bestätigt wird.

Eine Unterscheidung ist erforderlich, wenn die „zusätzliche Leistung“ vom verlangsamten Zustand aus (b) ausgehend gemessen wird. In diesem Zustand liefert die Turbine lediglich

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = PAv.$$

Die Erhöhung gegenüber diesem Betriebszustand beträgt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 + Pwh(v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}} \right). \end{aligned}$$

Der zweite Term berücksichtigt, dass mit zunehmender Geschwindigkeit die ursprüngliche viskose Dissipationsleistung wiederhergestellt wird.

d) Beitrag der Wasserbewegung zur Phasendifferenz

Der angegebene Brechungsindex n wird unter Vernachlässigung der Dispersion als konstant betrachtet. Im Ruhesystem des Wassers beträgt die Phasengeschwindigkeit der Welle

$$u' = \frac{c}{n}.$$

Das Wasser bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0 in Ausbreitungsrichtung. Die relativistische Geschwindigkeitsaddition liefert für die Phasengeschwindigkeit im Laborsystem

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u'v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

Eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in v_0/c ergibt

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Der Koeffizient $1 - 1/n^2$ ist der Fresnelsche Mitführungskoeffizient.

Für eine im Laborsystem monochromatische Welle, die als

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

geschrieben wird, beträgt die Phasenverzögerung vom Eintritt zum Austritt

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

Die Quelle legt die Frequenz ω im Laborsystem fest.

Die Entwicklung der reziproken Geschwindigkeit ergibt

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Damit gilt

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Für ruhendes Wasser gilt

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

Durch Subtraktion folgt

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

Äquivalent ergibt sich mit der Vakuumwellenlänge im Laborsystem $\lambda_0 = c/f$

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi L v_0}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

Das negative Vorzeichen bezeichnet eine Verringerung der Phasenverzögerung bei Ausbreitung in Strömungsrichtung. Wird die Phasendifferenz als Austrittsphase minus Eintrittsphase definiert, hat ihre Änderung das entgegengesetzte Vorzeichen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.