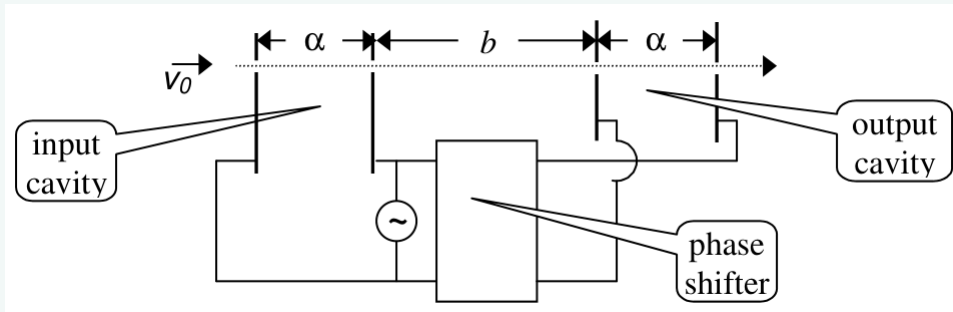


المسألة 1: أربع مسائل قصيرة: 1a الكليسترون، 1b المسافة بين الجزيئات، 1c مولد بسيط لإشارة سنّ المنشار، 1d حزمة ذرية

1a الكليسترون

الكليسترونات أجهزة تُستخدم لتضخيم الإشارات ذات التردد العالي جداً. يتكوّن الكليسترون أساساً من زوجين متماثلين من الصفائح المتوازية (تجويفين)، تفصل بينهما مسافة b ، كما هو موضح في الشكل.



تعبّر حزمة إلكترونات ذات سرعة ابتدائية v_0 المنظومة بأكملها، مارّةً عبر ثقب صغير في الصفائح. يُطبّق الجهد عالي التردد المراد تضخيمه على كلا زوجي الصفائح، مع فرق طور معيّن بينهما (حيث يقابل الزمن الدوري T طوراً مقداره 2π)، فينشأ مجالان كهربائيان أفقيان متناوبان في التجويفين. تتباطأ الإلكترونات التي تدخل تجويف الدخل عندما يكون المجال الكهربائي متجهاً إلى اليمين، والعكس صحيح، فتتشكّل الإلكترونات الخارجة حزمةً متجمّعة على مسافة معيّنة. إذا وُضع تجويف الخرج عند موضع التجمّع، فإن المجال الكهربائي في هذا التجويف يمتص قدرة من الحزمة، بشرط اختيار طوره على نحو مناسب. لتكن إشارة الجهد موجة مربعة ذات زمن دوري $T = 1.0 \times 10^{-9}$ s، تتغير بين $V = \pm 0.5$ فولت. السرعة الابتدائية للإلكترونات هي $v_0 = 2.0 \times 10^6$ m/s، ونسبة الشحنة إلى الكتلة هي $e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg. المسافة α صغيرة إلى حدّ يمكن معه إهمال زمن العبور في التجويفين. احسب ما يلي مع الاحتفاظ بأربعة أرقام معنوية:

(a) المسافة b التي تتجمّع عندها الإلكترونات. انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [1.5 درجة]

(b) فرق الطور اللازم الذي يجب أن يوفره مُزيح الطور. انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [1.0 درجة]

1b المسافة بين الجزيئات

ليرمز d_V و d_L إلى متوسط المسافة بين جزيئات الماء في الطور السائل وفي الطور البخاري، على الترتيب. افترض أن كلا الطورين عند 100°C والضغط الجوي، وأن البخار يسلك سلوك الغاز المثالي. باستخدام البيانات التالية، احسب النسبة d_V/d_L ، وانقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [2.5 درجة]

كثافة الماء في الطور السائل: $\rho_L = 1.0 \times 10^3$ kg/m³

الكتلة المولية للماء: $M = 1.8 \times 10^{-2}$ kg/mol

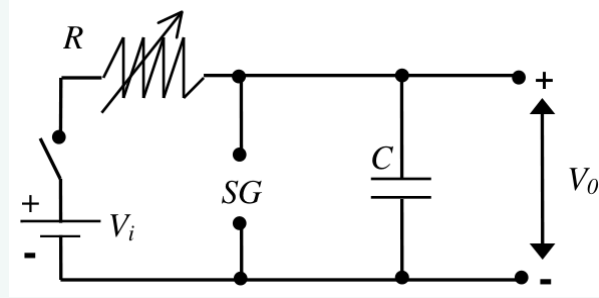
الضغط الجوي: $P_a = 1.0 \times 10^5$ N/m²

ثابت الغازات: $R = 8.3$ J/(mol K)

عدد أفوغادرو: $N_A = 6.0 \times 10^{23}$ mol/

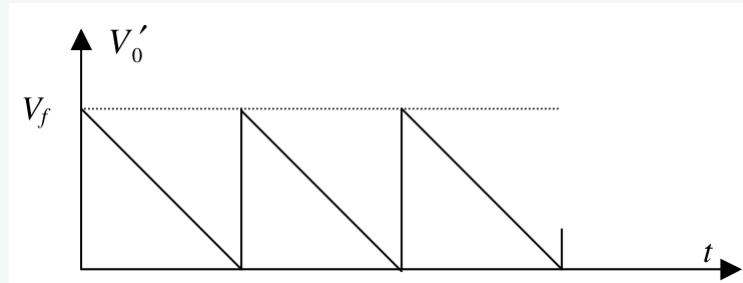
1c) مولّد بسيط لإشارة سنّ المنشار

يمكن الحصول على موجة جهد ذات شكل سنّ المنشار V_0 بين طرفي المكثف C في الشكل 1. يمثل R مقاومة متغيرة، و V_i بطارية مثالية، و SG فجوة شرارية تتكوّن من قطبين يمكن ضبط المسافة بينهما. عندما يتجاوز الجهد بين القطبين جهد القذح V_f ، يحدث انهيار كهربائي للهواء بينهما، فتصبح الفجوة دارة قصر، وتبقى كذلك حتى يصبح الجهد بين طرفيها صغيراً جداً.



الشكل 1

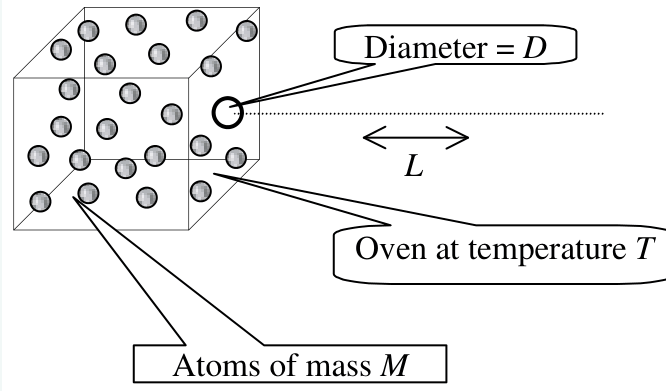
- ارسم موجة الجهد V_0 بدلالة الزمن t ، بعد إغلاق المفتاح. [0.5 درجة]
- ما الشرط الذي يجب أن يتحقّق للحصول على موجة جهد ذات شكل سنّ المنشار V_0 تتغيّر بصورة شبه خطية؟ انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [0.2 درجة]
- بافتراض تحقّق هذا الشرط، اشتق تعبيراً مبسطاً للزمن الدوري T للموجة. انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [0.4 درجة]
- ما الذي ينبغي تغييره (R و/أو SG) لتغيير الزمن الدوري فقط؟ انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [0.2 درجة]
- ما الذي ينبغي تغييره (R و/أو SG) لتغيير السعة فقط؟ انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [0.2 درجة]
- أعطيت مصدر جهد مستمر إضافياً قابلاً للضبط. صمّم دارة جديدة وارسمها، موضّحاً الطرفين اللذين تحصل بينهما على موجة الجهد V'_0 المبينة في الشكل 2. [1.0 درجة]



الشكل 2

1d) حزمة ذرية

- تُحصّر حزمة ذرية بتسخين مجموعة من الذرات إلى درجة حرارة T ، والسماح لها بالخروج أفقيّاً عبر ثقب صغير (ذي أبعاد ذرية) قطره D في أحد جوانب الفرن. قدّر قطر الحزمة بعد أن تقطع طولاً أفقيّاً L على امتداد مسارها. كتلة الذرة هي M . انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [2.5 درجة]



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• 1a(a):

$$b = 2.270 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.$$

• 1a(b): يجب أن يتأخر مجال الخرج عن مجال الدخل بمقدار

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ$$

بترديد 2π . وبصورة مكافئة، يمكن أن يتقدم عليه بمقدار $2.462 \text{ rad} = 141.1^\circ$. يجب أن يتزامن نصف دورة الخرج الذي يبطئ الإلكترونات مع وصول الحزمة المتجمعة.

• 1b:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L R T}{P_a M} \right)^{1/3} \simeq 12.$$

• 1c(a): ارتفاعات أسية متكررة مقعرة إلى الأسفل، من نحو 0 إلى V_f ، تعقبها انخفاضات شبه رأسية إلى 0. يُعطى كل مقطع شحن بالعلاقة

$$V_0 = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right),$$

حيث τ هو الزمن المنقضي منذ آخر تفريغ.

• 1c(b):

$$V_f \ll V_i.$$

• 1c(c):

$$T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}.$$

• 1c(d): غير R فقط، مع إبقاء الفجوة الشرارية ثابتة.

• 1c(e): غير كلاً من SG و R : غير الفجوة لتغيير V_f ، واضبط R بحيث

$$RV_f = \text{ثابت}$$

في تقريب الارتفاع الخطي.

- **1c(f)**: اضبط المصدر الإضافي على V_f ، مع توصيل طرفه السالب بالموصل السفلي الأصلي. قس جهد الخرج بحيث يكون طرف القياس الموجب عند الطرف الموجب للمصدر الإضافي، وطرف القياس السالب عند الطرف العلوي للمكثف. عندئذٍ

$$V_0' = V_f - V_0,$$

وهو ما يعطي انخفاضاً تدريجياً من V_f إلى 0، تعقبه عودة مفاجئة إلى V_f .

- **1d**: باستخدام سرعة حرارية تمثيلية $v_{th} = \sqrt{3k_B T/M}$ ، يكون التقدير الناشئ عن الحيود

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

ومن ثم، عندما يكون الاتساع الناتج عن الحيود أكبر بكثير من القطر الابتدائي،

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}},$$

إلى عامل عددي يتوقف على الاصطلاح المتبع لتعريف عرض الحزمة.

الحل

(1a) الكليسترون

(a) مسافة التجمّع

ليرمز e إلى مقدار شحنة الإلكترون، ولتكن $U = 0.5 \text{ V}$. نهمل تأثيرات الشحنة الفراغية وزمن العبور عبر أيٍّ من التجويفين، كما هو مقصود في المسألة.

يعطي انحفاظ الطاقة في التقريب غير النسبي السرعتين الممكنتين بعد تجويف الدخل:

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU, \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + eU,$$

حيث v_s و v_f هما السرعة البطيئة والسرعة السريعة. ومن ثم

$$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)U} = 1.955505 \dots \times 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)U} = 2.043526 \dots \times 10^6 \text{ m/s}.$$

نختار مجال الدخل بحيث يبطل الإلكترونات خلال $0 \leq t < T/2$ ، ويسرعها خلال $T/2 \leq t < T$.

يصل إلكترون بطيء يدخل عند الزمن t_0 ، وإلكترون سريع يدخل عند $t_0 + T/2$ ، إلى الخرج معاً عندما

$$t_0 + \frac{b}{v_s} = t_0 + \frac{T}{2} + \frac{b}{v_f}.$$

لذلك،

$$b \left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f} \right) = \frac{T}{2},$$

ومن ثم

$$b = \frac{T v_s v_f}{2(v_f - v_s)}.$$

عند التعديل بموجة مربعة، يجعل هذا الشرط رزمة الإلكترونات البطيئة الخاصة بنصف دورة كامل تتراكب زمنياً عند الوصول مع رزمة الإلكترونات السريعة الخاصة بنصف الدورة التالي. وهذه أول مسافة يبلغ عندها التجمع أقصاه؛ وتكون للحزمة المتجمعة مدة زمنية محدودة، ولا تكون نبضة لحظية.

بالتعويض، مع الاحتفاظ بأرقام إضافية حتى الخطوة الأخيرة، نحصل على

$$b = 0.022699764 \dots \text{ m.}$$

إذن، إلى أربعة أرقام معنوية،

$$\boxed{b = 0.02270 \text{ m} = 2.270 \text{ cm}.}$$

(b) فرق الطور

زمنًا طيران الإلكترونات البطيئة والسريعة عبر منطقة الانجراف هما

$$\tau_s = \frac{b}{v_s} = 11.6081337 \dots T, \quad \tau_f = \frac{b}{v_f} = 11.1081337 \dots T.$$

تصل الرزمة البطيئة إلى الخرج خلال الفترة

$$[\tau_s, \tau_s + T/2),$$

بينما تصل إليه الرزمة السريعة التالية خلال الفترة

$$[T/2 + \tau_f, T + \tau_f).$$

تتطابق هاتان الفترتان لأن $T/2 - \tau_f = \tau_s$.

لاستخلاص الطاقة من الحزمة، يجب أن يتجه المجال الكهربائي للخروج إلى اليمين طوال نصف الدورة الذي توجد فيه الإلكترونات، فيبسطها بذلك. لذا يجب أن يعيد شكله الموجي إنتاج الشكل الموجي للدخل، متأخرًا عنه بمقدار τ_s :

$$E_{\text{out}}(t) = E_{\text{in}}(t - \tau_s).$$

لا يهم سوى الجزء الكسري من τ_s/T :

$$\frac{\tau_s \bmod T}{T} = 0.6081337 \dots$$

وعليه، فإن تأخر طور الخرج المطلوب هو

$$\Delta\phi_{\text{lag}} = 2\pi(0.6081337 \dots) = 3.8210167 \dots \text{ rad.}$$

ومن ثم

$$\boxed{\Delta\phi_{\text{lag}} = 3.821 \text{ rad} = 218.9^\circ.}$$

إذا كُتب الطور بدلاً من ذلك حدًا مضافًا في حجة الدالة، $E_{\text{out}} \propto s(\omega t + \phi)$ ، فإن الضبط نفسه يُكتب

$$\boxed{\phi = -3.821 \text{ rad} \equiv 2.462 \text{ rad} \pmod{2\pi}.}$$

(1b) المسافة بين الجزيئات

عندما تكون الكثافة العددية للجزيئات n ، تُقدر المسافة المميزة بين الجزيئات بتخصيص حجم d^3 لكل جزيء:

$$d \sim n^{-1/3}.$$

الكثافة العددية للسائل هي

$$n_L = \frac{\rho_L N_A}{M},$$

ومن ثم

$$d_L = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{1/3}.$$

للبخار المثالي،

$$P_a V = \frac{N}{N_A} RT,$$

ولذلك

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P_a N_A}{RT}, \quad d_V = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{1/3}.$$

بأخذ النسبة يُختزل عدد أفوغادرو:

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{\rho_L RT}{P_a M} \right)^{1/3}.$$

باستخدام $T \simeq 373 \text{ K}$,

$$\frac{d_V}{d_L} = \left[\frac{(1.0 \times 10^3)(8.3)(373)}{(1.0 \times 10^5)(1.8 \times 10^{-2})} \right]^{1/3} = 11.9813 \dots$$

إذن، بما يتسق مع البيانات المعطاة،

$$\boxed{\frac{d_V}{d_L} \simeq 12}.$$

والمسافتان المميزتان المقابلتان تساويان تقريباً

$$d_L = 3.1 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad d_V = 3.7 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

1c) مولّد بسيط لإشارة سنّ المنشار

نفترض أن المكثف غير مشحون في البداية، وأن الجهد المتبقي بعد الشرارة مهمل، وأن التفريغ يستغرق زمناً أقصر بكثير من زمن الشحن.

(a) شكل موجة الجهد

عندما تكون الفجوة الشرارية غير موصلة، يعطي قانون كيرشوف للجهد

$$V_i = IR + V_0, \quad I = C \frac{dV_0}{dt}.$$

وبالتالي،

$$RC \frac{dV_0}{dt} = V_i - V_0.$$

بدءاً من $V_0 = 0$ ، يكون حلّ معادلة الشحن

$$\boxed{V_0(\tau) = V_i \left(1 - e^{-\tau/(RC)} \right)}.$$

عندما يبلغ V_0 القيمة V_f ، تصبح الفجوة الشرارية موصلة وتفرغ المكثف بسرعة. ثم تصبح الفجوة غير موصلة، ويبدأ الشحن من جديد.

لذلك يتضمّن الرسم المطلوب ما يلي:

- نقطة ابتدائية عند $(t, V_0) = (0, 0)$.
- مقطعاً أسياً صاعداً مقعراً إلى الأسفل، ينتهي عند V_f .
- انخفاضاً شبه رأسي من V_f إلى 0.
- تكرارات متماثلة على فترات منتظمة.

لو استمر كل مقطع شحن دون قرح، لاقترب من خط التقارب V_i . يتطلّب استمرار التذبذب أن يكون $V_i > V_f$ ؛ وإلا فلن يستطيع المكثف بلوغ عتبة القرح في زمن محدود.

(b) شرط الارتفاع شبه الخطي

ميل منحنى الشحن هو

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{V_i - V_0}{RC}.$$

ويظل شبه ثابت طوال المجال $0 \leq V_0 \leq V_f$ إذا كان

$$\boxed{V_f \ll V_i}.$$

عندئذٍ

$$\frac{dV_0}{dt} \simeq \frac{V_i}{RC}, \quad V_0(\tau) \simeq \frac{V_i}{RC}\tau.$$

(c) الزمن الدوري

بإهمال مدة التفريغ، يُستنتج زمن الشحن الدقيق حتى العتبة من

$$V_f = V_i \left(1 - e^{-T/(RC)}\right).$$

ومن ثم،

$$T = RC \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right).$$

عندما يكون $V_f/V_i \ll 1$ ، نستخدم $-\ln(1-x) \simeq x$:

$$\boxed{T \simeq RC \frac{V_f}{V_i}}.$$

وبصورة مكافئة، يجب أن ينقل تيار الشحن شبه الثابت V_i/R الشحنة CV_f ، فنحصل على النتيجة نفسها.

(d) تغيير الزمن الدوري فقط

تحدد عتبة الفجوة الشرارية V_f جهد القمة، بينما يتناسب زمن الشحن طردياً مع R .

لذلك، غير R فقط، مع إبقاء SG ثابتة. تؤدي زيادة R إلى زيادة الزمن الدوري دون تغيير السعة من قمة إلى قمة.

(e) تغيير السعة فقط

السعة من قمة إلى قمة تساوي تقريباً V_f . غير المسافة بين قطبي SG لتغيير هذه العتبة.

بما أن

$$T \simeq \frac{C}{V_i} R V_f,$$

فإن إبقاء الزمن الدوري ثابتاً يتطلب

$$\boxed{R_{\text{new}} V_{f,\text{new}} = R_{\text{old}} V_{f,\text{old}}}.$$

إذن يجب ضبط كل من SG و R . فعلى سبيل المثال، تتطلب زيادة جهد القذح خفضاً تعويضياً في المقاومة.

دون التقريب الخطي، يكون الشرط الدقيق المقابل

$$R \ln \left(\frac{V_i}{V_i - V_f} \right) = \text{ثابت}.$$

(f) دائرة موجة سنّ المنشار الهابطة

نعرف الموصل السفلي للدائرة الأصلية بأنه العقدة G ، والطرف العلوي للمكثف بأنه العقدة A . عندئذٍ

$$V(A) - V(G) = V_0.$$

أجر التوصيلات التالية:

1. أبقِ دائرة المذبذب الأصلية.
2. صل الطرف السالب لمصدر الجهد المستمر الإضافي بالعقدة G .
3. اضبط هذا المصدر على V_f ، وسمِّ طرفه الموجب B .
4. خذ الخرج الجديد بين A و B ، بحيث يكون الطرف الموجب عند B والطرف السالب عند A .

عند قياس الخرج باستخدام أداة ذات ممانعة عالية،

$$V_0' = V(B) - V(A) = V_f - V_0.$$

خلال كل فترة شحن شبه خطية،

$$V_0' \simeq V_f - \frac{V_i}{RC} \tau = V_f \left(1 - \frac{\tau}{T}\right).$$

إذن يبدأ الخرج عند V_f ، وينخفض بصورة شبه خطية إلى 0، ثم يقفز عائداً إلى V_f عندما تفرغ الشرارة المكثف. وهذه هي بالضبط نقاط التقاطع مع المحورين، والميول، والقفزات المبيّنة في الشكل 2.

1d حزمة ذرية

تُحدث الفتحة ذات الأبعاد الذرية حيوداً كمومياً. ليكن h ثابت بلانك، و k_B ثابت بولتزمان.

تُستنتج سرعة حرارية تمثيلية من مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة:

$$\frac{1}{2} M v_{\text{th}}^2 = \frac{3}{2} k_B T,$$

فنحصل على

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{M}}, \quad p_{\text{th}} = M v_{\text{th}} = \sqrt{3Mk_B T}.$$

نستخدم هنا الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعة الحرارية بوصفه سرعة تمثيلية؛ إذ لا يتطلّب هذا التقدير تحديد التوزيع الكامل للسرعات الخارجة.

الطول الموجي المقابل لدي برولي هو

$$\lambda = \frac{h}{p_{\text{th}}} = \frac{h}{\sqrt{3Mk_B T}}.$$

لفتحة عرضها D ، يحقّق نصف زاوية الحيود المميّزة العلاقة

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D}.$$

ينتج ذلك لأن انحرافاً زاوياً مقداره θ يولّد فرقاً في المسار من رتبة $D\theta$ عبر الفتحة؛ ويحدث حيود ملحوظ عندما يكون هذا الفرق مقارباً لـ λ .

للزوايا الصغيرة، يزيد الانتشار عبر مسافة L نصف قطر الحزمة بمقدار يقارب $L\theta$. لذلك يُعطى تقدير بسيط للقطر بالعلاقة

$$d_{\text{beam}} \sim D + 2L\theta,$$

أو

$$d_{\text{beam}} \sim D + \frac{2hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

يكون لقطر الفتحة الابتدائي أثر مهم عندما يكون الاتساع صغيراً. وعندما يهيمن الحيود،

$$d_{\text{beam}} \sim \frac{hL}{D\sqrt{Mk_B T}}$$

إلى عوامل عديدة من رتبة الواحد.

إذا اعتمد اصطلاح أكثر تحديداً، فإن أول حد أدنى للحيود لفتحة دائرية مثالية يقع عند $\theta \simeq 1.22\lambda/D$. لذا يكون قطر قرصها المركزي في المجال البعيد

$$d_{\text{first minimum}} \simeq \frac{2.44hL}{D\sqrt{3Mk_B T}}.$$

تتطلب تقديرات الزوايا الصغيرة أن تكون $\lambda/D \ll 1$. وإذا لم تكن هذه النسبة صغيرة، فإن الموجة الخارجة تكون شديدة التباعد.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: نظام نجمي ثنائي

(a) من المعروف أن معظم النجوم تشكل أنظمة ثنائية. ويتكوّن أحد أنواع الأنظمة الثنائية من نجم عادي كتلته m_0 ونصف قطره R ، ونجم نيوتروني متراص أكبر كتلة، كتلته M ، يدور كل منهما حول الآخر. أهمل حركة الأرض في كل ما يأتي. تكشف أرصاد هذا النظام الثنائي عن المعلومات الآتية:

- الإزاحة الزاوية العظمى للنجم العادي هي $\Delta\theta$ ، بينما تبلغ الإزاحة الزاوية العظمى للنجم النيوتروني $\Delta\phi$ (انظر الشكل 1).
- الزمن اللازم لحدوث هاتين الإزاحتين العظميين هو τ .
- تدل خصائص إشعاع النجم العادي على أن درجة حرارة سطحه هي T ، وأن الطاقة الإشعاعية الساقطة على وحدة المساحة من سطح الأرض في وحدة الزمن هي P .
- يختلف الطول الموجي لخط الكالسيوم في هذا الإشعاع عن طوله الموجي المعتاد λ_0 بمقدار $\Delta\lambda$ ، بسبب مجال جاذبية النجم العادي وحده. (يمكن، في هذا الحساب، اعتبار أن للفوتون كتلة فعالة مقدارها $h/c\lambda$).

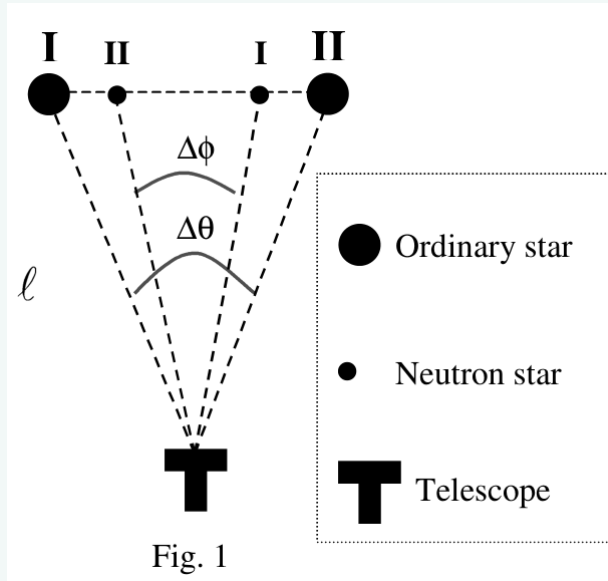
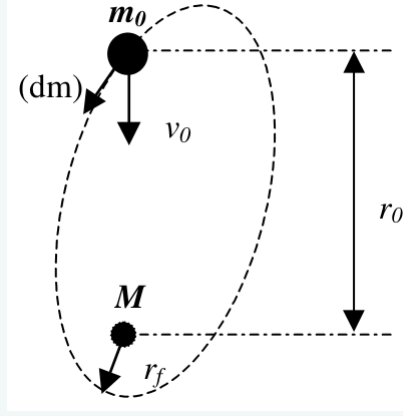


Fig. 1

الشكل 1

أوجد تعبيراً للمسافة l من الأرض إلى هذا النظام، بدلالة الكميات المرصودة والثوابت الكونية فقط. انقل نتيجتك إلى ورقة الإجابة. [7 درجات]

(b) افترض أن $M \gg m_0$ ، بحيث يكون النجم العادي في الأساس دائرياً حول النجم النيوتروني في مدار دائري نصف قطره r_0 . افترض أن النجم العادي يبدأ بقذف غاز نحو النجم النيوتروني بسرعة v_0 بالنسبة إلى النجم العادي (انظر الشكل 2). بافتراض أن جاذبية النجم النيوتروني هي القوة المهيمنة في هذه المسألة، وإهمال التغيرات في مدار النجم العادي، أوجد مسافة أقرب اقتراب r_f المبينة في الشكل 2. انقل نتيجتك إلى ورقة الإجابة. [3 درجات]



الشكل 2

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) عندما تكون الإزاحات الزاوية مقيسة بالراديان،

$$\ell = \frac{2\sqrt{2}c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0\Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}$$

حيث σ هو ثابت ستيفان-بولتزمان. ويوضح تفسير الحركة المدارية أدناه.

• (b)

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

الحل

(a)

نستخدم ديناميكا المدارات النيوتونية، وتقريب الزوايا الصغيرة، وإشعاع الجسم الأسود الصادر عن النجم العادي، والانزياح الثقالي نحو الأحمر في تقريب المجال الضعيف. أبعاد النظام مهمة مقارنةً ببعدنا عن الأرض.

نفسر الشكل 1 على أنه يمثل مدارًا دائريًا لنظام ثنائي، تمتد فيه الإزاحات الزاوية المرصودة بين موضعَي الاستطالة القصوى المتقابلين. ومن ثم فإن τ يساوي نصف الزمن الدوري المداري:

$$\mathcal{T} = 2\tau.$$

لتكن a_0 و a_N نصفَي قطر مدارَي النجم العادي والنجم النيوتروني، على الترتيب، حول مركز كتلتهما المشترك. ولأن الإزاحات الزاوية تقابل أقطارًا كاملة، فإن

$$a_0 = \frac{\ell\Delta\theta}{2}, \quad a_N = \frac{\ell\Delta\phi}{2}.$$

وعليه، فإن المسافة الفاصلة بين النجمين هي

$$a = a_0 + a_N = \frac{\ell(\Delta\theta + \Delta\phi)}{2}.$$

تعطي علاقة مركز الكتلة

$$m_0 a_0 = M a_N, \quad m_0 = (m_0 + M) \frac{a_N}{a}.$$

وقانون كبلر الثالث للمدار النسبي هو

$$G(m_0 + M) = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{T}^2}.$$

بدمج هذه المعادلات، نحصل على

$$Gm_0 = \frac{4\pi^2 a^2 a_N}{\mathcal{T}^2} = \frac{\pi^2 \ell^3}{8\tau^2} \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2. \quad (1)$$

بعد ذلك، يكون اللمعان الكلي للنجم العادي

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

بافتراض أن الانبعاث متساوي في جميع الاتجاهات وأن الامتصاص بين النجم والأرض مهمل، فإن

$$P = \frac{L}{4\pi\ell^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{\ell^2},$$

ومن ثم

$$R = \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

أخيراً، لننظر في فقدان الفوتون للطاقة بفعل الجاذبية. طاقته عند الانبعاث وكتلته الفعالة التقريبية هما

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad m_\gamma \simeq \frac{E_0}{c^2}.$$

عند انتقاله من سطح النجم إلى الأرض، التي تُعدُّ عملياً عند اللانهاية مقارنةً بـ R ، يفقد طاقة مقدارها

$$E_0 - E_{\text{obs}} \simeq \frac{Gm_0 m_\gamma}{R}.$$

وبالتالي،

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} \simeq \frac{Gm_0}{Rc^2}.$$

عندما يكون $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ، فإن

$$\frac{E_0 - E_{\text{obs}}}{E_0} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

إذن، يحدّد الانزياح الثقالي الموجب نحو الأحمر العلاقة

$$Gm_0 = c^2 R \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = c^2 \ell \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}. \quad (3)$$

بمساواة (1) و(3) واختزال عامل واحد من ℓ ، نحصل على

$$\ell^2 = \frac{8c^2 \tau^2}{\pi^2 \Delta\phi(\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2}.$$

وبأخذ الجذر التربيعي الموجب،

$$\boxed{\ell = \frac{2\sqrt{2} c \tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\phi)} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \Delta\phi} \right)^{1/2} \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/4}}.$$

يُختزل ثابت الجاذبية لأن كلاً من ديناميكا المدارات والانزياح نحو الأحمر يقيس Gm_0 . وجميع العوامل عديمة الأبعاد باستثناء $c\tau$.

(b)

بما أن $M \gg m_0$ ، نعامل النجم النيوتروني على أنه ساكن. وتُستنتج السرعة المدارية الدائرية للنجم العادي من

$$\frac{v_c^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \quad v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}.$$

يحتفظ عنصر من الغاز بهذه السرعة المماسية ويكتسب سرعة شعاعية إضافية نحو الداخل مقدارها v_0 . لذا تكون مركبتا سرعته الابتدائية

$$v_r = -v_0, \quad v_t = v_c.$$

بإهمال جاذبية النجم العادي، يتحرك الغاز في مجال الجاذبية المركزي للنجم النيوتروني. ويُحفظ زخمه الزاوي لكل وحدة كتلة j وطاقته الميكانيكية لكل وحدة كتلة ε :

$$j = r_0 v_c = \sqrt{GM r_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(v_c^2 + v_0^2) - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{2r_0}.$$

عند أقرب اقتراب، تنعدم السرعة الشعاعية. وإذا كانت السرعة المماسية هناك هي v_f ، فإن حفظ الزخم الزاوي يعطي

$$r_f v_f = r_0 v_c, \quad v_f = \frac{r_0 v_c}{r_f}.$$

ثم يعطي حفظ الطاقة

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_c^2 = \frac{1}{2}v_c^2 \frac{r_0^2}{r_f^2} - v_c^2 \frac{r_0}{r_f}.$$

بإعادة الترتيب،

$$v_0^2 = v_c^2 \left(\frac{r_0}{r_f} - 1 \right)^2.$$

يتحرك الغاز في البداية نحو الداخل، لذا تحقق مسافة أقرب اقتراب له $r_f \leq r_0$. ولذلك نختار

$$\frac{r_0}{r_f} - 1 = \frac{v_0}{v_c},$$

وهو ما يعطي

$$r_f = \frac{r_0}{1 + v_0/v_c} = \frac{r_0}{1 + v_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}}}.$$

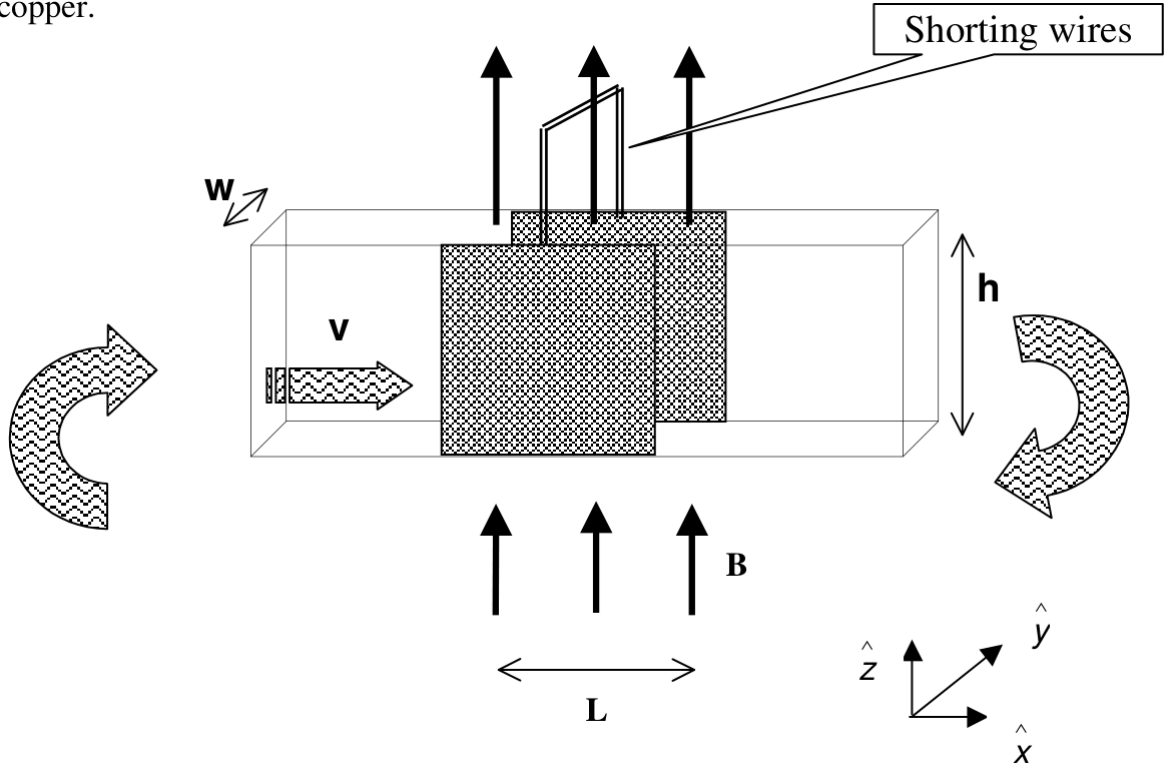
عندما يكون $v_0 = 0$ ، تعطي هذه النتيجة، على نحو صحيح، المدار الدائري الأصلي، $r_f = r_0$. ويكون مسار الغاز إهليلجياً كما هو مرسوم عندما يكون $v_0 < v_c$ ، وقطعاً مكافئاً عندما يكون $v_0 = v_c$ ، وقطعاً زائداً عندما يكون $v_0 > v_c$ ؛ وتصح صيغة مسافة أقرب اقتراب في الحالات الثلاث جميعها.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مولد مغناطو هيدرو ديناميكي (MHD)

أنبوب بلاستيكي أفقي ذو مقطع مستطيل عرضه w وارتفاعه h ، يشكّل حلقة مغلقة، مملوء بالزئبق ذي المقاومة الكهربائية ρ . يُولد توربين زيادة في الضغط مقدارها P ، ويدفع هذا المائع بسرعة ثابتة v_0 . والجداران الرأسيان المتقابلان لجزء من الأنبوب طوله L مصنوعان من النحاس.

copper.



حركة المائع الحقيقي معقدة جداً. ولتبسيط الحالة نفترض ما يأتي:

- على الرغم من لزوجة المائع، فإن سرعته منتظمة على كامل المقطع العرضي.
- تتناسب سرعة المائع دائماً طردياً مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة فيه.
- المائع غير قابل للانضغاط.

يُوصَل هذان الجداران كهربائياً من الخارج بقصر كهربائي، ويُطبَّق في هذا الجزء وحده مجال مغناطيسي منتظم $\mathbf{B}$ متجه رأسياً إلى أعلى. يوضَّح الشكل أعلاه هذا الترتيب، مع متجهات الوحدة $\hat{x}$ ، $\hat{y}$ ، $\hat{z}$ التي ستُستخدم في الحل.

(a) أوجد القوة المؤثرة في المائع بسبب المجال المغناطيسي (بدلالة B ، L ، w ، h ، ρ ، والسرعة v) [2.0 درجة]

(b) اشتق تعبيراً للسرعة الجديدة v للمائع (بدلالة B ، L ، P ، v_0 ، ρ) بعد تطبيق المجال المغناطيسي. [3.0 درجات]

(c) اشتق تعبيراً للقدرة الإضافية التي يجب أن يوفرها التوربين لزيادة السرعة إلى قيمتها الأصلية v_0 . انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [2.0 درجة]

(d) يُوقَف الآن المجال المغناطيسي، ويُستبدَل بالزئبق ماء يجري بسرعة v_0 . تُرسل موجة كهرومغناطيسية ذات تردد واحد على امتداد الجزء ذي الطول L في اتجاه الجريان. معامل انكسار الماء هو n ، و $v_0 \ll c$. اشتق تعبيراً لمساهمة حركة المائع في فرق الطور بين الموجات الداخلة إلى الجزء L والخارجة منه. انقل نتيجتك إلى نموذج الإجابة. [3.0 درجات]

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) تعاكس القوة المغناطيسية الجريان:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2hw}{\rho} v \hat{x}.$$

• (b)

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}.$$

• (c) عند استعادة السرعة v_0 ، تكون القدرة الإضافية المطلوبة بسبب المجال المغناطيسي، فوق القدرة الأصلية في غياب المجال، هي

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2.$$

وإذا أُتخذت بدلاً من ذلك حالة التشغيل ذات السرعة المنخفضة في (b) مرجعاً، فإن الزيادة الكلية في قدرة التوربين تكون

$$\Delta \mathcal{P}_{(b) \rightarrow v_0} = \frac{LB^2 h w}{\rho} v_0^2 + P w h (v_0 - v).$$

• (d) لتكن $\omega = 2\pi f$ التردد الزاوي في إطار المختبر، ولنعرّف تأخر الطور عبر الجزء بأنه $\Phi = kL$. إلى الرتبة الأولى في v_0/c

$$\delta \Phi \equiv \Phi(v_0) - \Phi(0) = -\frac{\omega L v_0}{c^2} (n^2 - 1) = -\frac{2\pi f L v_0}{c^2} (n^2 - 1).$$

وهكذا يقلل الجريان تأخر الطور. ويكون تقدّم الطور المقابل للموجة الخارجة مساوياً له في المقدار وموجب الإشارة.

الحل

(a) القوة المغناطيسية المؤثرة في المائع

سرعة المائع والمجال المغناطيسي المطبق هما

$$\mathbf{v} = v \hat{x}, \quad \mathbf{B} = B \hat{z}.$$

وبالتالي،

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB \hat{y}.$$

لذلك تدفع القوة المغناطيسية المؤثرة في حاملات الشحنة المتحركة تياراً اصطلاحياً عبر الزئبق في الاتجاه $-\hat{y}$ ، بين الجدارين النحاسيين.

تفصل بين الجدارين مسافة w ، لذا فإن مقدار القوة الدافعة الكهربائية الحركية هو

$$\mathcal{E} = vBw.$$

يسري التيار مسافة w عبر الزئبق، ومساحة المقطع العرضي الموصل هي Lh . ومن ثم تكون مقاومته

$$R = \rho \frac{w}{Lh}.$$

بإهمال مقاومة الجدارين النحاسيين وأسلاك القصر، يكون التيار

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBLh}{\rho}.$$

القوة المؤثرة في هذا التيار داخل الزئبق هي

$$\mathbf{F}_B = I(-w \hat{y}) \times (B \hat{z}) = -IwB \hat{x}.$$

ومن ثم

$$\mathbf{F}_B = -\frac{LB^2 h w}{\rho} v \hat{x}.$$

واتجاهها معاكس لسرعة المائع، كما هو متوقع في الكبح المغناطيسي.

(b) السرعة بعد تطبيق المجال المغناطيسي

لتكن مساحة المقطع العرضي للأنبوب

$$A = wh.$$

توفر زيادة الضغط التي يولدها التوربين القوة الدافعة

$$F_P = PA.$$

التناسب المفترض بين السرعة والقوة الدافعة المطبقة يكافئ، في الحركة المستقرة، مقاومة لزجة خطية κv . قبل تطبيق المجال المغناطيسي،

$$PA = \kappa v_0,$$

ومن ثم

$$\kappa = \frac{PA}{v_0}.$$

مع تطبيق المجال وبقاء زيادة الضغط نفسها P ، يكون اتزان القوى في الحالة المستقرة

$$PA - \kappa v - \frac{LB^2 A}{\rho} v = 0.$$

بالتعويض عن κ نحصل على

$$PA = \left(\frac{PA}{v_0} + \frac{LB^2 A}{\rho} \right) v.$$

باختزال A وحل المعادلة،

$$\boxed{v = \frac{v_0}{1 + \frac{LB^2 v_0}{\rho P}}}.$$

تقترب النتيجة من v_0 عندما $B \rightarrow 0$ ، ويقلل المجال السرعة دائماً.

(c) القدرة الإضافية للتوربين

عند استعادة السرعة v_0 ، تعود المقاومة اللزجة إلى قيمتها الأصلية،

$$F_{\text{visc}} = \kappa v_0 = PA.$$

ويجب على التوربين أيضاً التغلب على القوة المغناطيسية

$$|F_B(v_0)| = \frac{LB^2 A}{\rho} v_0.$$

لذا تكون زيادة الضغط المطلوبة

$$P_{\text{restored}} = P + \frac{LB^2 v_0}{\rho}.$$

في الجريان غير القابل للانضغاط، تساوي القدرة الميكانيكية الناتجة عن زيادة الضغط حاصل ضرب زيادة الضغط في معدل التدفق الحجمي:

$$\mathcal{P} = P_{\text{rise}} A v.$$

وعليه فإن القدرة الكلية عند استعادة السرعة هي

$$\mathcal{P}_{\text{restored}} = \left(P + \frac{LB^2 v_0}{\rho} \right) A v_0 = P A v_0 + \frac{LB^2 A}{\rho} v_0^2.$$

كانت القدرة الأصلية في غياب المجال هي $\mathcal{P}_0 = PAv_0$. وبالتالي فإن القدرة الإضافية اللازمة عند السرعة نفسها بسبب الكبح المغناطيسي هي

$$\Delta \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_0 = \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2.$$

وهذه تساوي قدرة التسخين الجولي في الزئبق:

$$I^2R = \left(\frac{v_0BLh}{\rho} \right)^2 \frac{\rho w}{Lh} = \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2,$$

مما يؤكد اتزان الطاقة.

ثمة فرق إذا قيست «القدرة الإضافية» انطلاقاً من الحالة ذات السرعة المنخفضة في (b). ففي تلك الحالة، لا يوفر التوربين سوى

$$\mathcal{P}_{\text{slowed}} = PAv.$$

وتكون الزيادة انطلاقاً من حالة التشغيل تلك

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{restored}} - \mathcal{P}_{\text{slowed}} &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 + Pwh(v_0 - v) \\ &= \frac{LB^2hw}{\rho}v_0^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{LB^2v_0}{\rho P}} \right). \end{aligned}$$

يمثل الحد الثاني استعادة معدل التبديد اللزج الأصلي مع ازدياد السرعة.

(d) مساهمة حركة الماء في فرق الطور

نعدّ معامل الانكسار المعطى n ثابتاً، مع إهمال التشتت. في إطار سكون الماء، تكون سرعة طور الموجة

$$u' = \frac{c}{n}.$$

يتحرك الماء في اتجاه الانتشار بسرعة v_0 . ويعطي قانون جمع السرعات النسبي سرعة الطور في إطار المختبر

$$u = \frac{u' + v_0}{1 + \frac{u'v_0}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v_0}{1 + \frac{v_0}{nc}}.$$

بالتوسيع إلى الرتبة الأولى في v_0/c ،

$$u \simeq \left(\frac{c}{n} + v_0 \right) \left(1 - \frac{v_0}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

المعامل $1 - 1/n^2$ هو معامل جرّ فريزل.

لموجة أحادية اللون في إطار المختبر تُكتب على الصورة

$$E(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

يكون تأخر الطور من المدخل إلى المخرج

$$\Phi = kL = \frac{\omega L}{u}.$$

يثبت المصدر التردد ω في إطار المختبر.

بتوسيع مقلوب السرعة،

$$\frac{1}{u} \simeq \frac{n}{c} - \frac{(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

إذن

$$\Phi(v_0) \simeq \frac{n\omega L}{c} - \frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

للماء الساكن،

$$\Phi(0) = \frac{n\omega L}{c}.$$

بالطرح،

$$\delta\Phi = -\frac{\omega L(n^2 - 1)v_0}{c^2}.$$

وبصورة مكافئة، باستخدام الطول الموجي في الفراغ المقاس في إطار المختبر $\lambda_0 = c/f$ ،

$$\delta\Phi = -\frac{2\pi L v_0}{\lambda_0 c}(n^2 - 1).$$

تدل الإشارة السالبة على انخفاض تأخر الطور عند الانتشار في اتجاه الجريان. وإذا عُرِف فرق الطور بأنه طور الخروج ناقص طور الدخول، فإن تغيّره تكون له الإشارة المعاكسة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.